Chapitre XII : Intégration sur un intervalle quelconque

PSI*

Novembre 2022

Lycée d'Arsonval

L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment c'est-à-dire de la forme :

$$]a\,;b]\ ,\ [a\,;b[\ ,\ ]-\infty\,;b]\ ,\ ]-\infty\,;b[\ ,\ [a\,;+\infty[\ ,\ ]a\,;+\infty[\ ,\ ]a\,;b[\text{ ou }]-\infty\,;+\infty[$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$.

L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment c'est-à-dire de la forme :

$$]a\,;b]\ ,\ [a\,;b[\ ,\ ]-\infty\,;b]\ ,\ ]-\infty\,;b[\ ,\ [a\,;+\infty[\ ,\ ]a\,;+\infty[\ ,\ ]a\,;b[\ \text{ou}\ ]-\infty\,;+\infty[$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Toutes les applications considérées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES : DÉFINITIONS

Définition 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Définition 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Remarque : Si F est une primitive de f, on a, pour tout $x \in [a\,;b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^x = F(x) - F(a)$.

Dire que l'intégrale converge signifie donc que $\displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0\,;1[$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0\,;1[$.

Pour tout $x \in [0\,;1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale diverge.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale diverge.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Solution

Déjà, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arc\,tan} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ (avec $a \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $a < 0$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ (avec $a \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $a < 0$.

Solution

En effet : la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

et, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } a = 0 \\ \dfrac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax} - 1\right) & \text{sinon .} \end{cases}$

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ (avec $a \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $a < 0$.

Solution

En effet : la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

et, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } a = 0 \\ \dfrac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax} - 1\right) & \text{sinon .} \end{cases}$

Cette expression a une limite lorsque $x \to +\infty$ (c'est-à-dire l'intégrale converge) si et seulement si $a < 0$.

Exemples

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$ (avec $a \in \mathbb{R}$) converge si et seulement si $a < 0$.

Lorsqu'on écrit par exemple « Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ » ou « L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge », le terme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'existe pas en tant que nombre ; il s'agit juste d'un symbole et il est impossible de l'utiliser dans les calculs tant que l'on n'a pas prouvé son existence, c'est-à-dire la convergence de l'intégrale.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Démonstration

Il est clair que l'application $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,;b]$. On peut donc définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Démonstration

Il est clair que l'application $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,;b]$. On peut donc définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$.

Pour tout $x \in [a\,;b[$ on a alors $\displaystyle\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$,

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Démonstration

Il est clair que l'application $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,;b]$. On peut donc définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$.

Pour tout $x \in [a\,;b[$ on a alors $\displaystyle\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$, et, puisque l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x \tilde{f}$ est continue sur $[a\,;b]$ (cf. chapitre précédent), on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f}$, d'où le résultat.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Exemple

Étude de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Exemple

Étude de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

L'application $f:\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right[$.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Exemple

Étude de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

L'application $f:\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right[$.

On sait de plus que $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t-1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 1-} f(t) = -1$.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Exemple

Étude de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

L'application $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right[$.

On sait de plus que $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} t-1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 1-} f(t) = -1$.

La fonction f se prolonge donc en une fonction continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, et son intégrale existe.

Proposition 1: Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec a et b *finis*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$.

Exemple

Étude de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Le résultat précédent s'applique uniquement lorsque b est un réel **fini** !

Par exemple, pour $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{t}$ on a bien $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Proposition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $c \in]a\,;b[$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $c \in \,]a\,;b[$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Autrement dit, pour une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, l'existence de l'intégrale est une notion locale au voisinage de b.

Pour cette raison, on utilise souvent l'expression : « l'intégrale converge en b ».

Proposition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $c \in\,]a\,;b[$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Autrement dit, pour une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, l'existence de l'intégrale est une notion locale au voisinage de b.

Pour cette raison, on utilise souvent l'expression : « l'intégrale converge en b ».

Démonstration

Pour tout $x \in [a\,;b[$ on a d'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, donc il suffit de faire tendre x vers b^-.

Définition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Définition 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou existe) si :

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Remarque : On obtient dans ce cas des résultats analogues à ceux des propositions 1 et 2 : notion d'intégrale faussement impropre en a, et l'intégrabilité est une notion locale au voisinage de a^+.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Exemple 1 : $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente et vaut -1.

Solution

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$,

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Solution

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \ln t \,\mathrm{d}t = \big[t \ln t - t\big]_x^1 = x - 1 - x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1\,.$$

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Solution

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \ln t \,\mathrm{d}t = \big[t \ln t - t\big]_x^1 = x - 1 - x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1\,.$$

Cela prouve que l'intégrale converge et vaut -1.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Solution

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \ln t \,\mathrm{d}t = \left[t \ln t - t\right]_x^1 = x - 1 - x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1\,.$$

Cela prouve que l'intégrale converge et vaut -1.

Exemple 2 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente et vaut 2.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Solution

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \ln t \,\mathrm{d}t = \big[t\ln t - t\big]_x^1 = x - 1 - x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1\,.$$

Cela prouve que l'intégrale converge et vaut -1.

Exemple 2 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente et vaut 2.

Solution

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;1]$, et pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 2$.

Cela prouve que l'intégrale converge et vaut 2.

Définition 3

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 3

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(ii) Pour tout $c \in\,]a\,;b[$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Définition 3

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(ii) Pour tout $c \in\,]a\,;b[$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Si tel est le cas, la somme des deux intégrales généralisées : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de c.

On la note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

et on dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Définition 3

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $c \in]a\,;b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(ii) Pour tout $c \in]a\,;b[$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Si tel est le cas, la somme des deux intégrales généralisées : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de c.

On la note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

et on dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

On dira donc que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge s'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que *l'une au moins* des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 3

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(ii) Pour tout $c \in\,]a\,;b[$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Si tel est le cas, la somme des deux intégrales généralisées : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de c.

On la note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

et on dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

On dira donc que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge s'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que *l'une au moins* des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque : les propriétés énoncées ci-dessus se démontrent aisément grâce à la relation de Chasles.

Remarque :

Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a\,;b[$ et soit $c \in\,]a\,;b[$.

Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{x \to a^+} F(x)$ existe ; et dans ce cas, on a

$$\int_a^c f = F(c) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Remarque :

Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a\,;b[$ et soit $c \in\,]a\,;b[$.

Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^c f = F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$. Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{y\to b^-} F(y)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_c^b f = \lim_{y\to b^-} F(y) - F(c)$.

Remarque :

Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a\,;b[$ et soit $c \in\,]a\,;b[$.

Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^c f = F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$. Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{y\to b^-} F(y)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_c^b f = \lim_{y\to b^-} F(y) - F(c)$.

Ainsi, dire que $\displaystyle\int_a^b f$ existe équivaut à dire que F admet une limite en a^+ *et* b^- ; et dans ce cas, on aura

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}} \big[F(t)\big]_x^y = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$$

Remarque :

Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a\,;b[$ et soit $c \in\,]a\,;b[$.

Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^c f = F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$. Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f$ existe équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{y\to b^-} F(y)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_c^b f = \lim_{y\to b^-} F(y) - F(c)$.

Ainsi, dire que $\displaystyle\int_a^b f$ existe équivaut à dire que F admet une limite en a^+ *et* b^- ; et dans ce cas, on aura

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}} \big[F(t)\big]_x^y = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$$

que l'on notera parfois abusivement $\big[F(t)\big]_a^b$ (mais cette écriture n'est autorisée *qu'après* avoir justifié l'existence des deux limites).

Exemple 1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.

Solution

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arc tan} y - \operatorname{Arc tan} x \underset{\substack{y\to+\infty \\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Exemple 1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.

Exemple 2 : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut π.

Exemple 1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.

Exemple 2 : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut π.

Solution

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1\,;1[$ et

$$\forall (x,y) \in \,]-1\,;1[^2,\ \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arc}\sin y - \operatorname{Arc}\sin x \underset{\substack{y\to 1\\ x\to -1}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - : \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Exemple 1 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.

Exemple 2 : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut π.

Exemple 3 : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est divergente.

Solution

En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente (car $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$),
mais $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est divergente (car $\displaystyle\int_{x}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -1 + \frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$).

ATTENTION !

On prendra garde à ne pas simplifier outrageusement la définition !

ATTENTION !

On prendra garde à ne pas simplifier outrageusement la définition !

Par exemple, il ne faut pas confondre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ (qui diverge !) avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t$ (qui vaut 0).

ATTENTION !

On prendra garde à ne pas simplifier outrageusement la définition !

Par exemple, il ne faut pas confondre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ (qui diverge !) avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t$ (qui vaut 0).

Lorsqu'on calcule $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}}\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$, il est important que les variables x et y soient indépendantes.

ATTENTION !

Contrairement aux séries, il se peut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge **sans que** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$!!

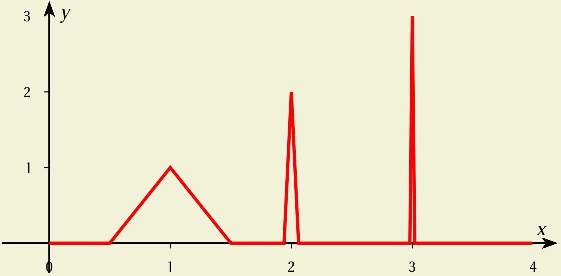
ATTENTION !

Contrairement aux séries, il se peut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge **sans que** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$!!

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et affine par morceaux, telle que :

- $f(0) = 0$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f\left(n - \frac{1}{2n^3}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n^3}\right) = 0$ et $f(n) = n$.

La courbe représentative de f est donc la suivante :



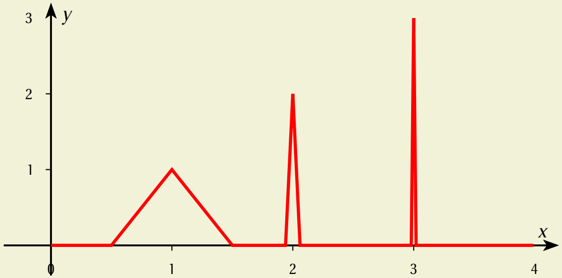
ATTENTION !

Contrairement aux séries, il se peut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge **sans que** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$!!

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et affine par morceaux, telle que :

- $f(0) = 0$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f\left(n - \frac{1}{2n^3}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n^3}\right) = 0$ et $f(n) = n$.

La courbe représentative de f est donc la suivante :



Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut $\frac{\pi^2}{12}$). Cependant, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ n'existe pas ! Pire, f n'est même pas bornée sur $\mathbb{R}_+$!

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES : PROPRIÉTÉS

Les propriétés qui suivent sont énoncées dans le cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On obtient bien sûr des résultats analogues pour les deux autres cas d'intégrale généralisée, dans le cas d'un intervalle de la forme $]a\,;b]$ ou de la forme $]a\,;b[$.

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires.

On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires.

On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\lambda f+\mu g)\,(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)\,(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En termes savants : le sous-ensemble de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$ formé des fonctions dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$, et sur cet espace, l'application $f\mapsto\displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire.

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires.

On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En termes savants : le sous-ensemble de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$ formé des fonctions dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$, et sur cet espace, l'application $f\mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Démonstration

découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur un segment et de la linéarité de la limite.

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires.

On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En termes savants : le sous-ensemble de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$ formé des fonctions dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_m([a\,;b],\mathbb{K})$, et sur cet espace, l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Démonstration

découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur un segment et de la linéarité de la limite.

Remarque : Il résulte immédiatement de la proposition précédente que, si f a une intégrale divergente sur $[a\,;b[$ et g une intégrale convergente, alors l'intégrale de $f+g$ sera divergente.

On ne peut cependant rien dire a priori de la somme de deux intégrales divergentes.

On fera très attention à ne pas écrire $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *avant* d'avoir étudié la convergence de ces deux intégrales !

Par exemple, l'écriture $\displaystyle\cancel{\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{DV}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}}_{\text{DV}}}$ N'A AUCUN SENS !!!

On fera très attention à ne pas écrire $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *avant* d'avoir étudié la convergence de ces deux intégrales !

Par exemple, l'écriture $\displaystyle\xcancel{\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{DV}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}}_{\text{DV}}}$ N'A AUCUN SENS !!!

Proposition 4

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, *à valeurs réelles.*

   Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b[$ et si l'intégrale de f est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs réelles.
   Si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,;b[$ et si les intégrales de f et de g convergent, alors
   $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

On fera très attention à ne pas écrire $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *avant* d'avoir étudié la convergence de ces deux intégrales !

Par exemple, l'écriture $$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{DV}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}}_{\text{DV}}$$ N'A AUCUN SENS !!!

Proposition 4

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, *à valeurs réelles.*

   Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b[$ et si l'intégrale de f est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs réelles.
   Si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,;b[$ et si les intégrales de f et de g convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

immédiat, compte tenu de la propriété similaire pour les intégrales sur un segment et du théorème de prolongement des inégalités pour les limites.

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Démonstration

Soit $x \in [a\,;b[$. Puisque $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$, que $\displaystyle\int_a^x f$ est positive d'après les propriétés des intégrales sur un segment et que $\displaystyle\int_x^b f$ est positive d'après la proposition précédente, l'égalité $\displaystyle\int_a^b f = 0$ implique $\displaystyle\int_a^x f = 0$.

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Démonstration

Soit $x \in [a\,;b[$. Puisque $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$, que $\displaystyle\int_a^x f$ est positive d'après les propriétés des intégrales sur un segment et que $\displaystyle\int_x^b f$ est positive d'après la proposition précédente, l'égalité $\displaystyle\int_a^b f = 0$ implique $\displaystyle\int_a^x f = 0$.

Compte tenu du théorème correspondant pour les intégrales sur un segment, on en déduit $f = 0$ sur $[a\,;x]$, et ce, pour tout $x \in [a\,;b[$, donc $f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Proposition 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales de $\mathcal{Re}(f)$ et de $\mathcal{Im}(f)$ le soient, et, dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathcal{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Proposition 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales de $\mathcal{Re}\,(f)$ et de $\mathcal{Im}\,(f)$ le soient, et, dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{Re}\,(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathcal{Im}\,(f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration

immédiat compte tenu de la propriété similaire pour les intégrales sur un segment et des propriétés des limites.

Proposition 5

Soit f une fonction **continue** sur $[a\,;b[$, **à valeurs réelles positives**, telle que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a\,;b[$.

Proposition 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour que l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales de $\mathcal{Re}(f)$ et de $\mathcal{Im}(f)$ le soient, et, dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathcal{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Corollaire:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ et on a :

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

CAS DES FONCTIONS POSITIVES

Étudier la nature d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, est facile lorsqu'on sait déterminer une primitive F de f. En effet, dans ce cas, il suffit de calculer la limite de F en b^-.

Étudier la nature d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, est facile lorsqu'on sait déterminer une primitive F de f. En effet, dans ce cas, il suffit de calculer la limite de F en b^-.

Cela est malheureusement rarement le cas ; l'idée est alors de comparer la fonction f à des fonctions de référence, comme on l'a fait pour les séries numériques.

Comme pour les séries, on commence par établir ces critères dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives.

Étudier la nature d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, est facile lorsqu'on sait déterminer une primitive F de f. En effet, dans ce cas, il suffit de calculer la limite de F en b^-.

Cela est malheureusement rarement le cas ; l'idée est alors de comparer la fonction f à des fonctions de référence, comme on l'a fait pour les séries numériques.

Comme pour les séries, on commence par établir ces critères dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives.

En effet, si $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ est à valeurs positives, l'application $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $[a\,;b[$.

D'après le théorème de la limite monotone, sa limite en b^- existe si et seulement si elle est majorée.

On obtient donc le théorème suivant, élémentaire mais fondamental puisqu'il est à l'origine de toutes les règles de comparaison qui vont suivre :

Théorème 1

Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles positives.

Soit F l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$ et, dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Théorème 1

Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles positives.

Soit F l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$ et, dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *décroissante* (vérification facile).

Théorème 1

Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles positives.

Soit F l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$ et, dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *décroissante* (vérification facile).

Elle admet donc une limite en a^+ si et seulement si elle est majorée : on obtient donc un résultat tout à fait similaire. Pour cette raison, les théorèmes de comparaison qui vont suivre restent entièrement valables dans le cas où l'intervalle d'intégration est de la forme $]a\,;b]$.

Théorème 1

Soit f continue par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles positives.

Soit F l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$ et, dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et à valeurs réelles positives, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *décroissante* (vérification facile).

Elle admet donc une limite en a^+ si et seulement si elle est majorée : on obtient donc un résultat tout à fait similaire. Pour cette raison, les théorèmes de comparaison qui vont suivre restent entièrement valables dans le cas où l'intervalle d'intégration est de la forme $]a\,;b]$.

On déduit facilement de ce théorème le premier critère de comparaison :

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c\,;b[$, notons $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et supposons que $\displaystyle\int_a^b g$ converge.

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c\,;b[$, notons $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et supposons que $\displaystyle\int_a^b g$ converge.
Alors :

$$\forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ F(x) \leqslant G(x) \leqslant \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } g \geqslant 0).$$

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c\,;b[$, notons $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et supposons que $\displaystyle\int_a^b g$ converge.
Alors :

$$\forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ F(x) \leqslant G(x) \leqslant \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } g \geqslant 0).$$

Ainsi, la fonction F est majorée ; f étant à valeurs positives sur $[c\,;b[$, on déduit du théorème 1 que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 2

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b[$ tel que : $\forall\, t \in [c\,;b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.
Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et on a alors $\displaystyle\int_c^b f \leqslant \int_c^b g$).
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c\,;b[$, notons $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et supposons que $\displaystyle\int_a^b g$ converge.
Alors :

$$\forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ F(x) \leqslant G(x) \leqslant \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } g \geqslant 0).$$

Ainsi, la fonction F est majorée ; f étant à valeurs positives sur $[c\,;b[$, on déduit du théorème 1 que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc aussi convergente d'après la proposition 2.

Exemple à connaître : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution

On commence par remarquer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$; le problème de l'intégrabilité se situe donc au voisinage de $+\infty$.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution

On commence par remarquer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$; le problème de l'intégrabilité se situe donc au voisinage de $+\infty$.

Or, pour $x \geqslant 1$, $x \leqslant x^2$ donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Solution

On commence par remarquer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$; le problème de l'intégrabilité se situe donc au voisinage de $+\infty$.

Or, pour $x \geqslant 1$, $x \leqslant x^2$ donc $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

Et puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe (déjà vu), le résultat découle directement du théorème précédent.

Exemple à connaître : L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Corollaire:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Corollaire:

Soients f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Corollaire:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$.

Dire que $f \underset{b^-}{=} O(g)$ s'écrit :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ ,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|\ .$$

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Corollaire:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$.

Dire que $f \underset{b^-}{=} O(g)$ s'écrit :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ ,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|\ .$$

Mais puisque f et g sont à valeurs positives, cela s'écrit simplement $f(x) \leqslant Mg(x)$ pour $x \in [c\,;b[$.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Corollaire:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$.

Dire que $f \underset{b^-}{=} O(g)$ s'écrit :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ ,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|\ .$$

Mais puisque f et g sont à valeurs positives, cela s'écrit simplement $f(x) \leqslant Mg(x)$ pour $x \in [c\,;b[$.

Donc si l'intégrale de g converge, puisque l'intégrale de Mg converge aussi, il découle directement du théorème 2 que l'intégrale de f converge.

Exemple à connaître : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Corollaire:

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration

Il suffit de démontrer la première propriété, puisque $f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$.

Dire que $f \underset{b^-}{=} O(g)$ s'écrit :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ ,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x)| \leqslant M\,|g(x)|\ .$$

Mais puisque f et g sont à valeurs positives, cela s'écrit simplement $f(x) \leqslant Mg(x)$ pour $x \in [c\,;b[$.

Donc si l'intégrale de g converge, puisque l'intégrale de Mg converge aussi, il découle directement du théorème 2 que l'intégrale de f converge.

Remarque : Comme la nature d'une intégrale ne change pas si on multiplie la fonction par un scalaire, on peut, dans les hypothèses de ce corollaire, remplacer la phrase « f et g sont positives au voisinage de b » par « f et g sont de signes constants au voisinage de b ».

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \Longleftrightarrow f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\;,\; |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)| \;.$$

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ (k - \varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (k + \varepsilon)g(x)\,.$$

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ (k-\varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (k+\varepsilon)g(x)\ .$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{k}{2}$ (ce qui est possible car $k > 0$), on obtient finalement :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ \frac{k}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2}g(x)$$

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ (k-\varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (k+\varepsilon)g(x)\ .$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{k}{2}$ (ce qui est possible car $k > 0$), on obtient finalement :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\text{ tq } \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ \frac{k}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2}g(x)$$

et le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 2.

Corollaire:

> Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a\,;b[$ sont de même nature.

Démonstration

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} o(g)$, ce qui s'écrit :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

ou encore :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ (k-\varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (k+\varepsilon)g(x)\,.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{k}{2}$ (ce qui est possible car $k > 0$), on obtient finalement :

$$\exists\, c \in [a\,;b[\ \text{tq}\ \forall\, x \in [c\,;b[\ ,\ \frac{k}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2}g(x)$$

et le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 2.

Pour pouvoir utiliser ces critères de comparaison, il faut connaître un certain nombre d'intégrales de référence. Celles qui sont au programme sont les suivantes :

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

immédiate en utilisant une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est égale à $\ln t$ si $\alpha = 1$ et à $\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ sinon.

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Le premier résultat de ce théorème peut se généraliser en un autre point que 0 :

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Le premier résultat de ce théorème peut se généraliser en un autre point que 0 :

Proposition 7

Soient a et b des réels tels que $a < b$. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Intégrales de référence

1. **Fonctions de Riemann** : il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Le premier résultat de ce théorème peut se généraliser en un autre point que 0 :

Proposition 7

Soient a et b des réels tels que $a < b$. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2. **Exponentielle et logarithme**

Théorème 4

0. $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ converge (et $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t = -1$).
0. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$ (et dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$).

Exercices d'application

Exercice 1

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Exercices d'application

Exercice 1

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Solution

- *Existence :*

  La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ (théorèmes usuels puisque $1+t^3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).

Exercices d'application

Exercice 1

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Solution

- *Existence :*

  La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ (théorèmes usuels puisque $1+t^3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).

  Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$; puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ existe (intégrale de Riemann avec l'exposant $3>1$), les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives permettent de conclure à l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Exercices d'application

Exercice 1

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Solution

- *Existence :*

  La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ (théorèmes usuels puisque $1+t^3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).

  Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$; puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ existe (intégrale de Riemann avec l'exposant $3>1$), les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives permettent de conclure à l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

- *Calcul :*

  On commence par faire une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{-X+2}{3(X^2-X+1)}$$

  (je n'ai pas détaillé les calculs, à savoir faire).

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}
\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x
\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

On en déduit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\int_0^x \frac{-\frac{1}{2}\left(2t-1\right)+\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Exercices d'application

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$.

Exercices d'application

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

Déjà, la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On peut aussi remarquer qu'elle est positive.

Exercices d'application

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$.

Solution

Déjà, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On peut aussi remarquer qu'elle est positive.

- *Étude au voisinage de* 0
  On sait que $1-e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$; la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale de f au voisinage de 0 existe.

Exercices d'application

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

Déjà, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On peut aussi remarquer qu'elle est positive.

- *Étude au voisinage de* 0
  On sait que $1-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$; la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale de f au voisinage de 0 existe.
- *Étude au voisinage de* $+\infty$
  Puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$; or l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ au voisinage de $+\infty$ est divergente, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de celle de f.

Exercices d'application

Exercice 2

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

Déjà, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues. On peut aussi remarquer qu'elle est positive.

- *Étude au voisinage de* 0
  On sait que $1-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$; la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale de f au voisinage de 0 existe.
- *Étude au voisinage de* $+\infty$
  Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$; or l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ au voisinage de $+\infty$ est divergente, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de celle de f.

Conclusion : l'intégrale proposée diverge.

Exercices d'application

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercices d'application

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de telles fonctions), et positive.

Exercices d'application

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de telles fonctions), et positive.

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$, donc $\displaystyle\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

Exercices d'application

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Solution

La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de telles fonctions), et positive.

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$, donc $\displaystyle e^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec un exposant $2 > 1$), il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$.

Exercices d'application

Exercice 3

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Solution

La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de telles fonctions), et positive.

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$, donc $\displaystyle e^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; puisque la fonction positive $\displaystyle x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec un exposant $2 > 1$), il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$.

Conclusion : l'intégrale proposée converge.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot$ On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ · On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/4} \ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ · On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/4} \ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $\frac{3}{4} < 1$), il en est de même de f.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ · On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $\frac{3}{4} < 1$), il en est de même de f.

- *Étude au voisinage de* 1

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}$ · On en déduit, puisque $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, que

  $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot$ On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $\frac{3}{4} < 1$), il en est de même de f.

- *Étude au voisinage de* 1

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}\cdot$ On en déduit, puisque $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, que $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/2}}$ existe : c'est l'intégrale au voisinage de 1 d'une fonction de Riemann avec l'exposant $\frac{1}{2} < 1$.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ · On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $\frac{3}{4} < 1$), il en est de même de f.

- *Étude au voisinage de* 1

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}$ · On en déduit, puisque $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, que $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/2}}$ existe : c'est l'intégrale au voisinage de 1 d'une fonction de Riemann avec l'exposant $\frac{1}{2} < 1$. Par comparaison de fonctions de signes constants, on en déduit que l'intégrale de f au voisinage de 1 existe.

Exercices d'application

Exercice 4

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est continue sur $]0\,;1[$, comme quotient de fonctions continues. De plus, elle est de signe constant (négative) sur cet intervalle.

- *Étude au voisinage de* 0

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot$ On en déduit ensuite, à l'aide des croissances comparées, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{3/4} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/4}\ln x = 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$. Et puisque la fonction positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec un exposant $\frac{3}{4} < 1$), il en est de même de f.

- *Étude au voisinage de* 1

  On commence par simplifier le problème : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln x}{(1-x)^{3/2}}\cdot$ On en déduit, puisque $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, que $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/2}}$ existe : c'est l'intégrale au voisinage de 1 d'une fonction de Riemann avec l'exposant $\frac{1}{2} < 1$. Par comparaison de fonctions de signes constants, on en déduit que l'intégrale de f au voisinage de 1 existe.

Conclusion : l'intégrale proposée converge.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)}\ \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)}\ \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}\,.$$

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \, (\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \, (\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \, (\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$;

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \, (\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma - \alpha} \, |\ln x|^{-\beta} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x \to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}\,.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;{}^1\!/\mathrm{e}]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha}\,|\ln x|^{-\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \left(\ln x\right)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/\mathrm{e}]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha} \left|\ln x\right|^{-\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

- *Cas $\alpha > 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha > \gamma > 1$;

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \, (\ln x)^\beta} .$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \, |\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/\mathrm{e}]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha} \, |\ln x|^{-\beta} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x \to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

- *Cas $\alpha > 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha > \gamma > 1$; alors $x^\gamma f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-\gamma} \, |\ln x|^\beta} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées puisque $\alpha - \gamma > 0$.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)}\ \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)}\ \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/e]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha}\,|\ln x|^{-\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

- *Cas $\alpha > 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha > \gamma > 1$; alors $x^\gamma f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-\gamma}\,|\ln x|^\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées puisque $\alpha - \gamma > 0$. Par définition de la limite, on en déduit qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a $x^\gamma f(x) \geqslant 1$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^\gamma}$.

Exercices d'application

Exercice 5

Étudier, selon la valeur des réels α et β l'existence des intégrales de Bertrand :

$$\textbf{a)} \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta} \qquad \textbf{b)} \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}.$$

Solution

a) Pour tous α et β, la fonction $f\colon\ x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha\,|\ln x|^\beta}$ est continue sur $]0\,;1/\mathrm{e}]$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On distingue alors selon la position de α par rapport à 1, en comparant f à une fonction de Riemann.

- *Cas $\alpha < 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha < \gamma < 1$; alors $x^\gamma f(x) = x^{\gamma-\alpha}\,|\ln x|^{-\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il en résulte que $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$. Et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est une fonction de Riemann positive intégrable au voisinage de 0, l'intégrale de f existe.

- *Cas $\alpha > 1$*

  Soit γ un réel tel que $\alpha > \gamma > 1$; alors $x^\gamma f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-\gamma}\,|\ln x|^\beta} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées puisque $\alpha - \gamma > 0$. Par définition de la limite, on en déduit qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a $x^\gamma f(x) \geqslant 1$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^\gamma}$. Puisque $\gamma > 1$ l'intégrale de la fonction de Riemann positive $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ diverge, et par comparaison, l'intégrale de f aussi.

Exercices d'application

Solution (suite)

- *Cas $\alpha = 1$*

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$.

Exercices d'application

Solution (suite)

- <u>*Cas* $\alpha = 1$</u>

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.

Exercices d'application

Solution (suite)

- *Cas $\alpha = 1$*

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{e}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/e} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\varepsilon}^{1/e} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/e} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercices d'application

Solution (suite)

- <u>*Cas* $\alpha = 1$</u>

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{sinon} \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln\varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Exercices d'application

Solution (suite)

- *Cas $\alpha = 1$*

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{sinon} \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercices d'application

Solution (suite)

- <u>*Cas $\alpha = 1$*</u>

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{sinon} \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

b) On procède de la même façon pour l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$.

Exercices d'application

Solution (suite)

- *Cas $\alpha = 1$*

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{sinon} \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

b) On procède de la même façon pour l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$.

Il faut retenir le principe : si α est différent de 1, on introduit un réel γ compris strictement entre 1 et α, et en calculant la limite de $x^{\gamma} f(x)$, on compare $f(x)$ à la fonction de Riemann $\dfrac{1}{x^{\gamma}}$. Et dans le cas $\alpha = 1$, on calcule directement une primitive de f.

Exercices d'application

Solution (suite)

- <u>*Cas $\alpha = 1$*</u>

  Dans ce cas, $f(x) = \dfrac{1}{x\,|\ln x|^{\beta}} = \dfrac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}$. On reconnaît ici une expression de la forme $u'\,u^{-\beta}$, on peut donc calculer une primitive de f.Plus précisément, pour $\varepsilon \in \left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ on a :

$$\int_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{x}(-\ln x)^{-\beta}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\ln|\ln x|\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{si } \beta = 1 \\ \left[-\dfrac{(-\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\varepsilon}^{1/\mathrm{e}} & \text{sinon} \end{cases}$$

  Puisque $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$, l'expression ci-dessus possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$ si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\,|\ln x|^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

b) On procède de la même façon pour l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$.

Il faut retenir le principe : si α est différent de 1, on introduit un réel γ compris strictement entre 1 et α, et en calculant la limite de $x^{\gamma} f(x)$, on compare $f(x)$ à la fonction de Riemann $\dfrac{1}{x^{\gamma}}$. Et dans le cas $\alpha = 1$, on calcule directement une primitive de f.

Le résultat à obtenir est le suivant :

$$\text{l'intégrale } \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\,(\ln x)^{\beta}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Exercices d'application

Les intégrales de Bertrand interviennent dans de nombreux calculs ; il est donc important de savoir démontrer leur convergence.

Exercices d'application

Les intégrales de Bertrand interviennent dans de nombreux calculs ; il est donc important de savoir démontrer leur convergence.

Attention : ces intégrales ne font pas partie des intégrales de référence figurant dans le programme officiel, vous ne pouvez donc pas utiliser les résultats démontrés ci-dessus directement !

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,dx$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- *Étude au voisinage de* 0

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f\colon x\mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta\leqslant 0$ et $\alpha\geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- *Étude au voisinage de* 0
  - Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ donc $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta-\alpha<1$.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- *Étude au voisinage de* 0
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta < 1$ (ce cas peut donc être intégré au cas précédent).

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- *Étude au voisinage de* 0
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta < 1$ (ce cas peut donc être intégré au cas précédent).
  - Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(x^\alpha)}{x^\beta} = \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de 0, on « sait » que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (au concours, il faut le redémontrer !). Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution

Quels que soient α et β, la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour $\beta \leqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ elle est même continue en 0, mais inutile de distinguer ce cas).

- *Étude au voisinage de* 0
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta < 1$ (ce cas peut donc être intégré au cas précédent).
  - Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(x^\alpha)}{x^\beta} = \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de 0, on « sait » que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta < 1$ (au concours, il faut le redémontrer !). Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.
  - Les 3 cas précédents peuvent être regroupés ainsi :
$$\int_0^1 f \ \text{ converge } \iff \beta < \max(1+\alpha, 1).$$

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de* $+\infty$

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,dx$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de* $+\infty$
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\beta}\,dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de $+\infty$*
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de $+\infty$*
  - Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta > 1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x) = \dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.
  - Si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de $+\infty$*
  - Si $\alpha>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta>1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.
  - Si $\alpha=0$, $f(x)=\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\beta>1$.
  - Si $\alpha<0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta-\alpha>1$.
  - Les 3 cas précédents peuvent être regroupés ainsi :

$$\int_1^{+\infty} f \ \text{ converge } \iff \beta > \min(1+\alpha, 1).$$

Exercices d'application

Exercice 6

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Solution (suite)

- *Étude au voisinage de $+\infty$*
  - Si $\alpha>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$ donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$. D'après l'exemple des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, on « sait » que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta>1$. Par comparaison de fonctions positives, il en est de même pour l'intégrale de f.
  - Si $\alpha=0$, $f(x)=\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\beta>1$.
  - Si $\alpha<0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha=0$ donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\beta-\alpha>1$.
  - Les 3 cas précédents peuvent être regroupés ainsi :

$$\int_1^{+\infty} f \ \text{ converge } \iff \beta>\min(1+\alpha,1).$$

Conclusion : l'intégrale proposée converge si et seulement si $\min(1+\alpha,1)<\beta<\max(1+\alpha,1)$.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES : TECHNIQUES DE CALCUL

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x - x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x - x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x - x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.
Soient alors ε et x dans $]0\,;1[$.

$$\int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t - t^2}\,\mathrm{d}t =$$

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x-x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.
Soient alors ε et x dans $]0\,;1[$.

$$\int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \Big(-\ln t - \ln(1-t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x - x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.
Soient alors ε et x dans $]0\,;1[$.

$$\int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t - t^2}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \Big(-\ln t - \ln(1-t) \Big)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\ln t + t + (1-t)\ln(1-t) - 1 + t \Big]_\varepsilon^x$$

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x - x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.
Soient alors ε et x dans $]0\,;1[$.

$$\int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t - t^2}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \Big(-\ln t - \ln(1-t)\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\ln t + t + (1-t)\ln(1-t) - 1 + t\Big]_\varepsilon^x$$

$$= F(x) - F(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad F(x) = -x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + 2x - 1$$

Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale généralisée et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Si f est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a\,;b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Exemple : Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x-x^2}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et calculer son intégrale.

Solution

On note déjà que la fonction considérée est continue sur $]0\,;1[$, par les théorèmes usuels.
Soient alors ε et x dans $]0\,;1[$.

$$\int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \Big(-\ln t - \ln(1-t)\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\ln t + t + (1-t)\ln(1-t) - 1 + t\Big]_\varepsilon^x$$

$$= F(x) - F(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad F(x) = -x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + 2x - 1$$

$\lim\limits_0 F = -1$; $\lim\limits_1 F = 1$; d'où : $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 2.

Changement de variables

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Changement de variables

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 5

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection strictement monotone d'un intervalle $]a\,;b[$ sur $]\alpha, \beta[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\varphi(u)\cdot\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Changement de variables

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 5

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection strictement monotone d'un intervalle $]a\,;b[$ sur $]\alpha, \beta[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Démonstration

Supposons par exemple φ strictement croissante.

Changement de variables

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 5

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection strictement monotone d'un intervalle $]a\,;b[$ sur $]\alpha, \beta[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\ \mathrm{d}u.$$

Démonstration

Supposons par exemple φ strictement croissante.
Pour tout segment $[x\,;y]$ inclus dans $]a\,;b[$, on a d'après le théorème sur le changement de variable pour l'intégration sur un segment :

$$\int_x^y f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Changement de variables

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 5

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection strictement monotone d'un intervalle $]a\,;b[$ sur $]\alpha, \beta[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b[$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\ \mathrm{d}u.$$

Démonstration

Supposons par exemple φ strictement croissante.
Pour tout segment $[x\,;y]$ inclus dans $]a\,;b[$, on a d'après le théorème sur le changement de variable pour l'intégration sur un segment :

$$\int_x^y f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\ \mathrm{d}u = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Puisque φ est une bijection strictement croissante, $x\to a$ si et seulement si $\varphi(x)\to\alpha$ et $y\to b$ si et seulement si $\varphi(y)\to\beta$. D'où le résultat par définition de la convergence d'une intégrale généralisée, en passant à la limite.

Changement de variables

Exemple 1

Soit f continue par morceaux sur $]a\,;b]$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Changement de variables

Exemple 1

Soit f continue par morceaux sur $]a\,;b]$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Solution

Immédiat : faire le changement de variable $x = a + t$ dans $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Changement de variables

Exemple 1

Soit f continue par morceaux sur $]a\,;b]$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Solution

Immédiat : faire le changement de variable $x = a + t$ dans $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ce changement de variable étant affine réalise bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $]a\,;b]$ sur $]0\,;b-a]$.

Changement de variables

Exemple 1

Soit f continue par morceaux sur $]a\,;b]$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Solution

Immédiat : faire le changement de variable $x = a + t$ dans $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ce changement de variable étant affine réalise bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $]a\,;b]$ sur $]0\,;b-a]$.

On retrouve ainsi le résultat : $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ existe en 0^+ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$.

Changement de variables

Exemple 1

Soit f continue par morceaux sur $]a\,;b]$. Alors l'intégrale de f en a^+ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto f(a+t)$ en 0^+ existe.

Solution

Immédiat : faire le changement de variable $x = a + t$ dans $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ce changement de variable étant affine réalise bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone de $]a\,;b]$ sur $]0\,;b-a]$.

On retrouve ainsi le résultat : $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$ existe si et seulement si l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ existe en 0^+ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$.

On aurait évidemment un résultat similaire en b^-.

Changement de variables

Exemple 2

Soit $f: \left]-a\,;a\right[\to \mathbb{K}$, paire et continue par morceaux. Alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variables

Exemple 2

Soit $f :]-a\,;a[\to \mathbb{K}$, paire et continue par morceaux. Alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution

Déjà, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors les deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition d'une intégrale doublement impropre (définition 3).

Changement de variables

Exemple 2

Soit $f\colon\,]-a\,;a[\, \to \mathbb{K}$, paire et continue par morceaux. Alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et, dans ce cas : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution

Déjà, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors les deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition d'une intégrale doublement impropre (définition 3).

Puis, si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, alors le changement de variable affine $u = -t$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $[0\,;a[$ sur $]-a\,;0]$, permet de montrer, compte tenu de la parité de f, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et lui est égale, d'où le résultat.

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\pi[$.

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\pi[$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[0\,;\pi[$ sur $[0\,;+\infty[$; en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $x = 2\,\mathrm{Arc}\tan t$ d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\pi[$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[0\,;\pi[$ sur $[0\,;+\infty[$; en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $x = 2\operatorname{Arc}\tan t$ d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ donc (les intégrales impropres écrites ci-après convergent nécessairement en vertu du théorème 5) :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\pi[$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[0\,;\pi[$ sur $[0\,;+\infty[$; en posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $x = 2\operatorname{Arc}\tan t$ d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ donc (les intégrales impropres écrites ci-après convergent nécessairement en vertu du théorème 5) :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3}$$

Changement de variables

Exemple 3 : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Solution

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment !).

Remarquons que, compte tenu de la proposition 1, on peut dire que l'intégrale proposée est aussi celle de cette fonction sur l'intervalle semi-ouvert $[0\,;\pi[$.

L'application $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[0\,;\pi[$ sur $[0\,;+\infty[$; en posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $x = 2\operatorname{Arc}\tan t$ d'où $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ donc (les intégrales impropres écrites ci-après convergent nécessairement en vertu du théorème 5) :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in \,]a\,;b[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in \,]a\,;b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a\,;b[$.

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in \left]a\,;b\right[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in \left]a\,;b\right[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $\left]a\,;b\right[$.

De plus, quand $x \to a^+$, $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} \dfrac{cste}{(x-a)^{1/2}}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a. Et il en est de même au voisinage de b.

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in]a\,;b[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in]a\,;b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a\,;b[$.

De plus, quand $x \to a^+$, $f(x) \underset{x \to a^+}{\sim} \dfrac{cste}{(x-a)^{1/2}}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a. Et il en est de même au voisinage de b.

On écrit alors le trinôme $(b-x)(x-a)$ sous forme canonique :

$$(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2\right) = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2.$$

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in]a\,;b[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in]a\,;b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a\,;b[$.

De plus, quand $x \to a^+$, $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} \dfrac{cste}{(x-a)^{1/2}}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a. Et il en est de même au voisinage de b.

On écrit alors le trinôme $(b-x)(x-a)$ sous forme canonique :

$$(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2\right) = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2.$$

Le changement de variable $y = x - \frac{a+b}{2}$, qui est un changement de variable affine donc licite, donne alors :

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in]a\,;b[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in]a\,;b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a\,;b[$.

De plus, quand $x \to a^+$, $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} \dfrac{cste}{(x-a)^{1/2}}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a. Et il en est de même au voisinage de b.

On écrit alors le trinôme $(b-x)(x-a)$ sous forme canonique :

$$(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2\right) = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2.$$

Le changement de variable $y = x - \frac{a+b}{2}$, qui est un changement de variable affine donc licite, donne alors :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}}$$

Changement de variables

Exemple 4 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$.

Solution

Pour $x \in \,]a\,;b[$ posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Pour tout $x \in \,]a\,;b[$, $(b-x)(x-a) > 0$ donc f est continue (et positive) sur $]a\,;b[$.

De plus, quand $x \to a^+$, $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} \dfrac{cste}{(x-a)^{1/2}}$ donc par comparaison avec une fonction de Riemann (exposant $\frac{1}{2} < 1$), f est intégrable au voisinage de a. Et il en est de même au voisinage de b.

On écrit alors le trinôme $(b-x)(x-a)$ sous forme canonique :

$$(b-x)(x-a) = -x^2 + (a+b)x - ab = -\left(\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2\right) = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2.$$

Le changement de variable $y = x - \frac{a+b}{2}$, qui est un changement de variable affine donc licite, donne alors :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - y^2}} = \left[\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{y}{\frac{b-a}{2}}\right)\right]_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \pi.$$

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
- Au voisinage de 0, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$, et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ existe (intégrale de référence).

  Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 f$.

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
- Au voisinage de 0, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$, et on sait que $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ existe (intégrale de référence).

  Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\int\limits_0^1 f$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Par comparaison avec la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{2} > 1$, on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
- Au voisinage de 0, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$, et on sait que $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ existe (intégrale de référence).

  Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\int\limits_0^1 f$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Par comparaison avec la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{2} > 1$, on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$, on fait le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $]0\,;1]$ sur $[1\,;+\infty[$. On obtient :

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
- Au voisinage de 0, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$, et on sait que $\int\limits_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ existe (intégrale de référence).

  Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\int\limits_0^1 f$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Par comparaison avec la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{2} > 1$, on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$, on fait le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $]0\,;1]$ sur $[1\,;+\infty[$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où finalement :}$$

Changement de variables

Exemple 5 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$

Solution

Bien sûr, on commence par démontrer (rapidement) l'existence de l'intégrale proposée :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
- Au voisinage de 0, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln x$, et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x$ existe (intégrale de référence).

  Par comparaison de fonctions de signes constants au voisinage de 0, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 f$.
- Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0$, donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Par comparaison avec la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $\frac{3}{2} > 1$, on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$, on fait le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $]0\,;1]$ sur $[1\,;+\infty[$. On obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où finalement :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Intégration par parties

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b[$. Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(t)g(t)$ existe , alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce que l'on écrit encore : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Intégration par parties

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b[$. Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(t)g(t)$ existe , alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce que l'on écrit encore : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

Il suffit de passer à la limite dans la relation :

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b[$. Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(t)g(t)$ existe , alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce que l'on écrit encore : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarques :

1. Ce théorème se généralise sans difficulté au cas d'un intervalle de la forme $]a\,;b]$ (il faut alors que $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)g(t)$ existe) ou au cas d'un intervalle de la forme $]a\,;b[$ (et il faut alors que les **deux** limites $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)g(t)$ et $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)g(t)$ existent).

Intégration par parties

Théorème 6

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b[$. Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(t)g(t)$ existe , alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et, lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce que l'on écrit encore : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarques :

1. Ce théorème se généralise sans difficulté au cas d'un intervalle de la forme $]a\,;b]$ (il faut alors que $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)g(t)$ existe) ou au cas d'un intervalle de la forme $]a\,;b[$ (et il faut alors que les **deux** limites $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)g(t)$ et $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)g(t)$ existent).

2. Pour appliquer ce théorème il est *indispensable* de vérifier proprement l'existence de la limite. En cas de doute, on reviendra à la formule sur un segment, et à la fin des calculs on fera un (ou des) passage(s) à la limite (que l'on justifiera bien sûr !).

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$: $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4}$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann).

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : la fonction $f\colon\ t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$: $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4}$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann).

Pour le calcul, on commence par utiliser l'astuce « classique » en écrivant : $1 = (1+t^2) - t^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\,.$$

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$: $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4}$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann).

Pour le calcul, on commence par utiliser l'astuce « classique » en écrivant : $1 = (1+t^2) - t^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\,.$$

Il est important de noter que l'on a bien le droit de « couper l'intégrale en deux » car toutes les intégrales écrites sont convergentes (considérer un équivalent en $+\infty$).

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : la fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$: $f(t) \sim \dfrac{1}{t^4}$, avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^4}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann).

Pour le calcul, on commence par utiliser l'astuce « classique » en écrivant : $1 = (1+t^2) - t^2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\,.$$

Il est important de noter que l'on a bien le droit de « couper l'intégrale en deux » car toutes les intégrales écrites sont convergentes (considérer un équivalent en $+\infty$).

La première de ces intégrales est immédiate :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\operatorname{Arc}\tan t\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution (suite)

Pour calculer la seconde intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, on va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, soit $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Solution (suite)

Pour calculer la seconde intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, on va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, soit $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ existe, ce qui justifie l'écriture :

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution (suite)

Pour calculer la seconde intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, on va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, soit $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ existe, ce qui justifie l'écriture :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)}\right]_0^{t\to+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0 + \frac{\pi}{4}.$$

Intégration par parties

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$

Solution (suite)

Pour calculer la seconde intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, on va faire une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, soit $v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ existe, ce qui justifie l'écriture :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)}\right]_0^{t\to+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0 + \frac{\pi}{4}.$$

En rassemblant les deux résultats précédents, on obtient finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \, \mathrm{d}t$ ($n \in \mathbb{N}$).

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ ($n \in \mathbb{N}$).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\int_0^1 t^n \ln t \, dt$ $(n \in \mathbb{N})$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\int_0^1 \ln t \, dt$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ ($n \in \mathbb{N}$).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n\colon\ t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f_n(t) = 0$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$, donc son intégrale existe.

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ $(n \in \mathbb{N})$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \colon t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} f_n(t) = 0$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$, donc son intégrale existe.

Pour calculer l'intégrale, on fait une intégration par parties en posant $u'(t) = t^n$, soit $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, et $v(t) = \ln t$.

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ ($n \in \mathbb{N}$).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \colon t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} f_n(t) = 0$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$, donc son intégrale existe.

Pour calculer l'intégrale, on fait une intégration par parties en posant $u'(t) = t^n$, soit $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, et $v(t) = \ln t$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$, et $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. On peut donc écrire :

Intégration par parties

Exemple 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t$ ($n \in \mathbb{N}$).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

Pour $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$, et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 (intégrale de référence).

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f_n(t) = 0$, donc f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$, donc son intégrale existe.

Pour calculer l'intégrale, on fait une intégration par parties en posant $u'(t) = t^n$, soit $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, et $v(t) = \ln t$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$, et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. On peut donc écrire :

$$\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_{t\to 0}^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 0 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \colon t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ c'est-à-dire $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$...

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n\colon t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $\displaystyle t \mapsto \frac{1}{t^2}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$...

Notons $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait une intégration par parties avec $u(t) = t^n$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ soit $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n\colon t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$...

Notons $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait une intégration par parties avec $u(t) = t^n$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ soit $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Lorsque $t = 0$, l'expression $t^n \mathrm{e}^{-t}$ est égale à 0 puisque $n \geqslant 1$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées, donc :

Intégration par parties

Exemple 3 : Pour tout entier n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Solution

L'existence de cette intégrale ne doit pas poser de problème !

Rapidement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \colon t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ c'est-à-dire $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ positive et intégrable au voisinage de $+\infty$...

Notons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait une intégration par parties avec $u(t) = t^n$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ soit $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Lorsque $t = 0$, l'expression $t^n \mathrm{e}^{-t}$ est égale à 0 puisque $n \geqslant 1$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées, donc :

$$I_n = \underbrace{\left[-t^n e^{-t}\right]_0^{t\to+\infty}}_{=0} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = nI_{n-1}.$$

Puisque $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on en déduit par récurrence immédiate : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

Intégration par parties

Exemple 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Exemple 4 : Montrer que $\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x$.

Solution

L'existence de l'intégrale est quasi-immédiate puisque $\mathrm{e}^{-x} \ln x \underset{x \to 0}{\sim} \ln x$.

Intégration par parties

Exemple 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Solution

L'existence de l'intégrale est quasi-immédiate puisque $\mathrm{e}^{-x}\ln x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$.

On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \ln x$. Mais si l'on choisit $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$, alors le produit $u(x)v(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to 0^+$, donc les hypothèses du théorème d'intégration par parties ne sont pas vérifiées!!

Intégration par parties

Exemple 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 -e^{-x}\ln x\,dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$.

Solution

L'existence de l'intégrale est quasi-immédiate puisque $e^{-x}\ln x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$.

On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = -e^{-x}$ et $v(x) = \ln x$. Mais si l'on choisit $u(x) = e^{-x}$, alors le produit $u(x)v(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to 0^+$, donc les hypothèses du théorème d'intégration par parties ne sont pas vérifiées !!

L'astuce (**à retenir !**) consiste à utiliser une autre primitive de u' ; puisque ces primitives diffèrent toutes d'une constante, il faut bien choisir cette constante. Ici, on choisira $u(x) = e^{-x} - 1$, car de cette façon $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. On a donc :

Intégration par parties

Exemple 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Solution

L'existence de l'intégrale est quasi-immédiate puisque $\mathrm{e}^{-x}\ln x \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$.

On fait une intégration par parties en posant $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \ln x$. Mais si l'on choisit $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$, alors le produit $u(x)v(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to 0^+$, donc les hypothèses du théorème d'intégration par parties ne sont pas vérifiées !!

L'astuce (**à retenir !**) consiste à utiliser une autre primitive de u' ; puisque ces primitives diffèrent toutes d'une constante, il faut bien choisir cette constante. Ici, on choisira $u(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$, car de cette façon $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées. On a donc :

$$\int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x = \underbrace{\Big[(e^{-x}-1)\ln x\Big]_{x\to 0}^1}_{=0} - \int_0^1 (e^{-x}-1)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

INTÉGRALES ABSOLUMENT CONVERGENTES

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Définition 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Définition 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques

1. On a bien sûr une définition analogue dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$.

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Définition 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques

1. On a bien sûr une définition analogue dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$.
2. Dans la définition ci-dessus, $|f(t)|$ désigne la valeur absolue de $f(t)$ si f est à valeurs réelles, et son module si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Définition 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est <u>absolument convergente</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarques

1. On a bien sûr une définition analogue dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$.
2. Dans la définition ci-dessus, $|f(t)|$ désigne la valeur absolue de $f(t)$ si f est à valeurs réelles, et son module si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 7

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\,;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,; b[$:

$$f^+(t) = \mathsf{max}(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \mathsf{max}(-f(t), 0)$$

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,;b[$:

$$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

  de sorte que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,;b[$:

  $$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

  de sorte que

  $$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

  Puisque $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f^+$ et $\displaystyle\int_a^b f^-$ existent.

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,;b[$:

$$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

  de sorte que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

  Puisque $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f^+$ et $\displaystyle\int_a^b f^-$ existent.

  Puisque $f = f^+ - f^-$, l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ existe donc.

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,;b[$:

  $$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

  de sorte que

  $$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

  Puisque $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives que les intégrales $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ existent.

  Puisque $f = f^+ - f^-$, l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ existe donc.

- Cas général

  Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, puisque $|\mathcal{Re}\,(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathcal{Im}\,(f)| \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison que les intégrales de $\mathcal{Re}\,(f)$ et de $\mathcal{Im}\,(f)$ sont absolument convergentes.

Démonstration

- Premier cas : f est à valeurs réelles

  Notons alors, pour tout $t \in [a\,;b[$:

  $$f^+(t) = \max(f(t), 0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t), 0)$$

  de sorte que

  $$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

  Puisque $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison pour les fonctions positives que les intégrales $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ existent.

  Puisque $f = f^+ - f^-$, l'intégrale de f sur $[a\,;b[$ existe donc.

- Cas général

  Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, puisque $|\mathcal{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathcal{Im}(f)| \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison que les intégrales de $\mathcal{Re}(f)$ et de $\mathcal{Im}(f)$ sont absolument convergentes.

  D'après la première partie, elles sont donc convergentes, et on en conclut que $\int_a^b f$ converge aussi.

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \ |\sin t| \leqslant |t|$$

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \leqslant |t|$$

(cette inégalité est classique, et doit être connue ; pour la démontrer, le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\sin$ sur $[0\,;t]$).

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \left|\sin t\right| \leqslant |t|$$

(cette inégalité est classique, et doit être connue ; pour la démontrer, le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sin sur $[0\,;t]$).

On en déduit que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \leqslant |t|$$

(cette inégalité est classique, et doit être connue ; pour la démontrer, le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sin sur $[0\,;t]$).

On en déduit que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), il en est de même de $|f|$ par les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives (d'ailleurs, cet argument suffit, l'étude en 0 était inutile !).

Exemple 1 : Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

La fonction $f\colon t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues. On remarque qu'elle n'est pas de signe constant.

Puisque $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$; f se prolonge donc par continuité en 0, et l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

On « sait » que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ |\sin t| \leqslant |t|$$

(cette inégalité est classique, et doit être connue ; pour la démontrer, le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sin sur $[0\,;t]$).

On en déduit que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), il en est de même de $|f|$ par les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives (d'ailleurs, cet argument suffit, l'étude en 0 était inutile !).

Ainsi, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}_+$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t}\sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t}\sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t}\sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t} \sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t = \mathcal{I}m \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t\right) = \mathcal{I}m \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t} \,\mathrm{d}t\right)$$

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t} \sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t = \mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \mathcal{I}m\left(\left[\frac{1}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(i-1)t}\right]_0^{+\infty}\right).$$

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t} \sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t &= \mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t\right) = \mathcal{I}m\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t} \, \mathrm{d}t\right) \\ &= \mathcal{I}m\left(\left[\frac{1}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(i-1)t}\right]_0^{+\infty}\right).\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)t} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 0$ puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est bornée, donc finalement :

Exemple 2 : Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t$

Solution

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et la convergence absolue de l'intégrale est immédiate grâce à l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{-t} \sin t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est également absolument convergente (puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| = 1$), donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t &= \mathcal{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t\right) = \mathcal{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t} \, \mathrm{d}t\right) \\ &= \mathcal{Im}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(i-1)t}\right]_0^{+\infty}\right).\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)t} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 0$ puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est bornée, donc finalement :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \, \mathrm{d}t = \mathcal{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ existe.

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

  - *1ère méthode*

    Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

  - *1ère méthode*

    Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    On pose donc :

    $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-n\pi}{=} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

  - *1ère méthode*

    Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    On pose donc :

    $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-n\pi}{=} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

    Montrons alors que la série de terme général u_n vérifie le CSSA :

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

  - *1ère méthode*

    Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    On pose donc :

    $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-n\pi}{=} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

    Montrons alors que la série de terme général u_n vérifie le CSSA :

    - Puisque $\sin u$ est positif sur $[0\,;\pi]$, la suite (u_n) est alternée.

Exemple important

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Solution

- Montrons d'abord la convergence de l'intégrale. Cet exemple étant important, je vais donner deux méthodes pour ce faire.

  On commence déjà par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 ($\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), donc l'intégrale est faussement impropre au voisinage de 0.

  Pour montrer que l'intégrale proposée converge, on revient à la définition, et il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

  - *1ère méthode*

    Cette méthode consiste à considérer la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

    On pose donc :

    $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-n\pi}{=} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

    Montrons alors que la série de terme général u_n vérifie le CSSA :

    - Puisque $\sin u$ est positif sur $[0\,;\pi]$, la suite (u_n) est alternée.
    - L'inégalité $u + n\pi \leqslant u + (n+1)\pi$ implique que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin u}{u + n\pi} \right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} \mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u + n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$.

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin u}{u + n\pi} \right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} \mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x \pi \leqslant x < (n_x + 1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin u}{u+n\pi} \right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} \mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\left| \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{n_x\pi}^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \right|$$

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} \mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\left|\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{n_x\pi}^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$$

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\left|\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$$

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$.

Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{n_x\pi}^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{n_x} = \frac{1}{n_x}.\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, il en est de même de n_x, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = 0$

Solution (suite)

- Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+n\pi}\right| \mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, c'est-à-dire que la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente ;

or pour $n \geqslant 1$ on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles ; on a donc établi l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$.

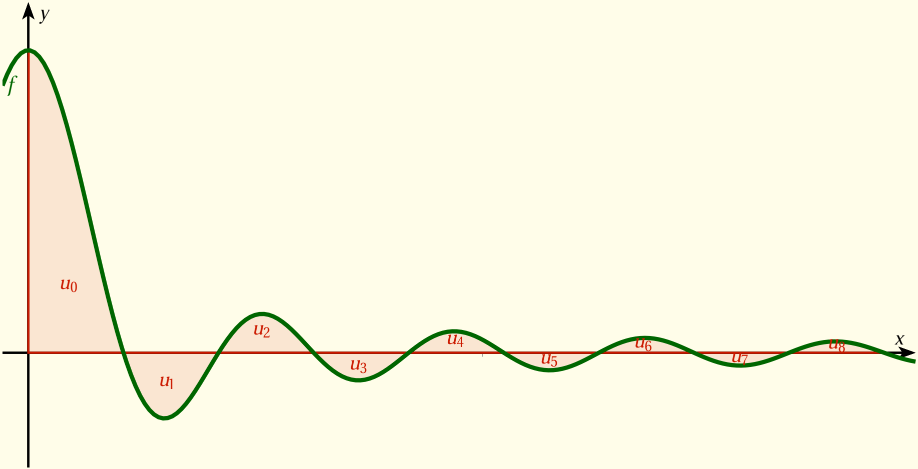
Si maintenant x est un réel $\geqslant \pi$ quelconque, soit $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, de sorte que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$ avec n_x entier $\geqslant 1$. Alors :

$$\left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{n_x\pi}^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{n_x} = \frac{1}{n_x}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, il en est de même de n_x, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = 0$ d'où l'on déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \ell$. Cela prouve la convergence de l'intégrale.

Solution (suite)

La méthode est illustrée par le graphique ci-dessous.



Solution (suite)

- *2ème méthode*
  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$.

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t \to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\lim\limits_{t\to} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\displaystyle\lim_{t\to} \frac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\lim\limits_{t\to} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Or il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue, positive, prolongeable en 0 ($\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$), et majorée par $\dfrac{2}{t^2}$.

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\lim\limits_{t\to} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Or il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue, positive, prolongeable en 0 ($\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$), et majorée par $\dfrac{2}{t^2}$.

  Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ (car $1 - \cos$ bornée), on en déduit que l'intégrale proposée converge et que :

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\lim\limits_{t\to} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Or il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue, positive, prolongeable en 0 ($\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$), et majorée par $\dfrac{2}{t^2}$.

  Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ (car $1-\cos$ bornée), on en déduit que l'intégrale proposée converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Solution (suite)

- *2ème méthode*

  Cette méthode consiste à faire une intégration par parties de $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$. Mais si l'on choisit comme primitive la fonction $v(t) = -\cos t$, on ne peut pas faire l'intégration par parties puisque $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ n'est pas finie !

  L'astuce (déjà vue) consiste ici à utiliser comme primitive la fonction $v(t) = 1 - \cos t$. En effet, puisque $1 - \cos t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on aura $\lim\limits_{t\to} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$ donc on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Or il est facile de vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque continue, positive, prolongeable en 0 ($\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$), et majorée par $\dfrac{2}{t^2}$.

  Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ (car $1-\cos$ bornée), on en déduit que l'intégrale proposée converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\hookrightarrow$ *L'idée utilisée dans cette méthode est importante à retenir : puisque l'inégalité $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t}$ ne suffit pas pour conclure (car $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$), on fait une intégration par parties pour augmenter le degré du dénominateur et obtenir ainsi, par comparaison avec une fonction de Riemann, une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.*

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t$ diverge.

  Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t = +\infty$,

  et pour cela il suffit de démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \mathrm{d}t = +\infty$.

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

  Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$,

  et pour cela il suffit de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$.

  En reprenant les notations de la 1ère méthode vue ci-dessus, cela revient à démontrer que la série de terme général

  $$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$$

  diverge.

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

  Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$,

  et pour cela il suffit de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$.

  En reprenant les notations de la 1ère méthode vue ci-dessus, cela revient à démontrer que la série de terme général

  $$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$$

  diverge.

  Et cela est immédiat, puisque $\displaystyle |u_n| \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)\pi}\cdot$

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

  Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$, et pour cela il suffit de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$.

  En reprenant les notations de la 1ère méthode vue ci-dessus, cela revient à démontrer que la série de terme général

$$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$$

  diverge.

  Et cela est immédiat, puisque $\displaystyle |u_n| \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)\pi}\cdot$

  Ainsi, par comparaison à la série harmonique (divergente), la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Solution (suite et fin)

- Montrons enfin que l'intégrale n'est pas absolument convergente, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

  Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, cela revient à démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$, et pour cela il suffit de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$.

  En reprenant les notations de la 1ère méthode vue ci-dessus, cela revient à démontrer que la série de terme général

  $$|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$$

  diverge.

  Et cela est immédiat, puisque $\displaystyle|u_n| \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)\pi}\cdot$

  Ainsi, par comparaison à la série harmonique (divergente), la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Remarque : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ s'appelle *l'intégrale de Dirichlet*. Elle est égale à $\dfrac{\pi}{2}$ (voir démonstration en exercice).

Définition 5

Soit f une fonction définir sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dite <u>intégrable sur I</u> si f est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Dans ce cas, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ cette intégrale.

Définition 5

Soit f une fonction définir sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dite intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Dans ce cas, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ cette intégrale.

Remarque : Lorsque $I = [a\,;b[$ (resp. $]a\,;b]$), on pourra dire simplement : « f est intégrable en a » (resp. en b).

Définition 5

Soit f une fonction définir sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dite intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Dans ce cas, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ cette intégrale.

Remarque : Lorsque $I = [a\,;b[$ (resp. $]a\,;b]$), on pourra dire simplement : « f est intégrable en a » (resp. en b).

Proposition 8

L'ensemble noté $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$.

Définition 5

Soit f une fonction définir sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dite intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Dans ce cas, on peut noter $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ cette intégrale.

Remarque : Lorsque $I = [a\,;b[$ (resp. $]a\,;b]$), on pourra dire simplement : « f est intégrable en a » (resp. en b).

Proposition 8

L'ensemble noté $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$.

Démonstration

En effet, cet ensemble est non vide car il contient la fonction nulle, et si f, g sont intégrables sur I et si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I (\lambda f + g)$ est absolument convergente puisque $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda|\,|f| + |g|$, et d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.

L'étude de l'absolue convergence (=intégrabilité) permet d'utiliser certains critères de comparaison même lorsqu'on ne connaît pas le signe de la fonction. On a le résultat suivant, que l'on a énoncé dans le cas d'un intervalle $[a\,;b[$, mais qui s'adapte sans problème au cas d'un intervalle $]a\,;b]$.

L'étude de l'absolue convergence (=intégrabilité) permet d'utiliser certains critères de comparaison même lorsqu'on ne connaît pas le signe de la fonction. On a le résultat suivant, que l'on a énoncé dans le cas d'un intervalle $[a\,;b[$, mais qui s'adapte sans problème au cas d'un intervalle $]a\,;b]$.

Théorème 8

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
2. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
3. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
4. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a\,;b[$ est équivalente à celle de g.

L'étude de l'absolue convergence (=intégrabilité) permet d'utiliser certains critères de comparaison même lorsqu'on ne connaît pas le signe de la fonction. On a le résultat suivant, que l'on a énoncé dans le cas d'un intervalle $[a\,;b[$, mais qui s'adapte sans problème au cas d'un intervalle $]a\,;b]$.

Théorème 8

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
2. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
3. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
4. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a\,;b[$ est équivalente à celle de g.

Démonstration

En effet, la relation $f \underset{b^-}{=} O(g)$ (par exemple) équivaut à $|f| \underset{b^-}{=} O(|g|)$.

Si g est intégrable, alors $\displaystyle\int_a^b |g|$ existe, et il résulte alors du critère de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles positives que $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente, d'où le résultat.

L'étude de l'absolue convergence (=intégrabilité) permet d'utiliser certains critères de comparaison même lorsqu'on ne connaît pas le signe de la fonction. On a le résultat suivant, que l'on a énoncé dans le cas d'un intervalle $[a\,;b[$, mais qui s'adapte sans problème au cas d'un intervalle $]a\,;b]$.

Théorème 8

Soient f et g continues par morceaux sur $[a\,;b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
2. Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
3. Si $f \underset{b^-}{=} o(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a\,;b[$ implique celle de f.
4. Si $f \underset{b^-}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a\,;b[$ est équivalente à celle de g.

Démonstration

En effet, la relation $f \underset{b^-}{=} O(g)$ (par exemple) équivaut à $|f| \underset{b^-}{=} O(|g|)$.

Si g est intégrable, alors $\displaystyle\int_a^b |g|$ existe, et il résulte alors du critère de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles positives que $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente, d'où le résultat.

L'utilisation de ce théorème simplifie la rédaction, comme vous pouvez le constater dans les exemples ci-dessous.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
- Au voisinage de 0^+ on a $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), il en est donc de même pour f.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
- Au voisinage de 0^+ on a $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), il en est donc de même pour f.
- Au voisinage de $+\infty$ on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ (puisque $|\sin\sqrt{x}| \leqslant 1$ et $\sqrt{1+x^2} \geqslant x$) ; or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec $2 > 1$), il en est donc de même pour f.

Exemple 1 : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}$ pour $x > 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues.
- Au voisinage de 0^+ on a $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0 (fonction de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), il en est donc de même pour f.
- Au voisinage de $+\infty$ on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ (puisque $|\sin\sqrt{x}| \leqslant 1$ et $\sqrt{1+x^2} \geqslant x$) ; or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de Riemann avec $2 > 1$), il en est donc de même pour f.

En conclusion, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,; +\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,;+\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \to +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$:

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,; +\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \to +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$:

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,;+\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \to +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,;+\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \to +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

puisque $h = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}$ est un $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}\right)$ est continue sur $[1\,;+\infty[$: en effet, pour tout $x > 0$, $\sin x > -\sqrt{x}$ (faites un dessin !), et $\dfrac{a}{x} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x} > 0$.

Lorsque $x \to +\infty$ on effectue un développement limité, en utilisant $\ln(1+h) \underset{h \to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + O(h^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

puisque $h = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{a}{x}$ est un $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Il reste à étudier l'intégrabilité de ces fonctions.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite)

Pour étudier l'existence de l'intégrale de $\dfrac{\sin^2 x}{x}$, on linéarise :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{4x} + \frac{a - 1/4}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad (*)$$

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite)

Pour étudier l'existence de l'intégrale de $\dfrac{\sin^2 x}{x}$, on linéarise :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{4x} + \frac{a - 1/4}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad (*)$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ existe (cf. intégrale de Dirichlet), et on démontrerait de la même façon, à l'aide d'une intégration par parties (afin d'augmenter le degré du dénominateur), que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x$ existent.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite)

Pour étudier l'existence de l'intégrale de $\dfrac{\sin^2 x}{x}$, on linéarise :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{a}{x}-\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{2x}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\cos 2x}{4x}+\frac{a-1/4}{x}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad (*)$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe (cf. intégrale de Dirichlet), et on démontrerait de la même façon, à l'aide d'une intégration par parties (afin d'augmenter le degré du dénominateur), que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ existent.

De plus, une fonction qui est un $O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ y est intégrable, par comparaison à une fonction de Riemann.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite)

Pour étudier l'existence de l'intégrale de $\dfrac{\sin^2 x}{x}$, on linéarise :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x} - \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos 2x}{4x} + \frac{a-{}^1\!/_4}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad (*)$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ existe (cf. intégrale de Dirichlet), et on démontrerait de la même façon, à l'aide d'une intégration par parties (afin d'augmenter le degré du dénominateur), que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x$ existent.

De plus, une fonction qui est un $O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ y est intégrable, par comparaison à une fonction de Riemann.

Il résulte alors de l'égalité $(*)$ que l'intégrale de f sur $[1\,;+\infty[$ existe si et seulement si celle de $\dfrac{a-{}^1\!/_4}{x}$ existe, ce qui n'est possible que si $a = \dfrac{1}{4}$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite et fin)

Dans ce cas, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4x}\right)$; on a donc $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\sim} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite et fin)

Dans ce cas, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4x}\right)$; on a donc $|f(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|$.

Or pour $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \leqslant x$ donc $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \geqslant \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \geqslant 0$, et puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ diverge (cf. intégrale de Dirichlet), il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \mathrm{d}x$ et par équivalence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$.

Exemple 2

Pour quelle(s) valeurs du réel $a \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Est-elle alors absolument convergente ?

Solution (suite et fin)

Dans ce cas, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4x}\right)$; on a donc $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{\sim} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|$.

Or pour $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \leqslant x$ donc $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \geqslant \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \geqslant 0$, et puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ diverge (cf. intégrale de Dirichlet), il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \mathrm{d}x$ et par équivalence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$.

Conclusion : l'intégrale proposée converge si et seulement si $a = \dfrac{1}{4}$, mais n'est alors pas absolument convergente.

FIN DU CHAPITRE XII