

Chapitre XVII : Espaces probabilisés

PSI*

Février 2023

Lycée d'Arsonval

RÉVISIONS : DÉNOMBREMENT

p-listes**Définition 1**

Soient n et p deux entiers strictement positifs, E un ensemble à n éléments. Une **p-liste** d'éléments de E , notée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E$, est un élément de E^p (c'est-à-dire un p -uplet d'éléments de E).

p -listes**Définition 1**

Soient n et p deux entiers strictement positifs, E un ensemble à n éléments. Une **p -liste** d'éléments de E , notée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E$, est un élément de E^p (c'est-à-dire un p -uplet d'éléments de E).

Dans une p -liste de E les éléments ne sont pas nécessairement distincts, mais le rang des éléments dans la p -liste est important.

p -listes**Définition 1**

Soient n et p deux entiers strictement positifs, E un ensemble à n éléments. Une **p -liste** d'éléments de E , notée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E$, est un élément de E^p (c'est-à-dire un p -uplet d'éléments de E).

Dans une p -liste de E les éléments ne sont pas nécessairement distincts, mais le rang des éléments dans la p -liste est important.

Proposition 1

Le nombre de p -listes d'un ensemble E à n éléments est $\text{card}(E^p) = n^p$.

p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements

Définition 2

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p -liste d'éléments distincts de E** ou **p -arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements

Définition 2

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p -liste d'éléments distincts de E** ou **p -arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Dans un p -arrangement d'éléments de E , les éléments sont tous distincts, et le rang des éléments dans la p -liste est important.

p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements**Définition 2**

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p-liste d'éléments distincts de E** ou **p-arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Dans un p -arrangement d'éléments de E , les éléments sont tous distincts, et le rang des éléments dans la p -liste est important.

Proposition 2

Si $\text{card } E = n$, le nombre des p -listes d'éléments distincts de E est le nombre noté A_n^p :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements

Définition 2

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p -liste d'éléments distincts de E** ou **p -arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Dans un p -arrangement d'éléments de E , les éléments sont tous distincts, et le rang des éléments dans la p -liste est important.

Proposition 2

Si $\text{card } E = n$, le nombre des p -listes d'éléments distincts de E est le nombre noté A_n^p :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Définition 3

Une **permutation** de E (de cardinal n) est une n -liste d'éléments distincts de E .

p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements

Définition 2

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p -liste d'éléments distincts de E** ou **p -arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Dans un p -arrangement d'éléments de E , les éléments sont tous distincts, et le rang des éléments dans la p -liste est important.

Proposition 2

Si $\text{card } E = n$, le nombre des p -listes d'éléments distincts de E est le nombre noté A_n^p :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Définition 3

Une **permutation** de E (de cardinal n) est une n -liste d'éléments distincts de E .

Proposition 3

Le nombre des permutations de E (de cardinal n) est : $A_n^n = n!$.

C'est aussi le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal n .

Parties d'un ensemble

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Parties d'un ensemble

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Définition 4

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.

Parties d'un ensemble

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Définition 4

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance.

Parties d'un ensemble

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Définition 4

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance.

Proposition 5

Si $\text{card } E = n$, le nombre de combinaisons à p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ et l'on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Parties d'un ensemble

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Définition 4

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance.

Proposition 5

Si $\text{card } E = n$, le nombre de combinaisons à p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ et l'on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Remarques :

- On posera $\binom{0}{0} = 1$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Si $p < 0$ ou $p > n$ on posera $\binom{n}{p} = 0$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles (ou démonstration combinatoire en considérant le complémentaire de chaque combinaison).

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on dénombre le nombre d'équipes de k joueurs dans un ensemble de n joueurs, une équipe devant comporter un capitaine.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on dénombre le nombre d'équipes de k joueurs dans un ensemble de n joueurs, une équipe devant comporter un capitaine.

On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis choisir le capitaine après coup (k possibilités),

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on dénombre le nombre d'équipes de k joueurs dans un ensemble de n joueurs, une équipe devant comporter un capitaine.

On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis choisir le capitaine après coup (k possibilités), ou bien choisir d'abord le capitaine (n possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les $k-1$ autres membres ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités).

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on dénombre le nombre d'équipes de k joueurs dans un ensemble de n joueurs, une équipe devant comporter un capitaine.

On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis choisir le capitaine après coup (k possibilités), ou bien choisir d'abord le capitaine (n possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les $k-1$ autres membres ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités).

C'est pour cela que cette formule s'appelle parfois « formule du capitaine ».

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration

On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on fixe un élément $a \in \llbracket 1; n \rrbracket$, puis on considère les parties à k éléments : une telle partie contient a ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités) ou ne le contient pas ($\binom{n-1}{k}$ possibilités), et les deux cas s'excluent mutuellement.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, c'est quasi immédiat.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, c'est quasi immédiat.

Ou bien écrire : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, puis télescopage.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, c'est quasi immédiat.

Ou bien écrire : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, puis télescopage.

La formule s'appelle aussi parfois « formule de la gouttière » (voir schéma au tableau).

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, classique.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, classique.

Plus astucieusement, on peut développer fictivement le produit $(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$ et compter le nombre de termes en $a^k b^{n-k}$ dans les deux membres de l'égalité.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Formule de Vandermonde : pour $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Formule de Vandermonde : pour $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$.

Démonstration

On considère les termes en x^k dans le développement de $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$.

Quelques propriétés des coefficients binomiaux

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Formule de Vandermonde : pour $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$.
- Cas particulier : $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

Réciproquement, à toute p -liste $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de F_n , correspond une et une seule application de E_p dans F_n définie par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i . D'où les résultats :

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

Réciproquement, à toute p -liste $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de F_n , correspond une et une seule application de E_p dans F_n définie par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i . D'où les résultats :

Proposition 6

- Nombre d'applications de E_p dans F_n : n^p .

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

Réciproquement, à toute p -liste $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de F_n , correspond une et une seule application de E_p dans F_n définie par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i . D'où les résultats :

Proposition 6

- Nombre d'applications de E_p dans F_n : n^p .
- Nombre d'injections de E_p dans F_n : $(n \geq p) : A_n^p$

Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n .

Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n .

A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

Réciproquement, à toute p -liste $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de F_n , correspond une et une seule application de E_p dans F_n définie par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i . D'où les résultats :

Proposition 6

- Nombre d'applications de E_p dans F_n : n^p .
- Nombre d'injections de E_p dans F_n : $(n \geq p) : A_n^p$
- Nombre de bijections de E_n dans F_n ($n = p$) : $A_n^n = n!$.

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques :

- ❶ Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques :

- ❶ Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- ❷ Dans le cas où E et F sont finis, ils sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques :

- ❶ Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- ❷ Dans le cas où E et F sont finis, ils sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Définition 6

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques :

- ❶ Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- ❷ Dans le cas où E et F sont finis, ils sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Définition 6

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Remarque :

Un ensemble E est dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

où les x_n sont deux à deux distincts.

Définition 5

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques :

- ❶ Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- ❷ Dans le cas où E et F sont finis, ils sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Définition 6

Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Remarque :

Un ensemble E est dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

où les x_n sont deux à deux distincts.

En effet, si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E , les x_n sont tout simplement les $\varphi(n)$.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .
Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

- φ est strictement croissante car par construction $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; elle est donc injective.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

- φ est strictement croissante car par construction $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; elle est donc injective.
- φ est surjective : en effet, soit $y \in P$; si, par l'absurde, y n'avait pas d'antécédent par φ , on aurait $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq y$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$ donc par définition de φ , $y \geq \varphi(n+1)$. y serait ainsi un majorant d'une partie infinie de $\mathbb{N}$, c'est impossible.

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

- φ est strictement croissante car par construction $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; elle est donc injective.
- φ est surjective : en effet, soit $y \in P$; si, par l'absurde, y n'avait pas d'antécédent par φ , on aurait $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq y$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$ donc par définition de φ , $y \geq \varphi(n+1)$. y serait ainsi un majorant d'une partie infinie de $\mathbb{N}$, c'est impossible.

Si maintenant f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P on a évidemment $f(0) = p_0$, et une récurrence facile montre que $f(n) = p_n$ pour tout entier n , ce qui démontre l'unicité de f .

Théorème 1

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

Démonstration

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante.

Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément etc..

Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

- φ est strictement croissante car par construction $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; elle est donc injective.
- φ est surjective : en effet, soit $y \in P$; si, par l'absurde, y n'avait pas d'antécédent par φ , on aurait $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq y$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$ donc par définition de φ , $y \geq \varphi(n+1)$. y serait ainsi un majorant d'une partie infinie de $\mathbb{N}$, c'est impossible.

Si maintenant f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P on a évidemment $f(0) = p_0$, et une récurrence facile montre que $f(n) = p_n$ pour tout entier n , ce qui démontre l'unicité de f .

Corollaire:

| Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Remarque :

E est au plus dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\} \quad \text{où } I \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ et où les } x_i \text{ sont deux à deux distincts..}$$

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Remarque :

E est au plus dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\} \quad \text{où } I \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ et où les } x_i \text{ sont deux à deux distincts..}$$

Proposition 7

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Remarque :

E est au plus dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\} \quad \text{où } I \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ et où les } x_i \text{ sont deux à deux distincts..}$$

Proposition 7

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Il suffit de numéroter les entiers positifs à l'aide des entiers naturels pairs et les entiers négatifs à l'aide des entiers naturels impairs.

Définition 7

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Remarque :

E est au plus dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\} \quad \text{où } I \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ et où les } x_i \text{ sont deux à deux distincts..}$$

Proposition 7

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Il suffit de numéroter les entiers positifs à l'aide des entiers naturels pairs et les entiers négatifs à l'aide des entiers naturels impairs. De façon précise l'application

$$f: n \mapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ (vérification aisée).

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0$, $x + y = 1$, $\dots$, $x + y = k$, $\dots$

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases} .$$

(fonction de couplage de Cantor).

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases} .$$

(fonction de couplage de Cantor).

Montrons que φ est bien bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases} .$$

(fonction de couplage de Cantor).

Montrons que φ est bien bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

Notons $s_k = 0 + 1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. La suite (s_k) étant strictement croissante de 0 à $+\infty$, il existe un et un seul entier p tel que $s_p \leq N < s_{p+1}$.

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases} .$$

(fonction de couplage de Cantor).

Montrons que φ est bien bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

Notons $s_k = 0 + 1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. La suite (s_k) étant strictement croissante de 0 à $+\infty$, il existe un et un seul entier p tel que $s_p \leq N < s_{p+1}$.

Posons alors $n = N - s_p$ et $m = p - n$. On a $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ et $n = N - s_p < s_{p+1} - s_p = p + 1$ donc $n \leq p$ et $m \geq 0$.

Proposition 8

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases} .$$

(fonction de couplage de Cantor).

Montrons que φ est bien bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

Notons $s_k = 0 + 1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. La suite (s_k) étant strictement croissante de 0 à $+\infty$, il existe un et un seul entier p tel que $s_p \leq N < s_{p+1}$.

Posons alors $n = N - s_p$ et $m = p - n$. On a $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ et $n = N - s_p < s_{p+1} - s_p = p + 1$ donc $n \leq p$ et $m \geq 0$.

Ainsi $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $f(n, m) = n + s_{n+m} = n + s_p = N$, donc (n, m) est un antécédent de N : f est surjective.

Démonstration (suite)

- Si $N = f(n, m)$ on a $N = s_{n+m} + n$ donc si l'on pose $p = n + m$ on a $s_p \leq N$ et $N < s_{n+m} + n + m + 1 = s_{p+1}$ donc p est l'unique entier défini précédemment, d'où aussi l'unicité de $n = N - s_p$ et de $m : f$ est donc injective.

Démonstration (suite)

- Si $N = f(n, m)$ on a $N = s_{n+m} + n$ donc si l'on pose $p = n + m$ on a $s_p \leq N$ et $N < s_{n+m} + n + m + 1 = s_{p+1}$ donc p est l'unique entier défini précédemment, d'où aussi l'unicité de $n = N - s_p$ et de $m : f$ est donc injective.

Remarque : Une autre bijection possible est : $\varphi(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1 : \varphi(n, m) = N$ équivaut à dire que n est l'exposant de 2 dans la décomposition de $N + 1$ en facteurs premiers, d'où son existence et unicité, puis $2m + 1 = (N + 1)/2^n$.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f: \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.
 $(n, m) \mapsto (\varphi(n), \psi(m))$

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.
$$(n, m) \mapsto (\varphi(n), \psi(m))$$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.

$$(n, m) \longmapsto (\varphi(n), \psi(m))$$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Proposition 9

S'il existe une **surjection** $f : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est au plus dénombrable.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.

$$(n, m) \longmapsto (\varphi(n), \psi(m))$$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Proposition 9

S'il existe une **surjection** $f : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est au plus dénombrable.

Démonstration

Pour tout $x \in E$ l'ensemble de ses antécédents $f^{-1}(\{x\})$ est non vide, donc il existe (au moins) un entier n_x tel que $f(n_x) = x$. Soit F l'ensemble $\{n_x, x \in E\}$. La restriction de f à F est une bijection de F sur E , avec F partie de $\mathbb{N}$, d'où le résultat.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.
 $(n, m) \mapsto (\varphi(n), \psi(m))$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Proposition 9

S'il existe une **surjection** $f : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est au plus dénombrable.

Démonstration

Pour tout $x \in E$ l'ensemble de ses antécédents $f^{-1}(\{x\})$ est non vide, donc il existe (au moins) un entier n_x tel que $f(n_x) = x$. Soit F l'ensemble $\{n_x, x \in E\}$. La restriction de f à F est une bijection de F sur E , avec F partie de $\mathbb{N}$, d'où le résultat.

Corollaire:

| $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Théorème 2

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

Démonstration

En effet, si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto E$ et $\psi : \mathbb{N} \mapsto F$ sont bijectives, l'application $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow E \times F$ l'est aussi.

$$(n, m) \longmapsto (\varphi(n), \psi(m))$$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Proposition 9

S'il existe une **surjection** $f : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est au plus dénombrable.

Démonstration

Pour tout $x \in E$ l'ensemble de ses antécédents $f^{-1}(\{x\})$ est non vide, donc il existe (au moins) un entier n_x tel que $f(n_x) = x$. Soit F l'ensemble $\{n_x, x \in E\}$. La restriction de f à F est une bijection de F sur E , avec F partie de $\mathbb{N}$, d'où le résultat.

Corollaire:

| $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration

car l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ qui à tout couple (p, q) associe $\frac{p}{q}$ est surjective, et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Considérons $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}$.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Considérons $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}$. Alors puisque f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = f(a)$.

Mais :

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Considérons $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}$. Alors puisque f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = f(a)$.

Mais :

- si $a \in A$, alors $a \notin f(a) = A$: absurde.

Théorème 3

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: Théorème de Cantor - 1891

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Considérons $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}$. Alors puisque f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = f(a)$.

Mais :

- si $a \in A$, alors $a \notin f(a) = A$: absurde.
- si $a \notin A = f(a)$ alors $a \in A$ par définition : absurde !

Problème...

Corollaire:

└ L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Supposons qu'il le soit, donc que $E = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Supposons qu'il le soit, donc que $E = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On peut alors définir une suite u par : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = 1 - f_n(n)$.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Supposons qu'il le soit, donc que $E = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On peut alors définir une suite u par : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = 1 - f_n(n)$. Il est clair que la suite u ne peut pas être égale à l'une des f_n , donc contradiction.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0 ; 1[$ ne l'est pas.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On sait que chaque réel $x_n \in [0; 1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$ où les $d_{n,k} \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ sont les décimales de x_n et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On sait que chaque réel $x_n \in [0; 1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$ où les $d_{n,k} \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ sont les décimales de x_n et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$x_0 = 0, \mathbf{d_{0,1}} d_{0,2} d_{0,3} d_{0,4} d_{0,5} \dots$$

$$x_1 = 0, d_{1,1} \mathbf{d_{1,2}} d_{1,3} d_{1,4} d_{1,5} \dots$$

$$x_2 = 0, d_{2,1} d_{2,2} \mathbf{d_{2,3}} d_{2,4} d_{2,5} \dots$$

$$x_3 = 0, d_{3,1} d_{3,2} d_{3,3} \mathbf{d_{3,4}} d_{3,5} \dots \quad \dots$$

Corollaire:

└ L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On sait que chaque réel $x_n \in [0; 1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$ où les $d_{n,k} \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ sont les décimales de x_n et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \mathbf{d}_{0,1} d_{0,2} d_{0,3} d_{0,4} d_{0,5} \dots \\ x_1 &= 0, d_{1,1} \mathbf{d}_{1,2} d_{1,3} d_{1,4} d_{1,5} \dots \\ x_2 &= 0, d_{2,1} d_{2,2} \mathbf{d}_{2,3} d_{2,4} d_{2,5} \dots \\ x_3 &= 0, d_{3,1} d_{3,2} d_{3,3} \mathbf{d}_{3,4} d_{3,5} \dots \quad \dots \end{aligned}$$

On considère alors le nombre $x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ où $c_1, c_2, c_3, \dots$ sont des chiffres éléments de $\llbracket 0; 8 \rrbracket$ tels que $c_n \neq d_{n-1,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (procédé diagonal de Cantor).

Corollaire:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas. Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On sait que chaque réel $x_n \in [0; 1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$ où les $d_{n,k} \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ sont les décimales de x_n et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \mathbf{d_{0,1}} d_{0,2} d_{0,3} d_{0,4} d_{0,5} \dots \\ x_1 &= 0, d_{1,1} \mathbf{d_{1,2}} d_{1,3} d_{1,4} d_{1,5} \dots \\ x_2 &= 0, d_{2,1} d_{2,2} \mathbf{d_{2,3}} d_{2,4} d_{2,5} \dots \\ x_3 &= 0, d_{3,1} d_{3,2} d_{3,3} \mathbf{d_{3,4}} d_{3,5} \dots \quad \dots \end{aligned}$$

On considère alors le nombre $x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ où $c_1, c_2, c_3, \dots$ sont des chiffres éléments de $\llbracket 0; 8 \rrbracket$ tels que $c_n \neq d_{n-1,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (procédé diagonal de Cantor).

Alors $x \in [0; 1[$ et ne peut être égal à l'un des x_n , contradiction.

FAMILLES SOMMABLES

Famille sommable de réels positifs

Définition 8

Soit I un ensemble **dénombrable** d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M \quad \text{pour toute partie finie } J \text{ incluse dans } I.$$

Famille sommable de réels positifs

Définition 8

Soit I un ensemble **dénombrable** d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M \quad \text{pour toute partie finie } J \text{ incluse dans } I.$$

Dans ces conditions la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} u_i$ J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Famille sommable de réels positifs

Définition 8

Soit I un ensemble **dénombrable** d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M \quad \text{pour toute partie finie } J \text{ incluse dans } I.$$

Dans ces conditions la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} u_i$ (J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I) est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Si la famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on écrira : $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. Dire qu'une famille de réels positifs est sommable s'écrit donc : $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Familie sommable de réels positifs

Définition 8

Soit I un ensemble **dénombrable** d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M \quad \text{pour toute partie finie } J \text{ incluse dans } I.$$

Dans ces conditions la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} u_i$ J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Si la famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on écrira : $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. Dire qu'une famille de réels positifs est sommable s'écrit donc : $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition 10

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres réels positifs.

Si $u_i \leq v_i$ pour tout i et si la famille (v_i) est sommable, alors la famille (u_i) l'est et l'on a : $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Familie sommable de réels positifs

Définition 8

Soit I un ensemble **dénombrable** d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M \quad \text{pour toute partie finie } J \text{ incluse dans } I.$$

Dans ces conditions la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} u_i$ (J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I) est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Si la famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on écrira : $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. Dire qu'une famille de réels positifs est sommable s'écrit donc : $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition 10

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres réels positifs.

Si $u_i \leq v_i$ pour tout i et si la famille (v_i) est sommable, alors la famille (u_i) l'est et l'on a : $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Démonstration

C'est immédiat, car si les sommes $\sum_{i \in J} v_i$ (J partie finie de I) sont majorées, il en est de même des sommes $\sum_{i \in J} u_i$.

Considérons le cas particulier d'une famille de réels positifs indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est-à-dire le cas d'une suite de réels positifs. On retrouve alors une notion familière.

Considérons le cas particulier d'une famille de réels positifs indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est-à-dire le cas d'une suite de réels positifs. On retrouve alors une notion familière.

Proposition 11

Pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels **positifs** soit sommable, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit convergente. Et on a alors, avec la notation précédente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

Considérons le cas particulier d'une famille de réels positifs indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est-à-dire le cas d'une suite de réels positifs. On retrouve alors une notion familière.

Proposition 11

Pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels **positifs** soit sommable, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit convergente. Et on a alors, avec la notation précédente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

Démonstration

C'est presque immédiat, puisque les sommes partielles de la série s'écrivent $\sum_{i \in J_n} u_i$ avec $J_n = \llbracket 0 ; n \rrbracket$ partie finie de $\mathbb{N}$, et que toute partie finie J de $\mathbb{N}$ est incluse dans un des J_n .

Famille sommable de nombres complexes

Définition 9

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

Famille sommable de nombres complexes

Définition 9

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

- Considérons d'abord le cas d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels.

Famille sommable de nombres complexes

Définition 9

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

- Considérons d'abord le cas d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels.

Rappelons que, pour tout nombre réel x , on pose

$$x^+ = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

de sorte que x^+ et x^- sont des réels positifs tels que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Familie sommable de nombres complexes

Définition 9

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

- Considérons d'abord le cas d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels.

Rappelons que, pour tout nombre réel x , on pose

$$x^+ = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

de sorte que x^+ et x^- sont des réels positifs tels que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 12

Pour que la famille de nombres réels $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels positifs $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

Familie sommable de nombres complexes

Définition 9

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

- Considérons d'abord le cas d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels.

Rappelons que, pour tout nombre réel x , on pose

$$x^+ = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

de sorte que x^+ et x^- sont des réels positifs tels que $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 12

Pour que la famille de nombres réels $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels positifs $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

Démonstration

En effet, si les $\sum_{i \in J} |u_i|$ (J partie finie de $\mathbb{N}$) sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} u_i^+$ et $\sum_{i \in J} u_i^-$ car u_i^+ et u_i^- sont inférieurs à $|u_i|$.

Et si les sommes $\sum_{i \in J} u_i^+$ et $\sum_{i \in J} u_i^-$ sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |u_i|$ car $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

Démonstration

En effet, si les $\sum_{i \in J} |u_i|$ (J partie finie de $\mathbb{N}$) sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |\operatorname{Re}(u_i)|$ et $\sum_{i \in J} |\operatorname{Im}(u_i)|$ car $|\operatorname{Re}(u_i)|$ et $|\operatorname{Im}(u_i)|$ sont inférieurs à $|u_i|$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

Démonstration

En effet, si les $\sum_{i \in J} |u_i|$ (J partie finie de $\mathbb{N}$) sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |\operatorname{Re}(u_i)|$ et $\sum_{i \in J} |\operatorname{Im}(u_i)|$ car $|\operatorname{Re}(u_i)|$ et $|\operatorname{Im}(u_i)|$ sont inférieurs à $|u_i|$.

Et si les sommes $\sum_{i \in J} |\operatorname{Re}(u_i)|$ et $\sum_{i \in J} |\operatorname{Im}(u_i)|$ sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |u_i|$ car $|u_i| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_i)^2 + \operatorname{Im}(u_i)^2} \leq |\operatorname{Re}(u_i)| + |\operatorname{Im}(u_i)|$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on a le résultat suivant :

Proposition 14

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et, dans ce cas, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right).$$

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on a le résultat suivant :

Proposition 14

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et, dans ce cas, on a
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

En effet, dire que la suite (u_n) est sommable équivaut à dire que la suite à termes réels positifs $(|u_n|)$ l'est, ce qui équivaut, on l'a vu, à la convergence de $\sum_n |u_n|$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Proposition 13

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on a le résultat suivant :

Proposition 14

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et, dans ce cas, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration

En effet, dire que la suite (u_n) est sommable équivaut à dire que la suite à termes réels positifs $(|u_n|)$ l'est, ce qui équivaut, on l'a vu, à la convergence de $\sum_n |u_n|$.

L'égalité des sommes se démontre d'abord pour les séries à termes réels en utilisant u_n^+ et u_n^- , et pour celles à termes complexes, en utilisant les parties réelle et imaginaire.

Théorème 7: Commutativité généralisée

Pour qu'une famille dénombrable $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes soit sommable, il faut et il suffit que pour une/toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur I la série de terme général $u_{\varphi(n)}$ soit absolument convergente. Et dans ce cas l'on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

(la somme ne dépendant pas de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ choisie).

Théorème 7: Commutativité généralisée

Pour qu'une famille dénombrable $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes soit sommable, il faut et il suffit que pour une/toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur I la série de terme général $u_{\varphi(n)}$ soit absolument convergente. Et dans ce cas l'on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

(la somme ne dépendant pas de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ choisie).

Théorème 8: Associativité généralisée, ou sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de nombres complexes, et soit $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I . Les p.s.s.e :

- a) la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ;
- b) chaque famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable et, si l'on pose $S_k = \sum_{i \in I_k} u_i$ pour tout $k \in K$, la famille $(S_k)_{k \in K}$ est sommable.

Et, dans ce cas, on a :

$$\sum_{k \in K} S_k = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i .$$

On considère ici deux ensembles dénombrables I et J , et une famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ de nombres complexes.

Théorème 9: de Fubini

Pour que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable il faut et il suffit que :

- pour tout j fixé dans J , la famille $(u_{i,j})_{i \in I}$ est sommable ;
- et la famille $(S_j)_{j \in J}$, où $S_j = \sum_{i \in I} u_{i,j}$, est sommable.

Dans ces conditions :

- pour tout i fixé dans I , la famille $(u_{i,j})_{j \in J}$ est sommable ;
- la famille $(S'_i)_{i \in I}$, où $S'_i = \sum_{j \in J} u_{i,j}$, est sommable ;
- et on a les égalités :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

On a le cas particulier intéressant suivant :

Proposition 15

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

On a le cas particulier intéressant suivant :

Proposition 15

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Quelques remarques

En ce qui concerne les paragraphes sur la dénombrabilité et les familles sommables, je cite quelques extraits du programme :

On a le cas particulier intéressant suivant :

Proposition 15

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Quelques remarques

En ce qui concerne les paragraphes sur la dénombrabilité et les familles sommables, je cite quelques extraits du programme :

- Il s'agit de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis et directement utilisés.

On a le cas particulier intéressant suivant :

Proposition 15

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Quelques remarques

En ce qui concerne les paragraphes sur la dénombrabilité et les familles sommables, je cite quelques extraits du programme :

- Il s'agit de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis et directement utilisés.
- Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

On a le cas particulier intéressant suivant :

Proposition 15

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Quelques remarques

En ce qui concerne les paragraphes sur la dénombrabilité et les familles sommables, je cite quelques extraits du programme :

- Il s'agit de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis et directement utilisés.
- Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.
- Dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

ESPACES PROBABILISÉS

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. Ici l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. Ici l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
- Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0 ; 1]$.

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. Ici l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
- Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0 ; 1]$.
- Lorsqu'on lance une pièce une infinité de fois et que l'on regarde la suite des résultats l'univers est $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\{P, F\}$).

Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. Ici l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
- Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0 ; 1]$.
- Lorsqu'on lance une pièce une infinité de fois et que l'on regarde la suite des résultats l'univers est $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\{P, F\}$).

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits peuvent ou non se produire : on les appellera des **événements**. Ce que l'on veut, c'est mesurer la « chance » qu'un tel événement se produise : c'est sa probabilité.

Introduction

Dans le cas où l'ensemble Ω est de cardinal fini, la notion de probabilité est intuitivement facile à définir : les évènements seront simplement les parties de Ω , et la probabilité d'un tel évènement A sera simplement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Introduction

Dans le cas où l'ensemble Ω est de cardinal fini, la notion de probabilité est intuitivement facile à définir : les évènements seront simplement les parties de Ω , et la probabilité d'un tel évènement A sera simplement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots$

Introduction

Dans le cas où l'ensemble Ω est de cardinal fini, la notion de probabilité est intuitivement facile à définir : les évènements seront simplement les parties de Ω , et la probabilité d'un tel évènement A sera simplement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots$

Cette définition n'a évidemment plus aucun sens lorsque l'ensemble Ω est infini. De plus, dans ce cas, certains évènements ne sont guère mesurables : par exemple, si l'on tire un nombre x au hasard entre 0 et 1, il semble normal de dire que la probabilité de l'évènement « x est compris entre 0.5 et 0.6 » est $\frac{1}{10}$, mais plus difficile de mesurer la probabilité d'évènements comme « x est irrationnel » ou bien « tous les chiffres dans l'écriture décimale de x sont inférieurs à 5 ».... On peut d'ailleurs, finalement, se demander : « qu'est-ce qu'un évènement ? »

Introduction

Dans le cas où l'ensemble Ω est de cardinal fini, la notion de probabilité est intuitivement facile à définir : les évènements seront simplement les parties de Ω , et la probabilité d'un tel évènement A sera simplement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots$

Cette définition n'a évidemment plus aucun sens lorsque l'ensemble Ω est infini. De plus, dans ce cas, certains évènements ne sont guère mesurables : par exemple, si l'on tire un nombre x au hasard entre 0 et 1, il semble normal de dire que la probabilité de l'évènement « x est compris entre 0.5 et 0.6 » est $\frac{1}{10}$, mais plus difficile de mesurer la probabilité d'évènements comme « x est irrationnel » ou bien « tous les chiffres dans l'écriture décimale de x sont inférieurs à 5 ».... On peut d'ailleurs, finalement, se demander : « qu'est-ce qu'un évènement ? »

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on peut toujours choisir $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble de tous les évènements ; cela n'est pas toujours possible si Ω n'est pas dénombrable. Cela conduit donc à la définition suivante, qui fournit un cadre adapté à l'étude des probabilités (c'est le mathématicien russe Kolmogorov (1902-1987) qui a formalisé toutes ces notions).

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

- ❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ❷ Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω);

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

- ❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ❷ Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω);
- ❸ Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

- ❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ❷ Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω);
- ❸ Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des **événements**

Espace probabilisable

Définition 10

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω . On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une **σ -algèbre** de parties de Ω si :

- ❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ❷ Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω) ;
- ❸ Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des **événements**

Définition 11

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω . Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace probabilisable**.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .

❷ Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

- ❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

- ❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .
- ❷ Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon.
Pour l'intersection, on passe au complémentaire.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .

❷ Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon.

Pour l'intersection, on passe au complémentaire.

Remarque :

Dans le cas où Ω est au plus dénombrable, il est naturel de considérer que chaque singleton est un évènement.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

- ❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

- ❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .
- ❷ Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon.
Pour l'intersection, on passe au complémentaire.

Remarque :

Dans le cas où Ω est au plus dénombrable, il est naturel de considérer que chaque singleton est un évènement.

Toute partie A de Ω est alors la réunion dénombrable d'évènements élémentaires, donc est aussi un évènement d'après la proposition précédente.

Proposition 16

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

❶ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

❷ Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration

❶ car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .

❷ Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon.

Pour l'intersection, on passe au complémentaire.

Remarque :

Dans le cas où Ω est au plus dénombrable, il est naturel de considérer que chaque singleton est un évènement.

Toute partie A de Ω est alors la réunion dénombrable d'évènements élémentaires, donc est aussi un évènement d'après la proposition précédente.

Dans ce cas, la tribu considérée sur Ω sera donc $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier.

Un peu de vocabulaire :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire ω	singleton $\{\omega\}$
événement contraire de A : $\bar{A}$	complémentaire de A dans Ω
événement A ou B	$A \cup B$
événement A et B	$A \cap B$
les événements A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A implique B	$A \subset B$
système complet d'événements	partition

Un peu de vocabulaire :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire ω	singleton $\{\omega\}$
événement contraire de A : $\bar{A}$	complémentaire de A dans Ω
événement A ou B	$A \cup B$
événement A et B	$A \cap B$
les événements A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A implique B	$A \subset B$
système complet d'événements	partition

Rappel : Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de Ω s'appelle une partition de Ω si :

- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (les ensembles sont deux à deux disjoints);
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

- ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles** (disjoints) alors :

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

- ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles** (disjoints) alors :
 - la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge ;

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

- ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles** (disjoints) alors :
 - la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge ;
 - et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -additivité).

Espace probabilisé

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

- ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements **deux à deux incompatibles** (disjoints) alors :
 - la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge ;
 - et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -additivité).

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❺ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❺ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❻ Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (croissance).

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❺ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❻ Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (croissance).
- ❼ Si $(A_i)_{i \in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) est un système complet d'événements, $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❺ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❻ Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (croissance).
- ❼ Si $(A_i)_{i \in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) est un système complet d'événements, $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Démonstration

La propriété 1 s'obtient en appliquant la σ -additivité à la suite (A_n) où $A_n = \emptyset$ pour tout n : puisque la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et que tous les $\mathbb{P}(A_n)$ sont égaux à $\mathbb{P}(\emptyset)$, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Proposition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

- ❶ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ❷ Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- ❸ $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ❹ Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❺ $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ❻ Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (croissance).
- ❼ Si $(A_i)_{i \in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) est un système complet d'événements, $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Démonstration

La propriété 1 s'obtient en appliquant la σ -additivité à la suite (A_n) où $A_n = \emptyset$ pour tout n : puisque la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et que tous les $\mathbb{P}(A_n)$ sont égaux à $\mathbb{P}(\emptyset)$, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Tout découle ensuite de la propriété 2, qui se démontre à partir de la définition en prenant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

① Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

- ❶ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

- ❶ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Démonstration

On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour tout entier k non nul.

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

- ❶ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Démonstration

On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour tout entier k non nul.

Si $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a aussi $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

- ❶ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Démonstration

On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour tout entier k non nul.

Si $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a aussi $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. De plus les événements B_k sont deux à deux incompatibles donc

d'après la σ -additivité, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$.

Théorème 10

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

- ❶ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

- ❷ Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Démonstration

On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour tout entier k non nul.

Si $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a aussi $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. De plus les événements B_k sont deux à deux incompatibles donc

d'après la σ -additivité, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$. Or $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})$, donc on a une suite télescopique on en déduit le résultat.

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la lère propriété,

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la 1ère propriété, et à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$, qui est une suite décroissante d'événements pour la 2ème propriété

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la 1ère propriété, et à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$, qui est une suite décroissante d'événements pour la 2ème propriété

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$ (sous-additivité finie)

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la 1ère propriété, et à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$, qui est une suite décroissante d'événements pour la 2ème propriété

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$ (sous-additivité finie)
- Plus généralement : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, cette dernière somme pouvant être $+\infty$ (sous-additivité).

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la 1ère propriété, et à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$, qui est une suite décroissante d'événements pour la 2ème propriété

Corollaire:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$ (sous-additivité finie)
- Plus généralement : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, cette dernière somme pouvant être $+\infty$ (sous-additivité).

Démonstration

Banale récurrence sur N pour la 1ère puis passage à la limite pour la 2ème, en utilisant le corollaire précédent.

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

$$\text{On a } \mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n}$$

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

$$\text{On a } \mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n} \text{ et } \mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}, \text{ soit } \mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}.$$

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

On a $\mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n}$ et $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}$, soit $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{3^n}(3 + 3 \cdot 2^n - 6) = 1 - 3 \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

On a $\mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n}$ et $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}$, soit $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{3^n}(3 + 3 \cdot 2^n - 6) = 1 - 3 \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

L'évènement $A =$ « avoir un tirage tricolore » est la réunion des A_n pour $n \geq 3$.

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

On a $\mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n}$ et $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}$, soit $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{3^n}(3 + 3 \cdot 2^n - 6) = 1 - 3 \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

L'événement $A =$ « avoir un tirage tricolore » est la réunion des A_n pour $n \geq 3$.

Or (A_n) est une suite croissante d'événements : en effet, $\omega \in A_n \implies \omega \in A_{n+1}$.

Exemple 1

Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

Solution

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

On a $\mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n}$ et $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}$, soit $\mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{3^n}(3 + 3 \cdot 2^n - 6) = 1 - 3 \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

L'événement $A =$ « avoir un tirage tricolore » est la réunion des A_n pour $n \geq 3$.

Or (A_n) est une suite croissante d'événements : en effet, $\omega \in A_n \implies \omega \in A_{n+1}$.

Donc par passage à la limite, par continuité croissante : $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante (en effet, $\omega \in A_{n+1} \implies \omega \in A_n$),

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante (en effet, $\omega \in A_{n+1} \implies \omega \in A_n$), et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = A$. Donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}$.

L'évènement A est donc de probabilité nulle !

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante (en effet, $\omega \in A_{n+1} \implies \omega \in A_n$), et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = A$. Donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}$.

L'évènement A est donc de probabilité nulle !

On voit donc ici la difficulté de la définition d'une probabilité sur un ensemble non dénombrable : chaque évènement élémentaire est de probabilité nulle, donc si, A est une partie de Ω , la probabilité de A n'est plus la somme des probabilités de ses éléments...

Exemple 2

On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)

Soit A l'évènement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'évènement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante (en effet, $\omega \in A_{n+1} \implies \omega \in A_n$), et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = A$. Donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}$.

L'évènement A est donc de probabilité nulle !

On voit donc ici la difficulté de la définition d'une probabilité sur un ensemble non dénombrable : chaque évènement élémentaire est de probabilité nulle, donc si, A est une partie de Ω , la probabilité de A n'est plus la somme des probabilités de ses éléments...

Définition 13

Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit **quasi-impossible** ou **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$ et **quasi-certain** ou **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Un système **quasi-complet** d'évènements est une famille $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, non vides, deux à deux incompatibles, telle que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$.

Définition d'une probabilité à l'aide des singletons

Proposition 18

Soit Ω un ensemble **dénombrable**, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Alors pour tout évènement $A = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on a :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

Définition d'une probabilité à l'aide des singletons

Proposition 18

Soit Ω un ensemble **dénombrable**, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Alors pour tout évènement $A = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on a : $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\})$.

Démonstration

Immédiat puisque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\omega_n\}$, réunion disjointe.

Définition d'une probabilité à l'aide des singletons

Proposition 18

Soit Ω un ensemble **dénombrable**, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Alors pour tout évènement $A = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on a :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

Remarque : La série $\sum \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est absolument convergente. On déduit alors du théorème de commutativité généralisé que la quantité $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est indépendante de l'ordre dans lequel on énumère les éléments de A (heureusement!), et l'on écrira plutôt :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Définition d'une probabilité à l'aide des singletons

Proposition 18

Soit Ω un ensemble **dénombrable**, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Alors pour tout évènement $A = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on a : $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\})$.

Remarque : La série $\sum \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est absolument convergente. On déduit alors du théorème de commutativité généralisé que la quantité $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est indépendante de l'ordre dans lequel on énumère les éléments de A (heureusement!), et l'on écrira plutôt :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Théorème II: Existence d'une probabilité sur un ensemble dénombrable (admis)

Soit Ω un ensemble **dénombrable**, $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **positifs** tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et I un ensemble au plus dénombrable.

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Démonstration

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Démonstration

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Pour tout événement A , $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Démonstration

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

• Pour tout événement A , $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.

• $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Démonstration

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Pour tout événement A , $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
- Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles.

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup A_n\right) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \bigcup A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)},$$

Définition

Théorème 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

Démonstration

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Pour tout événement A , $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
- Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles.

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup A_n\right) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \bigcup A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)},$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}_B\left(\bigcup A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}_B(A_n).$$

Remarques

- On peut déduire de la définition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.

Remarques

- On peut déduire de la définition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut aussi écrire $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ et donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.

Remarques

- On peut déduire de la définition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut aussi écrire $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ et donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, toutes les propriétés de la proposition 17 et du théorème 10 peuvent lui être appliquées (par exemple : $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$).

Remarques

- On peut déduire de la définition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut aussi écrire $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ et donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, toutes les propriétés de la proposition 17 et du théorème 10 peuvent lui être appliquées (par exemple : $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$).



Il est important de noter que $A | B$ **n'est PAS un évènement**. Cela n'a par exemple aucun sens d'écrire : $(A_1 | B) \cap (A_2 | B)$.

L'écriture $\mathbb{P}(A | B)$ est une simple notation pour $\mathbb{P}_B(A)$.

Remarques

- On peut déduire de la définition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut aussi écrire $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ et donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, toutes les propriétés de la proposition 17 et du théorème 10 peuvent lui être appliquées (par exemple : $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$).



Il est important de noter que $A | B$ **n'est PAS un évènement**. Cela n'a par exemple aucun sens d'écrire : $(A_1 | B) \cap (A_2 | B)$.

L'écriture $\mathbb{P}(A | B)$ est une simple notation pour $\mathbb{P}_B(A)$.

Remarque : pour éviter les problèmes inutiles lors de l'écriture de certaines formules (par exemple la formule des probabilités totales), on pose par convention :

$$\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B) = 0 \quad \text{lorsque } \mathbb{P}(B) = 0.$$

Formule des probabilités composées

Directement d'après la définition, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A | B)$.

Plus généralement :

Théorème 13

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

ou aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Formule des probabilités composées

Directement d'après la définition, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A | B)$.

Plus généralement :

Théorème 13

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

ou aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration

Déjà, tout ce qui est écrit a un sens puisque les probabilités des événements $A_1 \cap \dots \cap A_i$ sont non nulles, ces événements contenant $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$. Ensuite par récurrence sur n .

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Solution

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$.

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Solution

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$.

On trouve : $p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$.

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Solution

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$.

On trouve : $p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$.

Exemple 2

Une urne contient 6 boules blanches, 4 noires et 2 vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième verte et la troisième noire ?

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Solution

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$.

On trouve : $p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$.

Exemple 2

Une urne contient 6 boules blanches, 4 noires et 2 vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième verte et la troisième noire ?

Solution

On note les événements B_1 : « la première boule est blanche », V_2 : « la deuxième est verte » et N_3 : « la dernière est noire ».

Exemple 1

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

Solution

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$.

On trouve : $p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$.

Exemple 2

Une urne contient 6 boules blanches, 4 noires et 2 vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième verte et la troisième noire ?

Solution

On note les événements B_1 : « la première boule est blanche », V_2 : « la deuxième est verte » et N_3 : « la dernière est noire ». On calcule $\mathbb{P}(B_1 \cap V_2 \cap N_3)$ soit avec la formule : $p = \frac{6}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{10}$.

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Solution

On introduit les évènements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Solution

On introduit les évènements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».

On trouve : $p = \mathbb{P}(3 \text{ rouges}) + \mathbb{P}(3 \text{ noires}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$.

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Solution

On introduit les évènements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».

$$\text{On trouve : } p = \mathbb{P}(3 \text{ rouges}) + \mathbb{P}(3 \text{ noires}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}.$$

Exemple 4

Une urne contient n noires et 2 blanches, on tire les boules une à une et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k ième tirage ?

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Solution

On introduit les évènements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».

On trouve : $p = \mathbb{P}(3 \text{ rouges}) + \mathbb{P}(3 \text{ noires}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$.

Exemple 4

Une urne contient n noires et 2 blanches, on tire les boules une à une et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k ième tirage ?

Solution

On considère l'évènement A_i : « on tire une boule noire au i -ème tirage ». Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(\overline{A_k} \cap A_{k-1} \cap \dots \cap A_1)$.

Exemple 3

Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

Solution

On introduit les événements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».

$$\text{On trouve : } p = \mathbb{P}(3 \text{ rouges}) + \mathbb{P}(3 \text{ noires}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}.$$

Exemple 4

Une urne contient n noires et 2 blanches, on tire les boules une à une et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k ième tirage ?

Solution

On considère l'évènement A_i : « on tire une boule noire au i -ème tirage ». Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(\overline{A_k} \cap A_{k-1} \cap \dots \cap A_1)$.

$$\text{On obtient : } p = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}.$$

Formule des probabilités totales

Théorème 14

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

(lorsque I est infini dénombrable, cela sous-entend que la famille est sommable).

On peut interpréter cette formule en disant que B est un effet provenant de différentes causes A_i .

Formule des probabilités totales

Théorème 14

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

(lorsque I est infini dénombrable, cela sous-entend que la famille est sommable).

On peut interpréter cette formule en disant que B est un effet provenant de différentes causes A_i .

Démonstration

immédiate puisque $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, réunion disjointe (ce que l'on note aussi : $B = \bigsqcup_{i \in I} (B \cap A_i)$).

Formule des probabilités totales

Théorème 14

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

(lorsque I est infini dénombrable, cela sous-entend que la famille est sommable).

On peut interpréter cette formule en disant que B est un effet provenant de différentes causes A_i .

Démonstration

immédiate puisque $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, réunion disjointe (ce que l'on note aussi : $B = \bigsqcup_{i \in I} (B \cap A_i)$).

Un cas particulier important de la formule des probabilités totales est celui où l'on prend comme système complet d'événements un système de la forme $\{A, \bar{A}\}$. La formule s'écrit alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A}).$$

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ».

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ». D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D \mid M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D \mid M_C)\mathbb{P}(M_C)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2 = 3,7\%.$$

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ». D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D \mid M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D \mid M_C)\mathbb{P}(M_C)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2 = 3,7\%.$$

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Quelle est la probabilité qu'il retourne un as ?

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ». D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D \mid M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D \mid M_C)\mathbb{P}(M_C)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2 = 3,7\%.$$

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Quelle est la probabilité qu'il retourne un as ?

Solution

On prend ici les évènements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ».

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est ma probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ». D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D \mid M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D \mid M_C)\mathbb{P}(M_C)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2 = 3,7\%.$$

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Quelle est la probabilité qu'il retourne un as ?

Solution

On prend ici les évènements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ».

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A \mid \bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})$$

La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(A) = 1 \times p + (1 - p) \times \frac{4}{52} = \frac{12p + 1}{13}$ (on peut vérifier qu'on a bien $\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$!)

Exemple 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

Exemple 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

Solution

On introduit les évènements : A_n : « la n -ième personne reçoit l'information exacte ».

Exemple 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

Solution

On introduit les évènements : A_n : « la n -ième personne reçoit l'information exacte ».

Le système $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet ; donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(A_{n+1} | \overline{A_n})$$

Exemple 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

Solution

On introduit les évènements : A_n : « la n -ième personne reçoit l'information exacte ».

Le système $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet ; donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(A_{n+1} | \overline{A_n})$$

soit :

$$p_{n+1} = p_n \cdot p + (1 - p_n) \cdot (1 - p) = (2p - 1)p_n + 1 - p.$$

Exemple 3

N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

Solution

On introduit les évènements : A_n : « la n -ième personne reçoit l'information exacte ».

Le système $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet ; donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(A_{n+1} | \overline{A_n})$$

soit :

$$p_{n+1} = p_n \cdot p + (1 - p_n) \cdot (1 - p) = (2p - 1)p_n + 1 - p.$$

Suite arithmético-géométrique à savoir faire... La limite est $1/2$.

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'événements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'évènements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Démonstration

On considère $A = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. Alors A est quasi-impossible, et on applique le théorème précédent au système complet formé de A et des A_i .

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'événements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple

On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'événements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple

On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Solution

Soit B : « on tire une boule blanche » et A_n : « on obtient Pile pour la 1ère fois au n -ième coup » ($n \geq 1$).

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'évènements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout évènement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple

On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Solution

Soit B : « on tire une boule blanche » et A_n : « on obtient Pile pour la 1ère fois au n -ième coup » ($n \geq 1$). $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements (car on a vu dans un exemple précédent que l'évènement : « n'obtenir que des Face » est quasi-impossible.)

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'évènements :

Théorème 15

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout évènement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple

On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Solution

Soit B : « on tire une boule blanche » et A_n : « on obtient Pile pour la 1ère fois au n -ième coup » ($n \geq 1$). $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements (car on a vu dans un exemple précédent que l'évènement : « n'obtenir que des Face » est quasi-impossible.) Donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n) \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \ln 2.$$

Formule de Bayes

On a vu que, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

Formule de Bayes

On a vu que, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

Si maintenant on considère un système complet ou quasi-complet d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ (avec toujours I ensemble au plus dénombrable), et si A est l'un de ces évènements, soit $A = A_j$ pour un $j \in I$, la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement B donne :

Formule de Bayes

On a vu que, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

Si maintenant on considère un système complet ou quasi-complet d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ (avec toujours I ensemble au plus dénombrable), et si A est l'un de ces évènements, soit $A = A_j$ pour un $j \in I$, la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement B donne :

Théorème 16: Formule de Bayes

Soient $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'évènements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle. On a :

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B | A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)}$$

Cette formule s'appelle aussi **formule de probabilités des causes**.

Formule de Bayes

On a vu que, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

Si maintenant on considère un système complet ou quasi-complet d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ (avec toujours I ensemble au plus dénombrable), et si A est l'un de ces évènements, soit $A = A_j$ pour un $j \in I$, la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement B donne :

Théorème 16: Formule de Bayes

Soient $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'évènements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle. On a :

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B | A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)}$$

Cette formule s'appelle aussi **formule de probabilités des causes**.

Remarque : Cette formule est affreuse ! il vaut mieux retenir la formule $(*)$, beaucoup plus simple et qui est une conséquence directe de la définition d'une probabilité conditionnelle, et obtenir la valeur de $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriqués ; Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

On prend une pièce au hasard qui est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriqués ; Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

On prend une pièce au hasard qui est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ».

Les trois évènements M_A , M_B et M_C forment un système complet d'évènements.

Exemple 1

Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriqués ; Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

On prend une pièce au hasard qui est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Solution

On considère les évènements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'évènement D : « la pièce est défectueuse ».

Les trois évènements M_A , M_B et M_C forment un système complet d'évènements. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_A | D) &= \frac{\mathbb{P}(M_A)\mathbb{P}(D | M_A)}{\mathbb{P}(M_A)\mathbb{P}(D | M_A) + \mathbb{P}(M_B)\mathbb{P}(D | M_B) + \mathbb{P}(M_C)\mathbb{P}(D | M_C)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,03}{0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05} = \frac{1,5}{3,7}.\end{aligned}$$

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Il retourne un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Il retourne un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Solution

On prend ici les évènements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ».

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Il retourne un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Solution

On prend ici les évènements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ». D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{\mathbb{P}(A | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exemple 2

Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Il retourne un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Solution

On prend ici les événements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ». D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{\mathbb{P}(A | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)}$$

où $\mathbb{P}(A)$ a été calculé par la formule des probabilités totales. On avait trouvé $\mathbb{P}(A) = \frac{2p+1}{13}$ donc

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{13p}{12p+1}.$$

INDÉPENDANCE D'ÉVÈNEMENTS

Définition 14

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 14

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple

On lance un dé ; soit A l'événement : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « le résultat obtenu est pair ».

Définition 14

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple

On lance un dé ; soit A l'événement : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « le résultat obtenu est pair ».

En considérant les événements élémentaires équiprobables (dé parfait), on a $\mathbb{P}(A) = 2/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ donc les événements A et B sont indépendants.

Définition 14

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple

On lance un dé ; soit A l'événement : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « le résultat obtenu est pair ».

En considérant les événements élémentaires équiprobables (dé parfait), on a $\mathbb{P}(A) = 2/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ donc les événements A et B sont indépendants.

Par contre, si le dé est pipé avec la probabilité $\mathbb{P}(i) = i/21$ pour tout $1 \leq i \leq 6$, on a $\mathbb{P}(A) = 18/21$ et $\mathbb{P}(B) = 12/21$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 10/21$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Proposition 19

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B , A et $\bar{B}$ et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Définition 14

On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple

On lance un dé; soit A l'événement : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « le résultat obtenu est pair ».

En considérant les événements élémentaires équiprobables (dé parfait), on a $\mathbb{P}(A) = 2/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ donc les événements A et B sont indépendants.

Par contre, si le dé est pipé avec la probabilité $\mathbb{P}(i) = i/21$ pour tout $1 \leq i \leq 6$, on a $\mathbb{P}(A) = 18/21$ et $\mathbb{P}(B) = 12/21$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 10/21$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Proposition 19

Si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B , A et $\bar{B}$ et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Démonstration

Il suffit de calculer. Par exemple, puisque $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ (union disjointe), on a :

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B).$$

Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles »!





Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles »!

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.



Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles »!

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.



Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles »!

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.

Définition 15

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec $I \subset \mathbb{N}$, finie ou non).

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.



Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles »!

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.

Définition 15

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec $I \subset \mathbb{N}$, finie ou non).

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** ou tout simplement **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour **tout** ensemble fini d'indices $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.



Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.

Définition 15

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec $I \subset \mathbb{N}$, finie ou non).

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** ou tout simplement **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour **tout** ensemble fini d'indices $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 20

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants**, il en est de même de toute famille $(B_i)_{i \in I}$ où chaque B_i est égal à A_i ou à $\overline{A_i}$.



Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !

D'ailleurs, il est facile de vérifier que deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.

Définition 15

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec $I \subset \mathbb{N}$, finie ou non).

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** ou tout simplement **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour **tout** ensemble fini d'indices $J \subset I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 20

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants**, il en est de même de toute famille $(B_i)_{i \in I}$ où chaque B_i est égal à A_i ou à $\overline{A_i}$.

Démonstration

Compte tenu de la définition, il suffit de le démontrer pour toute sous-famille finie, et on procède alors par récurrence sur le cardinal de cette famille à l'aide de la proposition précédente.

Remarque

Il est clair que si des événements sont mutuellement indépendants, ils le sont deux à deux, mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Remarque

Il est clair que si des événements sont mutuellement indépendants, ils le sont deux à deux, mais la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant :

On lance deux dés parfaits. Soit A_1 : « le premier dé donne un nombre pair », A_2 : « le deuxième dé donne un nombre pair » et A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ».

Remarque

Il est clair que si des événements sont mutuellement indépendants, ils le sont deux à deux, mais la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant :

On lance deux dés parfaits. Soit A_1 : « le premier dé donne un nombre pair », A_2 : « le deuxième dé donne un nombre pair » et A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ».

Alors $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 1/2$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = 1/4$: les événements sont donc indépendants 2 à 2.

Remarque

Il est clair que si des événements sont mutuellement indépendants, ils le sont deux à deux, mais la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple suivant :

On lance deux dés parfaits. Soit A_1 : « le premier dé donne un nombre pair », A_2 : « le deuxième dé donne un nombre pair » et A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ».

Alors $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 1/2$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = 1/4$: les événements sont donc indépendants 2 à 2.

Mais $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8$ donc ils ne sont pas mutuellement indépendants.

FIN DU CHAPITRE XVII