

ESPACES PROBABILISÉS

I. Révisions : dénombrement

I.1. p -listes

Déf 1:

Soient n et p deux entiers strictement positifs, E un ensemble à n éléments. Une **p -liste** d'éléments de E , notée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_i \in E$, est un élément de E^p (c'est-à-dire un p -uplet d'éléments de E).

Dans une p -liste de E les éléments ne sont pas nécessairement distincts, mais le rang des éléments dans la p -liste est important.

Prop 1:

Le nombre de p -listes d'un ensemble E à n éléments est $\text{card}(E^p) = n^p$.

Exemples

- Un numéro de téléphone de 9 chiffres peut être considéré comme une 9-liste d'éléments de $\{0, \dots, 9\}$. Il y a donc 10^9 numéros de téléphone possibles.
- Nombre de façons de ranger trois objets distincts dans cinq tiroirs numérotés, chaque tiroir pouvant recevoir un, deux ou trois objets.
Un rangement possible est une 3-liste (x_1, x_2, x_3) d'éléments de $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ où x_i indique le tiroir dans lequel est rangé l'objet i . Il y a $5^3 = 125$ rangements possibles.

I.2. p -listes d'éléments distincts de E , ou arrangements

Déf 2:

Soient n et p deux entiers tels que $0 < p \leq n$ et E un ensemble à n éléments. Une **p -liste d'éléments distincts de E** ou **p -arrangement** est une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E telle que : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.

Dans un p -arrangement d'éléments de E , les éléments sont tous distincts, et le rang des éléments dans la p -liste est important.

Prop 2:

Si $\text{card } E = n$, le nombre des p -listes d'éléments distincts de E est le nombre noté A_n^p :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemples

- Un tiercé dans l'ordre pour une course de 15 chevaux est une 3-liste d'éléments distincts de $\llbracket 1; 15 \rrbracket$: il y a donc $A_{15}^3 = 2730$ tiercés possibles (on a supposé qu'il n'y a pas d'ex-aequo).
- Nombre de façons de ranger trois objets distincts dans cinq tiroirs numérotés, chaque tiroir ne pouvant recevoir qu'un objet.
On peut considérer qu'un rangement possible est une 3-liste (x_1, x_2, x_3) d'éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ où x_i indique le tiroir dans lequel on a rangé l'objet i . Il y a $A_5^3 = 60$ rangements possibles.
- Une assemblée de 20 personnes doit élire un bureau composé d'un président, d'un vice président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Il y a $A_{20}^4 = 116280$ bureaux possibles.
L'assemblée est composée de 15 hommes et 5 femmes.

Si le président et le trésorier doivent être des hommes et les deux autres des femmes : il y a $A_{15}^2 A_5^2 = 4200$ bureaux possibles. Si le président et le trésorier doivent être des femmes, il y a $A_5^2 A_{18}^2 = 6120$ bureaux possibles.

Déf 3:

➤ Une **permutation** de E (de cardinal n) est une n -liste d'éléments distincts de E .

Prop 3:

Le nombre des permutations de E (de cardinal n) est : $A_n^n = n!$.

C'est aussi le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal n .

Exemple

Le nombre d'anagrammes du mot MATHS est $5!$, un anagramme étant une permutation des lettres M, A, T, H, S.

Le nombre d'anagrammes du mot ANANAS est $\frac{6!}{3!2!}$.

I.3. Parties d'un ensemble**Prop 4:**

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a : $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

👉 Démonstration:

1ère façon

On raisonne par récurrence sur n . Soit $P(n)$ la propriété : Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}[\mathcal{P}(E)] = 2^n$.

$P(0)$ est vraie, en effet, si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

$P(1)$ est vraie, en effet, si $E = \{e\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E\}$.

Supposons que $P(n)$ soit vraie. Soit alors E un ensemble de cardinal $n+1$, notons $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ ses éléments. Partageons $\mathcal{P}(E)$ en deux paquets disjoints $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: $\mathcal{A}$ est formé des parties de E qui contiennent e_{n+1} et $\mathcal{B}$ de celles qui ne contiennent pas e_{n+1} .

Alors $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si $A \setminus \{e_{n+1}\}$ est une partie de $E \setminus \{e_{n+1}\}$: $\text{card}(\mathcal{A}) = 2^n$ d'après $P(n)$. D'autre part $B \in \mathcal{B}$ si et seulement si B est une partie de $E \setminus \{e_{n+1}\}$: $\text{card}(\mathcal{B}) = 2^n$. Donc, $\text{card}[\mathcal{P}(E)] = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. $P(n+1)$ est vraie.

2ème façon En considérant les fonctions indicatrices des parties de E (c'est-à-dire pour $A \in \mathcal{P}(E)$ $\mathbb{1}_A$ est l'application qui à $x \in A$ associe 1 et à $x \notin A$ associe 0), il y a autant de parties de E que d'applications de E dans $\{0, 1\}$. Or une telle application est définie, si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ par le n -uplet $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ avec $f(x_i) \in \{0, 1\}$ pour tout i ; il y en a donc 2^n .

3ème façon Formule du binôme : le nombre total de parties de E est la somme des $\binom{n}{k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ donc $(1+1)^n \dots$

I.4. Parties de E à p éléments, combinaisons**Déf 4:**

➤ Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.

Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance.

Prop 5:

Si $\text{card } E = n$, le nombre de combinaisons à p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ et l'on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

 Démonstration:

À chaque p -liste $x = (x_1, \dots, x_p)$ d'éléments distincts correspond une et une seule partie de E : la partie $\{x_1, \dots, x_p\}$. Réciproquement, à chaque telle partie on peut faire correspondre $p!$ arrangements, car il y a $p!$ façons d'ordonner p objets distincts.

Ce qui prouve : $A_n^p = p! \binom{n}{p}$.

Exemples

- Le nombre de tiercés dans le désordre dans une course de 15 chevaux est : $\binom{15}{3} = 455$.
- Le nombre de façons de choisir 8 cartes dans un jeu de 32 cartes est $\binom{32}{8} = 10518300$.
- Le nombre de façons de ranger trois objets identiques dans cinq tiroirs numérotés, chaque tiroir ne pouvant recevoir qu'un objet. On peut considérer qu'un rangement possible est une partie de 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ rangements possibles.
- Nombre d'anagrammes du mot ENSEMBLE : un anagramme est un mot de 8 lettres ; on place d'abord les trois « E » parmi les 8 places possibles : il y a $\binom{8}{3}$ façons de le faire. Ensuite, il reste 5 places et 5 lettres différentes, donc $5!$ façons de les disposer. Ce qui donne $5! \binom{8}{3} = 6720$ anagrammes.

Remarques

- On posera $\binom{0}{0} = 1$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Si $p < 0$ ou $p > n$ on posera $\binom{n}{p} = 0$.

Prop 6:

On a les relations suivantes :

- Quelques valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule sans nom : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- Formule de Pascal généralisée : pour $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Formule de Vandermonde : pour $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$.
- Cas particulier : $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

 Démonstration:

- On traite à part les cas $k < 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles (ou démonstration combinatoire en considérant le complémentaire de chaque combinaison).
- On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.
Une démonstration combinatoire est possible : on dénombre le nombre d'équipes de k joueurs dans un ensemble de n joueurs, une équipe devant comporter un capitaine.
On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe ($\binom{n}{k}$ possibilités), puis choisir le capitaine après coup (k possibilités), ou bien choisir d'abord le capitaine (n possibilités), puis compléter l'équipe en choisissant les $k-1$ autres membres ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités).
C'est pour cela que cette formule s'appelle parfois « formule du capitaine ».
- On traite à part les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k > n$, et sinon on écrit la formule avec les factorielles.

Une démonstration combinatoire est possible : on fixe un élément $a \in \llbracket 1; n \rrbracket$, puis on considère les parties à k éléments : une telle partie contient a ($\binom{n-1}{k-1}$ possibilités) ou ne le contient pas ($\binom{n-1}{k}$ possibilités), et les deux cas s'excluent mutuellement.

5. On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, c'est quasi immédiat.

Ou bien écrire : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, puis télescopage.

La formule s'appelle aussi parfois « formule de la gouttière » (voir schéma au tableau).

6. On peut procéder par récurrence sur n (avec $n \geq p$), en utilisant la formule du triangle de Pascal, classique.

Plus astucieusement, on peut développer fictivement le produit $(a+b) \times (a+b) \times \dots \times (a+b)$ et compter le nombre de termes en $a^k b^{n-k}$ dans les deux membres de l'égalité.

7. Formule de VanDerMonde

– 1ère façon :

On considère les termes en x^k dans le développement de $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$.

– 2ème façon, combinatoire :

Soit E un ensemble à $m+n$ éléments. Soit E_1 une partie de E avec n éléments. On note $P_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments. Donc $\text{card}(P_k(E)) = \binom{m+n}{k}$. D'autre part $P_k(E)$ est la réunion disjointe des ensembles

$$P_k^i(E) = \{A \in P_k(E) \text{ tq } \text{card}(A \cap E_1) = i\}, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Pour construire un élément A de $P_k^i(E)$ il faut d'abord choisir les i éléments de A appartenant à E_1 soit $\binom{n}{i}$ possibilités, puis choisir les $k-i$ éléments dans le complémentaire de E_1 soit $\binom{m}{k-i}$. Par conséquent

$$\text{card}(P_k^i(E)) = \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Donc

$$\text{card}(P_k(E)) = \sum_{i=0}^k \text{card}(P_k^i(E)) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Comme $\text{card}(P_k(E)) = \binom{m+n}{k}$, on obtient le résultat.

I.5. Applications de E_p dans F_n

Soient p et n deux entiers strictement positifs, E_p un ensemble de cardinal p dont les éléments sont notés : $e_1, \dots, e_p$ et F_n un ensemble de cardinal n . Soit $\mathcal{A}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p dans F_n . A tout élément f de $\mathcal{A}(E_p, F_n)$, on peut faire correspondre la p -liste d'éléments de F_n : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$. Réciproquement, à toute p -liste $(y_1, \dots, y_p)$ d'éléments de F_n , correspond une et une seule application de E_p dans F_n définie par : $f(e_i) = y_i$ pour tout i . D'où les résultats :

Prop 7:

- Nombre d'applications de E_p dans F_n : n^p .
- Nombre d'injections de E_p dans F_n : ($n \geq p$) : A_n^p
- Nombre de bijections de E_n dans F_n ($n = p$) : $A_n^n = n!$.

II. Ensembles dénombrables

Déf 5:

➤ Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de E sur F .

Remarques

1. Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Dans le cas où E et F sont finis, ils sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal.

Déf 6:

➤ Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Rem: E est dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

où les x_n sont deux à deux distincts.

(En effet, si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E , les x_n sont tout simplement les $\varphi(n)$).

Théorème 1:

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une bijection strictement croissante (et une seule) de $\mathbb{N}$ sur P .

Conséquence : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.

 **Démonstration:**

Définissons, par récurrence sur l'entier n une suite (p_n) d'entiers appartenant à P , de la façon suivante : Notons p_0 le plus petit élément de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0\}$ est non vide. Notons p_1 son plus petit élément. Supposons définis les éléments $p_0, p_1, \dots, p_n$ de P . Comme P est infinie, $P \setminus \{p_0, \dots, p_n\}$ est non vide. On définit alors l'entier p_{n+1} comme le plus petit élément de cet ensemble.

L'application $\varphi: n \mapsto p_n$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P . En effet :

- φ est strictement croissante car par construction $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; elle est donc injective.
- φ est surjective : en effet, soit $y \in P$; si, par l'absurde, y n'avait pas d'antécédent par φ , on aurait $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq y$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, y \in P \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}$ donc par définition de φ , $y \geq \varphi(n+1)$. y serait ainsi un majorant d'une partie infinie de $\mathbb{N}$, c'est impossible.

Si maintenant f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P on a évidemment $f(0) = p_0$, et une récurrence facile montre que $f(n) = p_n$ pour tout entier n , ce qui démontre l'unicité de f .

Corollaire 1.1:

| Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Déf 7:

➤ Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, si E est au plus dénombrable :

- soit E est infini, et il est alors équipotent à $\mathbb{N}$, donc dénombrable ;
- soit il est fini.

Rem: E est au plus dénombrable si l'on peut le décrire sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\} \quad \text{où } I \text{ est une partie de } \mathbb{N} \text{ et où les } x_i \text{ sont deux à deux distincts.}$$

Prop 8:

| $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

 Démonstration:

Il suffit de numérotter les entiers positifs à l'aide des entiers naturels pairs et les entiers négatifs à l'aide des entiers naturels impairs. De façon précise l'application

$$f: n \mapsto f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Prop 9:

| $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

 Démonstration:

• On numérote les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en numérotant successivement, de gauche à droite, les couples d'entiers naturels situés sur les droites d'équation $x + y = 0, x + y = 1, \dots, x + y = k, \dots$

Cela correspond à l'application

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n = \sum_{i=0}^{n+m} i + m \end{cases}$$

(fonction de couplage de Cantor).

Montrons que φ est bien bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

– Soit $N \in \mathbb{N}$.

Notons $s_k = 0 + 1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. La suite (s_k) étant strictement croissante de 0 à $+\infty$, il existe un et un seul entier p tel que $s_p \leq N < s_{p+1}$.

Posons alors $n = N - s_p$ et $m = p - n$. On a $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ et $n = N - s_p < s_{p+1} - s_p = p + 1$ donc $n \leq p$ et $m \geq 0$.

Ainsi $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $f(n, m) = n + s_{n+m} = n + s_p = N$, donc (n, m) est un antécédent de N : f est surjective.

– Si $N = f(n, m)$ on a $N = s_{n+m} + n$ donc si l'on pose $p = n + m$ on a $s_p \leq N$ et $N < s_{n+m} + n + m + 1 = s_{p+1}$ donc p est l'unique entier défini précédemment, d'où aussi l'unicité de $n = N - s_p$ et de m : f est donc injective.

• Une autre bijection possible est $\varphi(n, m) = 2^n(2m+1) - 1$: $\varphi(n, m) = N$ équivaut à dire que n est l'exposant de 2 dans la décomposition de $N+1$ en facteurs premiers, d'où son existence et unicité, puis $2m+1 = (N+1)/2^n$.

Théorème 2:

Si E et F sont dénombrables, leur produit $E \times F$ l'est aussi.

 Démonstration:

En effet, si $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow E$ et $\psi: \mathbb{N} \rightarrow F$ sont bijectives, l'application $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow E \times F$ l'est aussi.

$$(n, m) \mapsto (\varphi(n), \psi(m))$$

Et puisque d'après la proposition précédente, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$, cqfd.

Prop 10:

| S'il existe une *surjection* $f: \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est au plus dénombrable.

 Démonstration:

Pour tout $x \in E$ l'ensemble de ses antécédents $f^{-1}(\{x\})$ est non vide, donc il existe (au moins) un entier n_x tel que $f(n_x) = x$. Soit F l'ensemble $\{n_x, x \in E\}$. La restriction de f à F est une bijection de F sur E , avec F partie de $\mathbb{N}$, d'où le résultat.

Corollaire 10.1:

| $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

 Démonstration:

car l'application $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ est surjective, et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

$$(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$$

Théorème 3:

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrable est un ensemble dénombrable.

 *Démonstration:*

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables, et, pour tout n , $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow E_n$ bijective.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\psi(p, q) = \varphi_p(q)$. Alors ψ est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$: cqfd.

Théorème 4: (Théorème de Cantor - 1891)

Si E est un ensemble, il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

 *Démonstration:*

Supposons qu'il existe $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, bijective.

Considérons $A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}$. Alors puisque f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $A = f(a)$. Mais :

- si $a \in A$, alors $a \notin f(a) = A$: absurde.
- si $a \notin A = f(a)$ alors $a \in A$ par définition : absurde!

Problème...

Corollaire 4.2:

| L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 5:

L'ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

 *Démonstration:*

Supposons qu'il le soit, donc que $E = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$. On peut alors définir une suite u par : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = 1 - f_n(n)$. Il est clair que la suite u ne peut pas être égale à l'une des f_n , donc contradiction.

Théorème 6:

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

 *Démonstration:*

On montre que $[0; 1[$ ne l'est pas.

Supposons le contraire par l'absurde. On aurait donc $[0; 1[= \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On sait que chaque réel $x_n \in [0; 1[$ admet un développement décimal propre de la forme $x_n = 0, d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$ où les $d_{n,k} \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ sont les décimales de x_n et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$x_0 = 0, \mathbf{d_{0,1}}d_{0,2}d_{0,3}d_{0,4}d_{0,5} \dots$$

$$x_1 = 0, d_{1,1}\mathbf{d_{1,2}}d_{1,3}d_{1,4}d_{1,5} \dots$$

$$x_2 = 0, d_{2,1}d_{2,2}\mathbf{d_{2,3}}d_{2,4}d_{2,5} \dots$$

$$x_3 = 0, d_{3,1}d_{3,2}d_{3,3}\mathbf{d_{3,4}}d_{3,5} \dots$$

$$x_4 = 0, d_{4,1}d_{4,2}d_{4,3}d_{4,4}\mathbf{d_{4,5}} \dots$$

...

On considère alors le nombre $x = 0, c_1c_2c_3 \dots$ où $c_1, c_2, c_3, \dots$ sont des chiffres éléments de $\llbracket 0; 8 \rrbracket$ tels que $c_n \neq d_{n-1,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (procédé diagonal de Cantor).

Alors $x \in [0; 1[$ et ne peut être égal à l'un des x_n , contradiction.

III. Familles sommables

Tous les résultats difficiles de ce paragraphe sont admis.

III.1. Famille sommable de réels positifs

Déf 8:

Soit I un ensemble *dénombrable* d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels *positifs ou nuls*. On dit que la famille est **sommable** s'il existe un réel positif M tel que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq M$$

pour toute partie finie J incluse dans I .

Dans ces conditions la borne supérieure de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in J} u_i$ (J parcourant l'ensemble de toutes les parties finies de I) est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$, et notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Si la famille de réels positifs $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on écrira : $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. Dire qu'une famille de réels positifs est sommable s'écrit donc : $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Prop 11:

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres réels positifs.

Si $u_i \leq v_i$ pour tout i et si la famille (v_i) est sommable, alors la famille (u_i) l'est et l'on a alors :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

 *Démonstration:*

C'est immédiat, car si les sommes $\sum_{i \in J} v_i$, avec J partie finie de $\mathbb{N}$, sont majorées, il en est de même des sommes $\sum_{i \in J} u_i$.

Considérons le cas particulier d'une famille de réels positifs indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$, c'est-à-dire le cas d'une suite de réels positifs. On retrouve alors une notion familière :

Prop 12:

Pour qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs soit sommable, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit convergente. Et on a alors, avec la notation précédente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

 *Démonstration:*

C'est presque immédiat, puisque les sommes partielles de la série s'écrivent $\sum_{i \in J_n} u_i$ avec $J_n = \llbracket 0; n \rrbracket$ partie finie de $\mathbb{N}$, et que toute partie finie J de $\mathbb{N}$ est incluse dans un des J_n .

III.2. Famille sommable de nombres complexes

Déf 9:

Soit I un ensemble dénombrable d'indices, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs.

- Considérons d'abord le cas d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels.

Rappelons que, pour tout nombre réel x , on pose

$$x^+ = \max(x, 0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x, 0)$$

de sorte que x^+ et x^- sont des réels positifs tels que

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Prop 13:

Pour que la famille de nombres réels $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels positifs $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.

 *Démonstration:*

En effet, si les $\sum_{i \in J} |u_i|$ (J partie finie de $\mathbb{N}$) sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} u_i^+$ et $\sum_{i \in J} u_i^-$ car u_i^+ et u_i^- sont inférieurs à $|u_i|$.

Et si les sommes $\sum_{i \in J} u_i^+$ et $\sum_{i \in J} u_i^-$ sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |u_i|$ car $|u_i| = u_i^+ + u_i^-$.

- Soit maintenant une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes. On a le résultat suivant :

Prop 14:

Pour que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les deux familles de nombres réels $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ le soient.

On posera alors, dans ce cas : $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \left(\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i) \right)$.

 *Démonstration:*

En effet, si les $\sum_{i \in J} |u_i|$ (J partie finie de $\mathbb{N}$) sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |\operatorname{Re}(u_i)|$ et $\sum_{i \in J} |\operatorname{Im}(u_i)|$ car $|\operatorname{Re}(u_i)|$ et $|\operatorname{Im}(u_i)|$ sont inférieurs à $|u_i|$.

Et si les sommes $\sum_{i \in J} |\operatorname{Re}(u_i)|$ et $\sum_{i \in J} |\operatorname{Im}(u_i)|$ sont majorées, il en est de même de $\sum_{i \in J} |u_i|$ car $|u_i| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_i)^2 + \operatorname{Im}(u_i)^2} \leq |\operatorname{Re}(u_i)| + |\operatorname{Im}(u_i)|$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on a le résultat suivant :

Prop 15:

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et, dans ce cas, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

 *Démonstration:*

En effet, dire que la suite (u_n) est sommable équivaut à dire que la suite à termes réels positifs $(|u_n|)$ l'est, ce qui équivaut, on l'a vu, à la convergence de $\sum_n |u_n|$.

L'égalité des sommes se démontre d'abord pour les séries à termes réels en utilisant u_n^+ et u_n^- , et pour celles à termes complexes, en utilisant les parties réelle et imaginaire.

Les 3 théorèmes suivants (admis) sont très utiles en probabilités.

III.3. Commutativité généralisée

Théorème 7:

Pour qu'une famille dénombrable $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes soit sommable, il faut et il suffit que pour une/toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur I la série de terme général $u_{\varphi(n)}$ soit absolument convergente. Et dans ce cas l'on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$$

(la somme ne dépendant pas de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ choisie).

III.4. Associativité généralisée, ou sommation par paquets

Théorème 8:

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de nombres complexes, et soit $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I . Les p.s.s.e :

- a) la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ;
- b) chaque famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable et, si l'on pose $S_k = \sum_{i \in I_k} u_i$ pour tout $k \in K$, la famille $(S_k)_{k \in K}$ est sommable.

Et, dans ce cas, on a :

$$\sum_{k \in K} S_k = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

III.5. Familles doubles sommables

On considère ici deux ensembles dénombrables I et J , et une famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ de nombres complexes.

Théorème 9: de Fubini

Pour que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable il faut et il suffit que :

- pour tout j fixé dans J , la famille $(u_{i,j})_{i \in I}$ est sommable ;
- et la famille $(S_j)_{j \in J}$, où $S_j = \sum_{i \in I} u_{i,j}$, est sommable.

Dans ces conditions :

- pour tout i fixé dans I , la famille $(u_{i,j})_{j \in J}$ est sommable ;
- la famille $(S'_i)_{i \in I}$, où $S'_i = \sum_{j \in J} u_{i,j}$, est sommable ;
- et on a les égalités :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

On a le cas particulier intéressant suivant :

Prop 16:

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles dénombrables de nombres complexes.

Pour que la famille double $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ le soient, et on a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

III.6. Quelques remarques

En ce qui concerne les paragraphes sur la dénombrabilité et les familles sommables, je cite quelques extraits du programme :

Il s'agit de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis et directement utilisés.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

Dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

IV. Espaces probabilisés

IV.1. Introduction

Soit une expérience aléatoire (lancer de dés, tirage d'une boule dans une urne etc...). On appelle **univers** de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Exemples

- Dans le cas du lancer d'un dé, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Si on choisit 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 5 éléments des 32 cartes (il n'y a pas d'ordre).
- Si on lance trois fois de suite un dé à 6 faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^3$ (ici, l'ordre intervient).
- On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le nombre de lancers qui ont été nécessaires pour obtenir le premier pile. Ici l'univers de cette expérience est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
- Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0; 1]$.
- Lorsqu'on lance une pièce une infinité de fois et que l'on regarde la suite des résultats l'univers est $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans $\{P, F\}$).

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits peuvent ou non se produire : on les appellera des **événements**. Ce que l'on veut, c'est mesurer la « chance » qu'un tel événement se produise : c'est sa probabilité.

Dans le cas où l'ensemble Ω est de cardinal fini, la notion de probabilité est intuitivement facile à définir : les événements seront simplement les parties de Ω , et la probabilité d'un tel événement A sera simplement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots$

Cette définition n'a évidemment plus aucun sens lorsque l'ensemble Ω est infini. De plus, dans ce cas, certains événements ne sont guère mesurables : par exemple, si l'on tire un nombre x au hasard entre 0 et 1, il semble normal de dire que la probabilité de l'événement « x est compris entre 0.5 et 0.6 » est $\frac{1}{10}$, mais plus difficile de mesurer la probabilité d'événements comme « x est irrationnel » ou bien « tous les chiffres dans l'écriture décimale de x sont inférieurs à 5 ».... On peut d'ailleurs, finalement, se demander : « qu'est-ce qu'un événement ? »

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on peut toujours choisir $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble de tous les événements ; cela n'est pas toujours possible si Ω n'est pas dénombrable. Cela conduit donc à la définition suivante, qui fournit un cadre adapté à l'étude des probabilités (c'est le mathématicien russe Kolmogorov (1902-1987) qui a formalisé toutes ces notions).

IV.2. Espace probabilisable

Déf 10:

Soient Ω un ensemble appelé **univers** et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω .

On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** ou une σ -**algèbre** de parties de Ω si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω) ;
3. Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des **événements**

Déf 11:

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω . Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace probabilisable**.

Prop 17:

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu de partie de Ω .

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

 **Démonstration:**

1. car $\emptyset$ est le complémentaire de Ω .
2. Pour la réunion, il suffit d'appliquer la 3ème propriété à la famille (B_n) telle que $B_i = A_i$ si $i \in I$ et $B_i = \emptyset$ sinon. Pour l'intersection, on passe au complémentaire.

Rem: Dans le cas où Ω est au plus dénombrable, il est naturel de considérer que chaque singleton est un événement.

Toute partie A de Ω est alors la réunion dénombrable d'événements élémentaires, donc est aussi un événement d'après la proposition précédente.

Dans ce cas, la tribu considérée sur Ω sera donc $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier.

Un peu de vocabulaire :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événement élémentaire ω	singleton $\{\omega\}$
événement contraire de A : $\bar{A}$	complémentaire de A dans Ω
événement A ou B	$A \cup B$
événement A et B	$A \cap B$
les événements A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A implique B	$A \subset B$
système complet d'événements	partition

Rappel : Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de Ω s'appelle une partition de Ω si :

- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (les ensembles sont deux à deux disjoints) ;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

IV.3. Espace probabilisé

IV.3.1. Définition

Déf 12:

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles (disjoints) alors :
 - a) la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge ;
 - b) et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -additivité).

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

IV.3.2. Propriétés

Prop 18:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
4. Plus généralement : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (croissance).
7. Si $(A_i)_{i \in I}$ (I partie de $\mathbb{N}$) est un système complet d'événements, $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Démonstration:

La propriété 1 s'obtient en appliquant la σ -additivité à la suite (A_n) où $A_n = \emptyset$ pour tout n : puisque la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et que tous les $\mathbb{P}(A_n)$ sont égaux à $\mathbb{P}(\emptyset)$, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Tout découle ensuite de la propriété 2, qui se démontre à partir de la définition en prenant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.

Théorème 10:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité croissante}).$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ ($A_{n+1} \subset A_n$) alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{continuité décroissante}).$$

Démonstration:

On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ pour tout entier k non nul. Si $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, on a aussi $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.
 De plus les événements B_k sont deux à deux incompatibles donc d'après la σ -additivité, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$. Or $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})$, donc on a une suite télescopique on en déduit le résultat.

Corollaire 10.1:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
 Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

 **Démonstration:**

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$, qui est une suite croissante d'événements pour la 1ère propriété, et à la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$, qui est une suite décroissante d'événements pour la 2ème propriété

Corollaire 10.2:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
 Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$ alors :

– Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{sous-additivité finie})$$

– Plus généralement :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{sous-additivité}),$$

cette dernière somme pouvant être $+\infty$.

 **Démonstration:**

| Banale récurrence sur N pour la 1ère puis passage à la limite pour la 2ème, en utilisant le corollaire précédent.

Exemples :

1. Une urne contient 3 boules : une rouge, une verte et une blanche. On tire n fois, $n \geq 3$, une boule avec remise, quelle est la probabilité d'avoir un tirage tricolore ? Puis on tire une infinité de fois une boule avec remise, quelle est la probabilité de l'événement « avoir un tirage tricolore ».

 **Solution:**

Avec n tirages, Ω est l'ensemble des n -listes de $\{R, V, B\}$, ensemble fini de cardinal 3^n . Tous les tirages sont équiprobables. Soit A_n : « le tirage est tricolore », B_n : « le tirage est bicolore » et C_n : « le tirage est monocolore ».

$$\text{On a } \mathbb{P}(C_n) = \frac{3}{3^n} \text{ et } \mathbb{P}(B_n) = \frac{3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{3^n}, \text{ soit } \mathbb{P}(B_n) = \frac{3(2^n - 1 - 1)}{3^n}. \text{ Par conséquent } \mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{3^n}(3 + 3 \cdot 2^n - 6) = 1 - 3 \frac{2^n - 1}{3^n}.$$

L'événement $A =$ « avoir un tirage tricolore » est la réunion des A_n pour $n \geq 3$. Puisque (A_n) est une suite croissante d'événements (en effet, $\omega \in A_n \implies \omega \in A_{n+1}$), on a par passage à la limite par continuité croissante : $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. On joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (donc ici $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable...)
 Soit A l'événement : « on n'obtient que des Pile », et pour tout entier n , soit A_n l'événement : « on obtient pile à chacun des n premiers lancers ».

La suite (A_n) est évidemment décroissante (en effet, $\omega \in A_{n+1} \Rightarrow \omega \in A_n$), et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = A$. Donc

par continuité décroissante $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}$.

L'évènement A est donc de probabilité nulle!

On voit donc ici la difficulté de la définition d'une probabilité sur un ensemble non dénombrable : chaque évènement élémentaire est de probabilité nulle, donc si, A est une partie de Ω , la probabilité de A n'est plus la somme des probabilités de ses éléments...

Déf 13:

Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit **quasi-impossible** ou **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$ et **quasi-certain** ou **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Un système **quasi-complet** d'évènements est une famille $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, non vides, deux à deux incompatibles, telle que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$.

IV.3.3. Définition d'une probabilité à l'aide des singletons

Prop 19:

Soit Ω un ensemble *dénombrable*, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors pour tout évènement $A = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\}).$$

 *Démonstration:*

Immédiat puisque $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\omega_n\}$, réunion disjointe.

Rem: La série $\sum \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est absolument convergente. On déduit alors du théorème de commutativité généralisé que la quantité $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ est indépendante de l'ordre dans lequel on énumère les éléments de A (heureusement!), et l'on écrira plutôt :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Théorème 11: Existence d'une probabilité sur un ensemble dénombrable (admis)

Soit Ω un ensemble *dénombrable*, $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels *positifs* tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n.$$

 *Démonstration:*

(H.P) On définit l'application P par :

$$\text{si } A = \emptyset, \mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{et} \quad \text{si } A = \{\omega_i \mid i \in I\} \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} p_i.$$

- On note déjà que cette définition a bien un sens puisque, si l'on pose $a_n = p_n$ si $n \in I$ et $a_n = 0$ sinon, l'on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, cette dernière série étant convergente par comparaison de séries à termes positifs.
- $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

- σ -additivité : soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. On peut les écrire :

$$A_n = \{\omega_i, i \in I_n\} \quad \text{où les } I_n \text{ sont des parties au plus dénombrables et deux à deux disjointes de } \mathbb{N}.$$

Alors :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{\omega_i, i \in I\} \quad \text{où } I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

donc

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i \in I} p_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} p_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

en ayant utilisé le théorème de sommation par paquets.

V. Probabilité conditionnelle

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et I un ensemble au plus dénombrable.

V.1. Définition

Théorème 12:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée **probabilité conditionnelle relative à B** ou encore **probabilité sachant B** . $\mathbb{P}_B(A)$ est aussi noté $\mathbb{P}(A | B)$.

 *Démonstration:*

On montre que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Pour tout événement A , $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ et $\mathbb{P}_B(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
- Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles.

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup A_n\right) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \bigcup A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(B)},$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}_B\left(\bigcup A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}_B(A_n).$$

Remarques

- On peut déduire de la définition $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut aussi écrire $\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ et donc $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B)$.
- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, toutes les propriétés de la proposition 18 et du théorème 10 peuvent lui être appliquées (par exemple : $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$).
- ⚡ Il est important de noter que $A | B$ **n'est PAS un événement**. Cela n'a par exemple aucun sens d'écrire : $(A_1 | B) \cap (A_2 | B)$.
L'écriture $\mathbb{P}(A | B)$ est une simple notation pour $\mathbb{P}_B(A)$.
- Pour éviter les problèmes inutiles lors de l'écriture de certaines formules (par exemple la formule des probabilités totales), on pose par convention :
$$\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A | B) = 0 \quad \text{lorsque } \mathbb{P}(B) = 0.$$

V.2. Formule des probabilités composées

Directement d'après la définition, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A | B).$$

Plus généralement :

Théorème 13:

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

ou aussi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

 Démonstration:

Déjà, tout ce qui est écrit a un sens puisque les probabilités des événements $A_1 \cap \dots \cap A_i$ sont non nulles, ces événements contenant $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$. Ensuite par récurrence sur n .

Exemples

1. Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles successivement et sans remise, quelle est la probabilité pour que les trois articles ne soient pas défectueux ?

 Solution:

On note D_i l'évènement : « le i -ème article n'est pas défectueux ». On doit donc calculer $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$. On trouve :
 $p = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}$.

2. Une urne contient 6 boules blanches, 4 noires et 2 vertes. On tire 3 boules successivement et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la deuxième verte et la troisième noire ?

 Solution:

On note les événements B_1 : « la première boule est blanche », V_2 : « la deuxième est verte » et N_3 : « la dernière est noire ». On calcule $\mathbb{P}(B_1 \cap V_2 \cap N_3)$ soit avec la formule : $p = \frac{6}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{10}$.

3. Urne de Polya : une urne contient 3 rouges et une noire. On tire 3 fois une boule avec la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la jette et si elle est noire on la remet dans l'urne avec une boule noire. Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soit de la même couleur ?

 Solution:

On introduit les événements R_i : « la i -ème boule tirée est rouge » et N_i : « la i -ème boule tirée est noire ».
 On trouve : $p = \mathbb{P}(3 \text{ rouges}) + \mathbb{P}(3 \text{ noires}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$.

4. Une urne contient n noires et 2 blanches, on tire les boules une à une et sans remise, quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au k ième tirage ?

 Solution:

On considère l'évènement A_i : « on tire une boule noire au i -ème tirage ». Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}(\overline{A_k} \cap A_{k-1} \cap \dots \cap A_1)$.
 On obtient : $p = \frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

V.3. Formule des probabilités totales**Théorème 14:**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

(lorsque I est infini dénombrable, cela sous-entend que la famille est sommable).

On peut interpréter cette formule en disant que B est un effet provenant de différentes causes A_i .

 Démonstration:

immédiate puisque $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, réunion disjointe (ce que l'on note aussi : $B = \bigsqcup_{i \in I} (B \cap A_i)$).

Un cas particulier important de la formule des probabilités totales est celui où l'on prend comme système complet d'événements un système de la forme $\{A, \bar{A}\}$. La formule s'écrit alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}).$$

Exemples :

1. Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%. Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse ?

 Solution:

On considère les événements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'événement D : « la pièce est défectueuse ». D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D | M_A)\mathbb{P}(M_A) + \mathbb{P}(D | M_B)\mathbb{P}(M_B) + \mathbb{P}(D | M_C)\mathbb{P}(M_C)$$

$$\mathbb{P}(D) = 0,03 \times 0,5 + 0,04 \times 0,3 + 0,05 \times 0,2 = 3,7\%.$$

2. Une population contient une proportion p de tricheurs ; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Quelle est la probabilité qu'il retourne un as ?

 Solution:

On prend ici les événements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ».

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A | \bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})$$

La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(A) = 1 \times p + (1 - p) \times \frac{4}{52} = \frac{12p + 1}{13}$ (on peut vérifier qu'on a bien $\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$!)

3. N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information (de type booléen). Chaque personne transmet l'information exacte avec une probabilité p et la déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information exacte ? Limite quand N tend vers $+\infty$?

 Solution:

On introduit les événements : A_n : « la n -ième personne reçoit l'information exacte ».

Le système $\{A_n, \bar{A}_n\}$ est un système complet ; donc, d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) + \mathbb{P}(\bar{A}_n)\mathbb{P}(A_{n+1} | \bar{A}_n)$$

$$p_{n+1} = p_n \cdot p + (1 - p_n) \cdot (1 - p) = (2p - 1)p_n + 1 - p.$$

Suite arithmético-géométrique à savoir faire... La limite est $1/2$.

On a le même résultat lorsqu'on considère un système quasi-complet d'événements :

Théorème 15:

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

 Démonstration:

On considère $A = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. Alors A est quasi-impossible, et on applique le théorème précédent au système complet formé de A et des A_i .

Exemple :

On dispose d'une urne contenant une boule blanche. On joue alors à Pile ou Face. Chaque fois que l'on obtient Face, on ajoute une boule noire, et la première fois que l'on obtient Pile, on tire une boule dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

 Solution:

Soit B : « on tire une boule blanche » et A_n : « on obtient Pile pour la 1ère fois au n -ième coup » ($n \geq 1$).

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements (car on a vu dans un exemple précédent que l'événement : « n'obtenir que des Face » est quasi-impossible).

Donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B | A_n) \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \ln 2.$$

V.4. Formule de Bayes

On a vu que, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (*)$$

Si maintenant on considère un système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ (avec toujours I ensemble au plus dénombrable), et si A est l'un de ces événements, soit $A = A_j$ pour un $j \in I$, la formule des probabilités totales appliquée à l'événement B donne :

Théorème 16: Formule de Bayes

Soient $(A_i)_{i \in I}$ un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle. On a :

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B | A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B | A_i)}$$

Cette formule s'appelle aussi **formule de probabilités des causes**.

Rem: Cette formule est affreuse! il vaut mieux retenir la formule (*), beaucoup plus simple et qui est une conséquence directe de la définition d'une probabilité conditionnelle, et obtenir la valeur de $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.

Exemples :

1. Dans une usine, trois machines A , B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées; Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement de 3%, 4% et 5%.

On prend une pièce au hasard qui est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

 Solution:

On considère les événements : M_A : « la pièce vient de la machine A » (et idem pour B et C) et l'événement D : « la pièce est défectueuse ».

Les trois événements A_A , M_B et M_C forment un système complet d'événements. On a donc :

$$\mathbb{P}(M_A | D) = \frac{\mathbb{P}(M_A) \mathbb{P}(D | M_A)}{\mathbb{P}(M_A) \mathbb{P}(D | M_A) + \mathbb{P}(M_B) \mathbb{P}(D | M_B) + \mathbb{P}(M_C) \mathbb{P}(D | M_C)} = \frac{0,5 \times 0,03}{0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05}$$

$$\mathbb{P}(M_A | D) = \frac{1,5}{3,7}$$

2. Une population contient une proportion p de tricheurs; un tricheur est une personne qui, lorsqu'il tire une carte dans un jeu de 52 cartes, obtient toujours un as.

On prend un individu au hasard. Il retourne un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

 Solution:

On prend ici les événements T : « la personne est un tricheur » et A : « la personne retourne un as ». D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{\mathbb{P}(A | T) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A)}$$

où $\mathbb{P}(A)$ a été calculé par la formule des probabilités totales. On avait trouvé $\mathbb{P}(A) = \frac{2p+1}{13}$ donc $\mathbb{P}(T | A) = \frac{13p}{12p+1}$.

3. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A , B , C et D . La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B , C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B , C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant l'itinéraire D , l'élève n'arrive jamais en retard.
- a) Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le chemin D ?
- b) L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

 *Solution:*

a) $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$

b) On note R l'événement « l'élève est en retard ». On souhaite calculer $\mathbb{P}_R(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap R)}{\mathbb{P}(R)}$

On calcule $\mathbb{P}(R)$ avec la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événement (A, B, C, D) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(A) \times P_A(R) + \mathbb{P}(B) \times P_B(R) + \mathbb{P}(C) \times P_C(R) + \mathbb{P}(D) \times P_D(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{7}{120}\end{aligned}$$

$$\text{Et } \mathbb{P}(C \cap R) = \mathbb{P}(C) \times P_C(R) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}_R(C) = \frac{2}{7}$$

VI. Indépendance d'événements

Déf 14:

 On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a donc alors $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple

On lance un dé; soit A l'événement : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « le résultat obtenu est pair ».

En considérant les événements élémentaires équiprobables (dé parfait), on a $\mathbb{P}(A) = 2/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$ donc les événements A et B sont indépendants.

Par contre, si le dé est pipé avec la probabilité $\mathbb{P}(i) = i/21$ pour tout $1 \leq i \leq 6$, on a $\mathbb{P}(A) = 18/21$ et $\mathbb{P}(B) = 12/21$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 10/21$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Prop 20:

| Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B , A et $\overline{B}$ et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

 *Démonstration:*

Il suffit de calculer. Par exemple, puisque $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ (union disjointe), on a :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B).$$



Rem : Ne pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles » !
D'ailleurs, il est facile de vérifier que :

Deux événements incompatibles sont indépendants si et seulement si l'un d'entre eux est quasi-impossible.

De plus, la notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ alors que la notion d'incompatibilité est purement ensembliste.

Déf 15:

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (avec $I \subset \mathbb{N}$, finie ou non).

- On dit que les événements sont **deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** ou tout simplement **indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$** si pour *tout* ensemble fini d'indices $J \subset I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Prop 21:

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, il en est de même de toute famille $(B_i)_{i \in I}$ où chaque B_i est égal à A_i ou à $\overline{A_i}$.

 *Démonstration:*

Compte tenu de la définition, il suffit de le démontrer pour toute sous-famille finie, et on procède alors par récurrence sur le cardinal de cette famille à l'aide de la proposition précédente.



Rem : Il est clair que si des événements sont mutuellement indépendants, ils le sont deux à deux, mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

On lance deux dés parfaits. Soit A_1 : « le premier dé donne un nombre pair », A_2 : « le deuxième dé donne un nombre pair » et A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ».
Alors $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 1/2$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = 1/4$: les événements sont donc indépendants 2 à 2.

Mais $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8$ donc ils ne sont pas mutuellement indépendants.

