Chapitre XIX : Réduction des endomorphismes

PSI*

Février 2023

Lycée d'Arsonval

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES

Polynômes d'endomorphismes

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on peut associer l'endomorphisme de E : $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ (où u^k désigne, comme d'habitude, l'endomorphisme défini par : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$: $u^k = u \circ u^{k-1}$).

$P(u)$ s'appelle un <u>polynôme en l'endomorphisme u.</u>

Polynômes d'endomorphismes

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on peut associer l'endomorphisme de E : $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ (où u^k désigne, comme d'habitude, l'endomorphisme défini par : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$: $u^k = u \circ u^{k-1}$).

$P(u)$ s'appelle un <u>polynôme en l'endomorphisme u.</u>

Exemples

1. Si $P = X^2 - 1$, $P(u) = u^2 - \mathrm{Id}_E$.

Polynômes d'endomorphismes

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on peut associer l'endomorphisme de E : $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ (où u^k désigne, comme d'habitude, l'endomorphisme défini par : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$: $u^k = u \circ u^{k-1}$).

$P(u)$ s'appelle un polynôme en l'endomorphisme u.

Exemples

1. Si $P = X^2 - 1$, $P(u) = u^2 - \mathrm{Id}_E$.
2. si $P = X^2 - X$, $P(u) = u^2 - u$.

Polynômes d'endomorphismes

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on peut associer l'endomorphisme de E : $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ (où u^k désigne, comme d'habitude, l'endomorphisme défini par : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $k \geqslant 1$: $u^k = u \circ u^{k-1}$).

$P(u)$ s'appelle un polynôme en l'endomorphisme u.

Exemples

1. Si $P = X^2 - 1$, $P(u) = u^2 - \mathrm{Id}_E$.
2. si $P = X^2 - X$, $P(u) = u^2 - u$.

Proposition 1

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$:

1. $(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$.
2. $1(u) = \mathrm{Id}_E$.
3. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
4. $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$

Alors $P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) X^k$ donc

$$(P + \lambda Q)(u) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^{d} b_k u^k = P(u) + \lambda Q(u) .$$

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$
Alors $P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{d}(a_k + \lambda b_k)X^k$ donc
$$(P+\lambda Q)(u) = \sum_{k=0}^{d}(a_k+\lambda b_k)u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^{d} b_k u^k = P(u) + \lambda Q(u) .$$
2. Par définition, $1(u) = u^0 = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$

Alors $P + \lambda Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) X^k$ donc

$$(P + \lambda Q)(u) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^{d} b_k u^k = P(u) + \lambda Q(u) .$$

2. Par définition, $1(u) = u^0 = \mathrm{Id}_E$.

3. Démontrons déjà le résultat pour P quelconque et $Q = X^n$. En notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on a

$$X^n P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{n+k} \text{ d'où } (QP)(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{n+k} = u^n \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \right) = Q(u) \circ P(u) .$$

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$

Alors $P + \lambda Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) X^k$ donc

$$(P + \lambda Q)(u) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^{d} b_k u^k = P(u) + \lambda Q(u) .$$

2. Par définition, $1(u) = u^0 = \mathrm{Id}_E$.

3. Démontrons déjà le résultat pour P quelconque et $Q = X^n$. En notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on a

$$X^n P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{n+k} \text{ d'où } (QP)(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{n+k} = u^n \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \right) = Q(u) \circ P(u) .$$

On généralise ensuite à un polynôme Q quelconque en écrivant $Q = \sum b_n X^n$ et en utilisant la propriété démontrée en 1er.

Démonstration

Les propriétés précédentes découlent directement de la définition des lois dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathscr{L}(E)$ et de leurs propriétés.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quitte à compléter l'un des polynômes avec des coefficients nuls, on peut écrire :
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k .$$
Alors $P + \lambda Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) X^k$ donc
$$(P + \lambda Q)(u) = \sum_{k=0}^{d} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^{d} b_k u^k = P(u) + \lambda Q(u) .$$
2. Par définition, $1(u) = u^0 = \mathrm{Id}_E$.
3. Démontrons déjà le résultat pour P quelconque et $Q = X^n$. En notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ on a
$$X^n P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{n+k} \text{ d'où } (QP)(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{n+k} = u^n \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \right) = Q(u) \circ P(u) .$$
On généralise ensuite à un polynôme Q quelconque en écrivant $Q = \sum b_n X^n$ et en utilisant la propriété démontrée en 1er.
4. La dernière propriété découle alors de la précédente puisque $PQ = QP$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. **.** Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. . Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

   . Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis :

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)],$$

   ce qui montre que $v(y) \in \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. . Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

   . Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis :

   $$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)],$$

   ce qui montre que $v(y) \in \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

2. Si u et v commutent, il en est de même de u^k et v pour tout k (propriété du cours à retenir, se montre par récurrence triviale sur k). Il en est donc de même de $P(u)$ et de v, et il suffit donc d'appliquer le résultat du 1.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. **.** Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

   . Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis :

   $$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)],$$

   ce qui montre que $v(y) \in \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

2. Si u et v commutent, il en est de même de u^k et v pour tout k (propriété du cours à retenir, se montre par récurrence triviale sur k). Il en est donc de même de $P(u)$ et de v, et il suffit donc d'appliquer le résultat du 1.
3. Idem

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. . Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

   . Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis :

   $$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)],$$

   ce qui montre que $v(y) \in \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.
2. Si u et v commutent, il en est de même de u^k et v pour tout k (propriété du cours à retenir, se montre par récurrence triviale sur k). Il en est donc de même de $P(u)$ et de v, et il suffit donc d'appliquer le résultat du 1.
3. Idem
4. On mélange 2. + 3.

Théorème 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, tels que $\underline{u \circ v = v \circ u}$. Alors :

1. $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par v.
3. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $Q(v)$.
4. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$.

Démonstration

1. . Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On a alors : $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$, ce qui montre que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.

   . Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$ puis :
   $$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)],$$
   ce qui montre que $v(y) \in \operatorname{Im} u$ donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.
2. Si u et v commutent, il en est de même de u^k et v pour tout k (propriété du cours à retenir, se montre par récurrence triviale sur k). Il en est donc de même de $P(u)$ et de v, et il suffit donc d'appliquer le résultat du 1.
3. Idem
4. On mélange 2. + 3.

Corollaire:

> Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(P(u))$ sont stables par u.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un <u>polynôme annulateur de u</u> si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.
2. Si s est une symétrie de E, un polynôme annulateur de s est : $X^2 - 1$.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.
2. Si s est une symétrie de E, un polynôme annulateur de s est : $X^2 - 1$.
3. Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p, tout polynôme X^k avec $k \geqslant p$ est annulateur de u.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un <u>polynôme annulateur de u</u> si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.
2. Si s est une symétrie de E, un polynôme annulateur de s est : $X^2 - 1$.
3. Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p, tout polynôme X^k avec $k \geqslant p$ est annulateur de u.
4. Un endomorphisme peut ne pas posséder de polynôme annulateur autre que le polynôme nul. Exemple : l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.
2. Si s est une symétrie de E, un polynôme annulateur de s est : $X^2 - 1$.
3. Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p, tout polynôme X^k avec $k \geqslant p$ est annulateur de u.
4. Un endomorphisme peut ne pas posséder de polynôme annulateur autre que le polynôme nul. Exemple : l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

Démonstration

En effet, notons $D : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$. S'il existait un polynôme $\Pi = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n \neq 0)$ tel que $\Pi(D) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}[X])}$ on aurait :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = 0\,.$$

Définition 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'appelle un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ (endomorphisme nul).

Remarque si P est annulateur de u, tout multiple de P est encore annulateur de u.

Exemples

1. Si p est un projecteur de E, un polynôme annulateur de p est : $X^2 - X$.
2. Si s est une symétrie de E, un polynôme annulateur de s est : $X^2 - 1$.
3. Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p, tout polynôme X^k avec $k \geqslant p$ est annulateur de u.
4. Un endomorphisme peut ne pas posséder de polynôme annulateur autre que le polynôme nul. Exemple : l'endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

Démonstration

En effet, notons $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$. S'il existait un polynôme $\Pi = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n \neq 0)$ tel que $\Pi(D) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}[X])}$ on aurait :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = 0\,.$$

En prenant alors $P = X^n$, les polynômes $P^{(k)}$ étant non nuls et de degrés distincts forment un système libre, et on obtiendrait $a_k = 0$ pour tout k, ce qui est contradictoire.

Théorème 2

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur non nul.

Théorème 2

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur non nul.

Démonstration

Soit E de dimension n. Les endomorphismes u^k, pour $k \in \llbracket 0\,;n^2 \rrbracket$ forment une famille de n^2+1 vecteurs de $\mathscr{L}(E)$.

Théorème 2

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur non nul.

Démonstration

Soit E de dimension n. Les endomorphismes u^k, pour $k \in [\![0\,;n^2]\!]$ forment une famille de n^2+1 vecteurs de $\mathscr{L}(E)$.

Or, $\mathscr{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, donc cette famille est liée : il existe des α_k, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k u^k = 0$.

Théorème 2

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur non nul.

Démonstration

Soit E de dimension n. Les endomorphismes u^k, pour $k \in [\![0\,;n^2]\!]$ forment une famille de n^2+1 vecteurs de $\mathscr{L}(E)$.

Or, $\mathscr{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, donc cette famille est liée : il existe des α_k, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k u^k = 0$.

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de u.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

On dira qu'un polynôme P est annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle). Cela équivaut à dire que P est annulateur de u. u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il possède un polynôme annulateur non nul : ainsi, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

On dira qu'un polynôme P est annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle). Cela équivaut à dire que P est annulateur de u. u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il possède un polynôme annulateur non nul : ainsi, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Proposition 2

1. Si deux matrices carrées A et A' sont semblables et si P est un polynôme annulateur de A, P est aussi un polynôme annulateur de A'.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est un polynôme annulateur de A, c'est aussi un polynôme annulateur de $A^\top$.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

On dira qu'un polynôme P est annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle). Cela équivaut à dire que P est annulateur de u. u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il possède un polynôme annulateur non nul : ainsi, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Proposition 2

1. Si deux matrices carrées A et A' sont semblables et si P est un polynôme annulateur de A, P est aussi un polynôme annulateur de A'.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est un polynôme annulateur de A, c'est aussi un polynôme annulateur de $A^\top$.

Démonstration

1. Si $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A'^k = P^{-1}A^kP$, donc, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{K}[X]$, $\Pi(A') = P^{-1}\Pi(A)P$ d'où le résultat.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

On dira qu'un polynôme P est annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle). Cela équivaut à dire que P est annulateur de u. u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il possède un polynôme annulateur non nul : ainsi, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Proposition 2

1. Si deux matrices carrées A et A' sont semblables et si P est un polynôme annulateur de A, P est aussi un polynôme annulateur de A'.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est un polynôme annulateur de A, c'est aussi un polynôme annulateur de $A^\top$.

Démonstration

1. Si $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A'^k = P^{-1}A^kP$, donc, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{K}[X]$, $\Pi(A') = P^{-1}\Pi(A)P$ d'où le résultat.

   Rem : On pouvait aussi remarquer que, si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ alors $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}(u)$ donc $\Pi_A = \Pi_{A'} = \Pi_u$.

Polynômes de matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on peut associer le polynôme de matrice $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ (avec $M^0 = I_n$). C'est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Compte tenu des définitions des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que, si $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, où u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, on aura $P(M) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(P(u))$.

On dira qu'un polynôme P est annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle). Cela équivaut à dire que P est annulateur de u. u étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il possède un polynôme annulateur non nul : ainsi, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul.

Proposition 2

1. Si deux matrices carrées A et A' sont semblables et si P est un polynôme annulateur de A, P est aussi un polynôme annulateur de A'.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est un polynôme annulateur de A, c'est aussi un polynôme annulateur de $A^\top$.

Démonstration

1. Si $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A'^k = P^{-1}A^kP$, donc, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{K}[X]$, $\Pi(A') = P^{-1}\Pi(A)P$ d'où le résultat.

   Rem : On pouvait aussi remarquer que, si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ alors $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}(u)$ donc $\Pi_A = \Pi_{A'} = \Pi_u$.

2. Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^\top = (A^\top)^k$, il est facile de vérifier que, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{K}[X]$, $\Pi(A^\top) = \Pi(A)^\top$ d'où le résultat.

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1. **Calcul de l'inverse d'un endomorphisme**

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

❶ Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

❶ Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1 Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

On peut aussi retenir que, si $a_0 = 0$ et si P n'est pas nul, u n'est pas inversible, puisqu'il existe $v \neq 0$ tel que $u \circ v = 0$.

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1 Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

On peut aussi retenir que, si $a_0 = 0$ et si P n'est pas nul, u n'est pas inversible, puisqu'il existe $v \neq 0$ tel que $u \circ v = 0$.

2 Calcul des puissances d'un endomorphisme

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1 Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

On peut aussi retenir que, si $a_0 = 0$ et si P n'est pas nul, u n'est pas inversible, puisqu'il existe $v \neq 0$ tel que $u \circ v = 0$.

2 Calcul des puissances d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur (non nul) P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P s'écrit : $X^n = PQ_n + R_n$ (où $\deg(R_n) < \deg(P)$).

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1 Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

On peut aussi retenir que, si $a_0 = 0$ et si P n'est pas nul, u n'est pas inversible, puisqu'il existe $v \neq 0$ tel que $u \circ v = 0$.

2 Calcul des puissances d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur (non nul) P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P s'écrit : $X^n = PQ_n + R_n$ (où $\deg(R_n) < \deg(P)$).

On a alors : $u^n = P(u) \circ Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$, ce qui permet d'exprimer u^n pour tout n à l'aide des premières puissances de u (plus précisément, à l'aide de $\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{p-1}$ si $p = \deg(P)$).

Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

1 Calcul de l'inverse d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\underline{a_0 \neq 0}$.

On a alors : $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + u \circ \left(\sum_{k=1}^{n} a_i u^{i-1} \right) = 0$, ce qui prouve que u est inversible et permet d'exprimer u^{-1} à l'aide des puissances de u.

On peut aussi retenir que, si $a_0 = 0$ et si P n'est pas nul, u n'est pas inversible, puisqu'il existe $v \neq 0$ tel que $u \circ v = 0$.

2 Calcul des puissances d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, possédant un polynôme annulateur (non nul) P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P s'écrit : $X^n = PQ_n + R_n$ (où $\deg(R_n) < \deg(P)$).

On a alors : $u^n = P(u) \circ Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$, ce qui permet d'exprimer u^n pour tout n à l'aide des premières puissances de u (plus précisément, à l'aide de $\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{p-1}$ si $p = \deg(P)$).

Remarque : Les mêmes méthodes permettent évidemment de calculer l'inverse (si elle existe) et les puissances d'une matrice carrée lorsqu'on en connaît un polynôme annulateur.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.
- Le polynôme $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est donc annulateur de A.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.
- Le polynôme $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est donc annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$ on effectue la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X^n = PQ + aX + b\,,$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

• On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.

• Le polynôme $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est donc annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$ on effectue la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X^n = PQ + aX + b\,,$$

et en remplaçant X par 1 puis par 4 on trouve : $X^n = PQ + \dfrac{4^n - 1}{3} X + \dfrac{4 - 4^n}{3}\,.$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.

- Le polynôme $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est donc annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$ on effectue la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X^n = PQ + aX + b\,,$$

et en remplaçant X par 1 puis par 4 on trouve : $X^n = PQ + \dfrac{4^n - 1}{3} X + \dfrac{4 - 4^n}{3}\cdot$

Puisque $P(A) = O_3$ on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{4^n - 1}{3} A + \frac{4 - 4^n}{3} I_3 \qquad (**)$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I_3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A est inversible, calculer A^{-1} puis A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

• On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis on vérifie $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3 \quad (*)$.

• Le polynôme $P = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est donc annulateur de A. Pour $n \in \mathbb{N}$ on effectue la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X^n = PQ + aX + b\,,$$

et en remplaçant X par 1 puis par 4 on trouve : $X^n = PQ + \dfrac{4^n - 1}{3} X + \dfrac{4 - 4^n}{3}\cdot$

Puisque $P(A) = O_3$ on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{4^n - 1}{3} A + \frac{4 - 4^n}{3} I_3 \qquad (**)$$

• La relation trouvée au début s'écrit aussi : $A(A - 5I_3) = -4I_3$, ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}(A - 5I_3)$.

Solution (suite)

- On montre ensuite que la relation $(**)$ reste vraie pour n entier négatif :

Solution (suite)

- On montre ensuite que la relation $(**)$ reste vraie pour n entier négatif :

En multipliant la relation $(*)$ par A^{-2}, on A $4A^{-2} - 5A^{-1} + I_3 = 0$, c'est-à-dire que le polynôme $P_1 = 4X^2 - 5X + 1$ est annulateur de A^{-1}.

Solution (suite)

- On montre ensuite que la relation $(**)$ reste vraie pour n entier négatif :

En multipliant la relation $(*)$ par A^{-2}, on A $4A^{-2} - 5A^{-1} + I_3 = 0$, c'est-à-dire que le polynôme $P_1 = 4X^2 - 5X + 1$ est annulateur de A^{-1}.

Or $P_1(X) = X^2 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$, donc les racines de P_1 sont exactement les inverses des racines de P, c'est-à-dire 1 et $\frac{1}{4}$, et c'est pour cette raison qu'en reprenant les calculs précédents en remplaçant 4 par $\frac{1}{4}$, on trouvera

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = \frac{4^{-n}-1}{3} A + \frac{4-4^{-n}}{3} I_3\,.$$

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES : LE PRINCIPE

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, <u>stables</u> par u, tels que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, <u>stables</u> par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

On a évidemment intérêt à ce que la dimension des E_i (s'ils sont de dimension finie) soit la plus petite possible.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

On a évidemment intérêt à ce que la dimension des E_i (s'ils sont de dimension finie) soit la plus petite possible. Le cas le plus facile est celui où les E_i sont de dimension 1.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

On a évidemment intérêt à ce que la dimension des E_i (s'ils sont de dimension finie) soit la plus petite possible. Le cas le plus facile est celui où les E_i sont de dimension 1. Cela revient donc à chercher les droites vectorielles stables par u.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

On a évidemment intérêt à ce que la dimension des E_i (s'ils sont de dimension finie) soit la plus petite possible. Le cas le plus facile est celui où les E_i sont de dimension 1. Cela revient donc à chercher les droites vectorielles stables par u. Or, si $D = \text{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$, D est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Réduire un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ consiste, dans le cas le plus général, à trouver une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, non réduits à $\{0\}$, stables par u, tels que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

En dimension finie, cela revient à trouver une base de E où la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{u|_{E_1}} & & & 0 \\ & \boxed{u|_{E_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{u|_{E_p}} \end{pmatrix}$$

(il est important de bien comprendre le lien entre matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables, revoir le cours à ce sujet).

Dans ce cas, pour caractériser u, il suffira de caractériser les endomorphismes u_i induits par u sur les E_i.

On a évidemment intérêt à ce que la dimension des E_i (s'ils sont de dimension finie) soit la plus petite possible. Le cas le plus facile est celui où les E_i sont de dimension 1. Cela revient donc à chercher les droites vectorielles stables par u. Or, si $D = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$, D est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Cela amène à introduire les notions suivantes.

ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $\underline{x \neq 0_E}$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit associé à la valeur propre λ.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une <u>valeur propre</u> de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $\underline{x \neq 0_E}$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un <u>vecteur propre</u> de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit <u>associé</u> à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une <u>valeur propre</u> de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $\underline{x \neq 0_E}$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un <u>vecteur propre</u> de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit <u>associé</u> à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle <u>spectre</u> de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit associé à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit associé à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit associé à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0\end{aligned}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

   x est alors dit associé à la valeur propre λ.

   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \\ &\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \end{aligned}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit associé à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \\ &\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ \textit{non injective.} \end{aligned}}$$

En particulier, on a le résultat suivant :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 3

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une <u>valeur propre</u> de u s'il existe un vecteur $x \in E$, $\underline{x \neq 0_E}$, tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un <u>vecteur propre</u> de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   x est alors dit <u>associé</u> à la valeur propre λ.
   Cela équivaut à dire que la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ est stable par u.
3. On appelle <u>spectre</u> de u, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ou plus simplement $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u (dans $\mathbb{K}$).

Il est *très important* de bien connaître et comprendre les équivalences suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0 \text{ tel que } (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \\ &\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ \textit{non injective.} \end{aligned}}$$

En particulier, on a le résultat suivant :

$$\boxed{0_{\mathbb{K}} \text{ est valeur propre de } u \iff u \text{ non injective}.}$$

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\ .$$

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\ .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle <u>sous-espace propre</u> de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Exemple 1

Si $h \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie de rapport α, $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$ et $E_\alpha(h) = E$.

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Exemple 1

Si $h \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie de rapport α, $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$ et $E_\alpha(h) = E$.

Solution

Immédiat : puisque $h(x) = \alpha x$ pour tout x, si on a $h(x) = \lambda x$ pour $x \neq 0$, alors $\lambda = \alpha$.

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle <u>sous-espace propre</u> de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Exemple 1

Si $h \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie de rapport α, $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$ et $E_\alpha(h) = E$.

Solution

Immédiat : puisque $h(x) = \alpha x$ pour tout x, si on a $h(x) = \lambda x$ pour $x \neq 0$, alors $\lambda = \alpha$.

Exemple 2

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2, si u est une rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, u n'a pas de valeur propre (ni de vecteur propre !).

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \ .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Exemple 1

Si $h \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie de rapport α, $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$ et $E_\alpha(h) = E$.

Solution

Immédiat : puisque $h(x) = \alpha x$ pour tout x, si on a $h(x) = \lambda x$ pour $x \neq 0$, alors $\lambda = \alpha$.

Exemple 2

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2, si u est une rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, u n'a pas de valeur propre (ni de vecteur propre !).

Démonstration

Pour une rotation d'angle non multiple de π, les vecteurs $u(x)$ et x ne peuvent pas être colinéaires si $x \neq 0$!

Définition 4

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle sous-espace propre de u associé à λ le sous-espace vectoriel :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) .$$

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ **plus le vecteur nul**.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque, on notera encore $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, on a $E_\lambda(u) = \{0\}$ (et on ne parle pas alors de sous-espace propre !).

Exemple 1

Si $h \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie de rapport α, $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$ et $E_\alpha(h) = E$.

Solution

Immédiat : puisque $h(x) = \alpha x$ pour tout x, si on a $h(x) = \lambda x$ pour $x \neq 0$, alors $\lambda = \alpha$.

Exemple 2

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2, si u est une rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, u n'a pas de valeur propre (ni de vecteur propre !).

Démonstration

Pour une rotation d'angle non multiple de π, les vecteurs $u(x)$ et x ne peuvent pas être colinéaires si $x \neq 0$!

Avant de voir d'autres exemples, des rappels s'imposent.

Rappels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = F \oplus vG$).
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array}$ s'appelle la **projection sur F de direction G** (ou parallèlement à G).

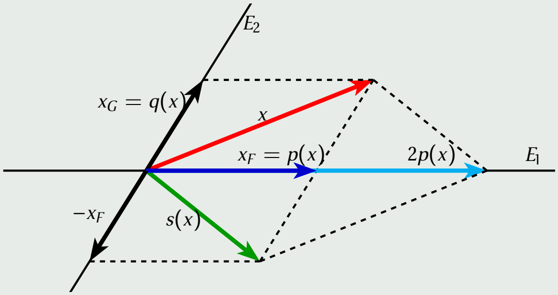
L'application $s : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F - x_G \end{array}$ s'appelle la **symétrie par rapport à F de direction G**.

Rappels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = F \oplus vG$).
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$ s'appelle la **projection sur F de direction G** (ou parallèlement à G).

L'application $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$ s'appelle la **symétrie par rapport à F de direction G**.



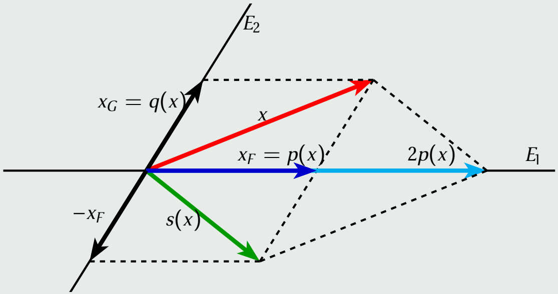
s et p sont deux endomorphismes de E, tels que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Rappels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = F \oplus vG$).
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $p : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array}$ s'appelle la **projection sur F de direction G** (ou parallèlement à G).

L'application $s : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F - x_G \end{array}$ s'appelle la **symétrie par rapport à F de direction G**.



s et p sont deux endomorphismes de E, tels que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Réciproquement :

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \ \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \ ; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \,; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :
  $$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p \ ; \mathrm{Im}\, p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \mathrm{Im}\, p \text{ de direction } \mathrm{Ker}\, p.$$
- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :
  $$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)\, ; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \;;\; \operatorname{Im} p = E_1(p) \;;\text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$
- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :
$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \,;\text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

- Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \ \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$
- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :
$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \, ; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

• Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.
Alors, $x_F = \lambda(x_F + x_G)$ d'où (somme directe) : $x_F = \lambda x_F$ et $0 = \lambda x_G$.

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \ \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \, ; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0,1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1,1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

• Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.

Alors, $x_F = \lambda(x_F + x_G)$ d'où (somme directe) : $x_F = \lambda x_F$ et $0 = \lambda x_G$.

Donc :

- soit $x_F = 0$, mézalor, puisque $x \neq 0$, $x_G \neq 0$ et $\lambda = 0$;

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$
- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :
$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)\,; \text{et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

• Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.
Alors, $x_F = \lambda(x_F + x_G)$ d'où (somme directe) : $x_F = \lambda x_F$ et $0 = \lambda x_G$.
Donc :

- soit $x_F = 0$, mézalor, puisque $x \neq 0$, $x_G \neq 0$ et $\lambda = 0$;
- soit $x_F \neq 0$, et alors $\lambda = 1$ et $x_G = 0$.

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \ \operatorname{Im} p = E_1(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \operatorname{Id}_E$), alors :

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s) \, ; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\operatorname{Sp}(p) \subset \{0,1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\operatorname{Sp}(s) \subset \{-1,1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

• Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.

Alors, $x_F = \lambda(x_F + x_G)$ d'où (somme directe) : $x_F = \lambda x_F$ et $0 = \lambda x_G$.

Donc :

- soit $x_F = 0$, mézalor, puisque $x \neq 0$, $x_G \neq 0$ et $\lambda = 0$;
- soit $x_F \neq 0$, et alors $\lambda = 1$ et $x_G = 0$.

Il n'y a donc que deux valeurs propres possibles : 0 et 1, et $E_0(p) = G$ et $E_1(p) = F$; ce sont de « vrais » sous-espaces propres si et seulement si p n'est pas un projecteur trivial (différent de 0 et de Id_E).

Rappels

- Si p est un projecteur ($p^2 = p$), alors :
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \;;\; \operatorname{Im} p = E_1(p) \;;\text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$
- Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :
$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)\,;\text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } E_1(s) \text{ de direction } E_{-1}(s).$$

Exemple 2

Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est la projection sur F de direction G, $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ et $E_0(p) = G$, $E_1(p) = F$.

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F de direction G, $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$ et $E_{-1}(s) = G$, $E_1(s) = F$.

Démonstration

• Soit donc p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x = x_F + x_G \in E$, non nul, et λ tel que $p(x) = \lambda x$.

Alors, $x_F = \lambda(x_F + x_G)$ d'où (somme directe) : $x_F = \lambda x_F$ et $0 = \lambda x_G$.

Donc :

- soit $x_F = 0$, mézalor, puisque $x \neq 0$, $x_G \neq 0$ et $\lambda = 0$;
- soit $x_F \neq 0$, et alors $\lambda = 1$ et $x_G = 0$.

Il n'y a donc que deux valeurs propres possibles : 0 et 1, et $E_0(p) = G$ et $E_1(p) = F$; ce sont de « vrais » sous-espaces propres si et seulement si p n'est pas un projecteur trivial (différent de 0 et de Id_E).

• Pour la symétrie, même principe, ou utiliser la relation $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Reamrque : Cette proposition peut être intéressante lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u de rang « petit ». En effet dans ce cas, on peut commencer par chercher le noyau de u (sous-espace propre associé à la valeur propre 0), puis chercher les éléments propres de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$; $\operatorname{Im} u$ étant de petite dimension, les calculs seront plus simples.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Reamrque : Cette proposition peut être intéressante lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u de rang « petit ». En effet dans ce cas, on peut commencer par chercher le noyau de u (sous-espace propre associé à la valeur propre 0), puis chercher les éléments propres de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$; $\operatorname{Im} u$ étant de petite dimension, les calculs seront plus simples.

Proposition 4

Si $v \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Reamrque : Cette proposition peut être intéressante lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u de rang « petit ». En effet dans ce cas, on peut commencer par chercher le noyau de u (sous-espace propre associé à la valeur propre 0), puis chercher les éléments propres de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$; $\operatorname{Im} u$ étant de petite dimension, les calculs seront plus simples.

Proposition 4

Si $v \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Démonstration

Si $x \in E_\lambda(u)$ et si v commute avec u, alors $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Reamrque : Cette proposition peut être intéressante lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u de rang « petit ». En effet dans ce cas, on peut commencer par chercher le noyau de u (sous-espace propre associé à la valeur propre 0), puis chercher les éléments propres de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$; $\operatorname{Im} u$ étant de petite dimension, les calculs seront plus simples.

Proposition 4

Si $v \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Démonstration

Si $x \in E_\lambda(u)$ et si v commute avec u, alors $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

On pouvait aussi appliquer directement le théorème 1, puisque $E_\lambda(u)$ est le noyau de l' endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ qui commute aussi avec v.

Proposition 3

Si λ est une valeur propre **non nulle** de u, $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

En effet, si $x \in E_\lambda(u)$, on a alors $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$.

Reamrque : Cette proposition peut être intéressante lorsqu'il s'agit de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u de rang « petit ». En effet dans ce cas, on peut commencer par chercher le noyau de u (sous-espace propre associé à la valeur propre 0), puis chercher les éléments propres de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$; $\operatorname{Im} u$ étant de petite dimension, les calculs seront plus simples.

Proposition 4

Si $v \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Démonstration

Si $x \in E_\lambda(u)$ et si v commute avec u, alors $u[v(x)] = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

On pouvait aussi appliquer directement le théorème 1, puisque $E_\lambda(u)$ est le noyau de l' endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ qui commute aussi avec v.

Proposition 5

Si λ est une valeur propre de u, $E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ.

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p = 1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p = 1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soient alors, à l'ordre p, $x_1, \ldots, x_p$ p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p = 1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soient alors, à l'ordre p, $x_1, \ldots, x_p$ p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.
     Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ sont p scalaires tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \quad (1)$, alors :
     $u\big(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p\big) = 0$, d'où $\lambda_1 \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_p \alpha_p x_p = 0 \quad (2)$ (par linéarité de u)

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p = 1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p-1$.
     Soient alors, à l'ordre p, $x_1, \dots, x_p$ p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
     Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ sont p scalaires tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \quad (1)$, alors :
     $u\big(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p\big) = 0$, d'où $\lambda_1\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_p\alpha_p x_p = 0 \quad (2)$ (par linéarité de u)
     puis, en faisant $(2) - \lambda_p \times (1)$:
     $$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \cdots + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$$

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p = 1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p-1$.
     Soient alors, à l'ordre p, $x_1, \dots, x_p$ p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
     Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ sont p scalaires tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \quad (1)$, alors :
     $u\big(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p\big) = 0$, d'où $\lambda_1\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_p\alpha_p x_p = 0 \quad (2)$ (par linéarité de u)
     puis, en faisant $(2) - \lambda_p \times (1)$:
     $$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \cdots + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$$
     d'où $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;p-]\!]$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;p-]\!]$ (car $\lambda_i \neq \lambda_p$),

Théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de valeurs propres de u **deux à deux distinctes**.

1. Soit, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
   Alors, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est *libre*.
2. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Démonstration

1. Démontrons la première propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est vrai pour $p=1$ (car un vecteur propre est, par définition, non nul).
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p-1$.
     Soient alors, à l'ordre p, $x_1,\dots,x_p$ p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$.
     Si $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ sont p scalaires tels que $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p=0\quad(1)$, alors :
     $$u\big(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_px_p\big)=0,\text{ d'où } \lambda_1\alpha_1x_1+\dots+\lambda_p\alpha_px_p=0\quad(2)\text{ (par linéarité de } u)$$
     puis, en faisant $(2)-\lambda_p\times(1)$:
     $$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_p)x_1+\dots+\alpha_{p-1}(\lambda_{p-1}-\lambda_p)x_{p-1}=0$$
     d'où $\alpha_i(\lambda_i-\lambda_p)=0$ pour tout $i\in[\![1\,;p-]\!]$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $\alpha_i=0$ pour tout $i\in[\![1\,;p-]\!]$ (car $\lambda_i\neq\lambda_p$), puis $(1)\Rightarrow\alpha_p=0$ ce qui démontre le résultat à l'ordre p, et achève la récurrence.

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

$$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

     $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

     Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :

     $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
    - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
    - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p-1$.
      Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

      Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

      $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

      Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :

      $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$

      En appliquant u on obtient la relation :

      $$(2) \qquad \lambda_p x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i,$$

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

     $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

     Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :

     $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$

     En appliquant u on obtient la relation :

     $$(2) \qquad \lambda_p x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i,$$

     et en faisant $(2) - \lambda_p(1)$ on obtient $\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$.

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

     $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

     Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :

     $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$

     En appliquant u on obtient la relation :

     $$(2) \qquad \lambda_p x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i,$$

     et en faisant $(2) - \lambda_p(1)$ on obtient $\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$. La somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ étant directe, on en déduit $\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1 \,; p-1]\!]$,

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :

     $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$

     Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :

     $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$

     En appliquant u on obtient la relation :

     $$(2) \qquad \lambda_p x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i,$$

     et en faisant $(2) - \lambda_p(1)$ on obtient $\sum\limits_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$. La somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ étant directe, on en déduit $\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,; p-1]\!]$, d'où$x_i = 0$ puisque les λ_i sont distincts, et enfin $x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration (suite)

2. Démontrons la seconde propriété par récurrence sur p.
   - Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$.
   - Supposons le résultat acquis à l'ordre $p - 1$.
     Soit alors, à l'ordre p, λ_p une valeur propre différente des précédentes.

     Puisque par hypothèse de récurrence, la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ est directe, pour montrer que la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ l'est, il suffit de démontrer, par associativité de la somme directe, que :
     $$E_{\lambda_p}(u) \bigcap \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{\lambda_i}(u) \right) = \{0_E\}.$$
     Or, si x est un vecteur de l'intersection ci-dessus, on a :
     $$(1) \qquad x = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \text{ avec } x \in E_{\lambda_p}(u) \text{ et } x_i \in E_{\lambda_i}(u).$$
     En appliquant u on obtient la relation :
     $$(2) \qquad \lambda_p x = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i,$$
     et en faisant $(2) - \lambda_p(1)$ on obtient $\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$. La somme des $E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ étant directe, on en déduit $\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;p-1]\!]$, d'où$x_i = 0$ puisque les λ_i sont distincts, et enfin $x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Rem : on pouvait aussi utiliser directement le résultat de la propriété **1.** *et ainsi éviter de refaire une récurrence, qui ressemble d'ailleurs furieusement à la 1ère... De même, on pouvait aussi démontrer d'abord la propriété* **2.** *par récurrence et en déduire directement la propriété* **1.**

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Exemple

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Exemple

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$

Alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}$ et, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right\}$ est une droite vectorielle.

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Exemple

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$

Alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}$ et, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right\}$ est une droite vectorielle.

Le théorème 1 permet alors de retrouver un résultat déjà démontré en exercice, à savoir que la famille des fonctions $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Exemple

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$

Alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}$ et, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right\}$ est une droite vectorielle.

Le théorème 1 permet alors de retrouver un résultat déjà démontré en exercice, à savoir que la famille des fonctions $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.

Proposition 6

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont tels que $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$.

Corollaire:

> Dans un espace vectoriel de dimension finie n, un endomorphisme possède au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration

En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, et si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs propres associés, alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, donc $p \leqslant \dim E$.

Exemple

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$

Alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}$ et, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right\}$ est une droite vectorielle.

Le théorème 1 permet alors de retrouver un résultat déjà démontré en exercice, à savoir que la famille des fonctions $\{x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.

Proposition 6

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont tels que $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$.

Démonstration

Si $u(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k(x) = \lambda^k x$ (récurrence facile), donc, si $P = \sum a_k X^k$, $P(u) = \sum a_k u^k$ et $P(u)(x) = \left(\sum a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda) x$.

Corollaire:

> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Corollaire:

> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ ($x \neq 0$).
On a donc $u(x) = \lambda x$, et d'après la proposition précédente, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Puisque $x \neq 0$, $P(\lambda)$ est donc une valeur propre de $P(u)$.

Corollaire:

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ ($x \neq 0$).
On a donc $u(x) = \lambda x$, et d'après la proposition précédente, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Puisque $x \neq 0$, $P(\lambda)$ est donc une valeur propre de $P(u)$.

Remarque : L'inclusion $\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \ \subset\ \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$ peut être stricte.
Considérer par exemple une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $P(X) = X^2$.

Corollaire:

> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ ($x \neq 0$).
On a donc $u(x) = \lambda x$, et d'après la proposition précédente, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Puisque $x \neq 0$, $P(\lambda)$ est donc une valeur propre de $P(u)$.

Remarque : L'inclusion $\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \subset \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$ peut être stricte.
Considérer par exemple une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $P(X) = X^2$.

Théorème 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et P un polynôme annulateur non nul de u.

Alors toute valeur propre (dans $\mathbb{K}$) de u est racine de P (dans $\mathbb{K}$) (autrement dit : $\mathrm{Sp}(u)$ est **inclus** dans l'ensemble des racines de P).

Corollaire:

> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ $(x \neq 0)$.
On a donc $u(x) = \lambda x$, et d'après la proposition précédente, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Puisque $x \neq 0$, $P(\lambda)$ est donc une valeur propre de $P(u)$.

Remarque : L'inclusion $\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \ \subset \ \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$ peut être stricte.
Considérer par exemple une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $P(X) = X^2$.

Théorème 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et P un polynôme annulateur non nul de u.

Alors toute valeur propre (dans $\mathbb{K}$) de u est racine de P (dans $\mathbb{K}$) (autrement dit : $\mathrm{Sp}(u)$ est **inclus** dans l'ensemble des racines de P).

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ $(x \neq 0)$. On vient de voir que, pour tout polynôme P, on a $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Puisque $x \neq 0$, et que P est annulateur de u $(P(u) = 0)$, on en déduit $P(\lambda) = 0$.

Corollaire:

> Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ ($x \neq 0$).
On a donc $u(x) = \lambda x$, et d'après la proposition précédente, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Puisque $x \neq 0$, $P(\lambda)$ est donc une valeur propre de $P(u)$.

Remarque : L'inclusion $\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\} \subset \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$ peut être stricte.
Considérer par exemple une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $P(X) = X^2$.

Théorème 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et P un polynôme annulateur non nul de u.

Alors toute valeur propre (dans $\mathbb{K}$) de u est racine de P (dans $\mathbb{K}$) (autrement dit : $\mathrm{Sp}(u)$ est **inclus** dans l'ensemble des racines de P).

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $x \in E_\lambda(u)$ ($x \neq 0$). On vient de voir que, pour tout polynôme P, on a $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Puisque $x \neq 0$, et que P est annulateur de u ($P(u) = 0$), on en déduit $P(\lambda) = 0$.

Remarque : La réciproque est FAUSSE !
Par exemple, si p est un projecteur, le polynôme $X(X-1)(X-2)$ est bien annulateur de p, mais 2 n'est pas valeur propre de p !

► Dans toute la suite, on supposera E de dimension finie. ◄

ÉLÉMENTS PROPRES D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $V \neq 0$, tel que $AV = \lambda V$.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une <u>valeur propre</u> de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\underline{V \neq 0}$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le <u>spectre</u> de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une <u>valeur propre</u> de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\underline{V \neq 0}$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le <u>spectre</u> de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

- On dit que $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est <u>vecteur propre</u> de A si et seulement si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $V \neq 0$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
- On dit que $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$.

  On appelle alors sous-espace propre de A associé à λ l'ensemble $E_\lambda(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AV = \lambda V\}$.
  C'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $V \neq 0$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
- On dit que $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$.

  On appelle alors sous-espace propre de A associé à λ l'ensemble $E_\lambda(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AV = \lambda V\}$.
  C'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque : Si A est une matrice réelle, on peut considérer ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes, selon que l'on résout l'équation $AV = \lambda V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a bien sûr : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $V \neq 0$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
- On dit que $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$.

  On appelle alors sous-espace propre de A associé à λ l'ensemble $E_\lambda(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AV = \lambda V\}$.
  C'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque : Si A est une matrice réelle, on peut considérer ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes, selon que l'on résout l'équation $AV = \lambda V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a bien sûr : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On sait alors qu'il existe un et un seul endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors les valeurs propres de A (dans $\mathbb{K}$) sont exactement les valeurs propres de u.

Définition 5

Soit n un entier $\geqslant 1$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $V \neq 0$, tel que $AV = \lambda V$.

  L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

- On dit que $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$.

  On appelle alors sous-espace propre de A associé à λ l'ensemble $E_\lambda(A) = \{V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AV = \lambda V\}$.
  C'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque : Si A est une matrice réelle, on peut considérer ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes, selon que l'on résout l'équation $AV = \lambda V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a bien sûr : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On sait alors qu'il existe un et un seul endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors les valeurs propres de A (dans $\mathbb{K}$) sont exactement les valeurs propres de u.

Démonstration

En effet, si V est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur $x \in E$, on a :
$AV = \lambda V \iff u(x) = \lambda x$.

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Démonstration

car c'est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, et le résultat a déjà été démontré dans ce cas.

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Démonstration

car c'est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, et le résultat a déjà été démontré dans ce cas.

Proposition 9

Deux matrices semblables ont même valeurs propres.

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Démonstration

car c'est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, et le résultat a déjà été démontré dans ce cas.

Proposition 9

Deux matrices semblables ont même valeurs propres.

Démonstration

Si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A')$.

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Démonstration

car c'est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, et le résultat a déjà été démontré dans ce cas.

Proposition 9

Deux matrices semblables ont même valeurs propres.

Démonstration

Si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A')$.

On peut aussi faire le calcul : si $A' = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors

$$\forall\, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A'V = \lambda V \Longleftrightarrow A(PV) = \lambda PV$$

Proposition 8

Toute matrice carrée d'ordre n possède **au plus** n valeurs propres.

Démonstration

car c'est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, et le résultat a déjà été démontré dans ce cas.

Proposition 9

Deux matrices semblables ont même valeurs propres.

Démonstration

Si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A')$.

On peut aussi faire le calcul : si $A' = P^{-1}AP$ avec P inversible, alors

$$\forall\, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A'V = \lambda V \iff A(PV) = \lambda PV$$

et le résultat découle du fait que $V \neq 0 \iff PV \neq 0$ car P inversible.

DIAGONALISABILITÉ

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Un tel endomorphisme u est dit <u>diagonalisable</u>.

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Un tel endomorphisme u est dit diagonalisable.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Il suffit de considérer une base de E formée de la réunion de bases des $E_\lambda(u)$ (cf. cours sur les sommes directes).

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Un tel endomorphisme u est dit diagonalisable.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Il suffit de considérer une base de E formée de la réunion de bases des $E_\lambda(u)$ (cf. cours sur les sommes directes).
- (2) $\Rightarrow$ (3) : Par définition d'un vecteur propre, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u alors il existe des scalaires λ_i tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ donc $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale, avec sur la diagonale les λ_i.

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Un tel endomorphisme u est dit diagonalisable.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Il suffit de considérer une base de E formée de la réunion de bases des $E_\lambda(u)$ (cf. cours sur les sommes directes).
- (2) $\Rightarrow$ (3) : Par définition d'un vecteur propre, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u alors il existe des scalaires λ_i tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ donc $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale, avec sur la diagonale les λ_i.
- (3) $\Rightarrow$ (1) : S'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de u est diagonale, ce sont des vecteurs propres de u (et les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u).

Théorème 5

Pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est somme (directe) des sous-espaces propres de u, soit : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
2. il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
3. il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Un tel endomorphisme u est dit diagonalisable.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Il suffit de considérer une base de E formée de la réunion de bases des $E_\lambda(u)$ (cf. cours sur les sommes directes).

- (2) $\Rightarrow$ (3) : Par définition d'un vecteur propre, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u alors il existe des scalaires λ_i tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ donc $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale, avec sur la diagonale les λ_i.

- (3) $\Rightarrow$ (1) : S'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de u est diagonale, ce sont des vecteurs propres de u (et les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u).

  Donc les vecteurs de $\mathscr{B}$ appartiennent à $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Donc aussi $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Mais $\mathscr{B}$ est une base, donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E$, et $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on peut supposer les valeurs propres regroupées de sorte que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1 \text{fois}}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_p) = D$$

où les α_i sont distincts.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on peut supposer les valeurs propres regroupées de sorte que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1 \text{fois}}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_p) = D$$

où les α_i sont distincts.

Si x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ est $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $u(x) = \lambda x$ équivaut à $DV = \lambda V$.

Il est alors clair que, si λ est différent de l'un des α_i, cette équation admet pour seule solution $V = 0$ donc λ n'est pas valeur propre.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on peut supposer les valeurs propres regroupées de sorte que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1 \text{fois}}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_p) = D$$

où les α_i sont distincts.

Si x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ est $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $u(x) = \lambda x$ équivaut à $DV = \lambda V$.

Il est alors clair que, si λ est différent de l'un des α_i, cette équation admet pour seule solution $V = 0$ donc λ n'est pas valeur propre.

Ainsi, les coefficients diagonaux de D sont **exactement** les valeurs propres de u.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on peut supposer les valeurs propres regroupées de sorte que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1 \text{fois}}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_p) = D$$

où les α_i sont distincts.

Si x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ est $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $u(x) = \lambda x$ équivaut à $DV = \lambda V$.

Il est alors clair que, si λ est différent de l'un des α_i, cette équation admet pour seule solution $V = 0$ donc λ n'est pas valeur propre.

Ainsi, les coefficients diagonaux de D sont **exactement** les valeurs propres de u.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre α_1 (par exemple) s'obtient alors en résolvant le système $DV = \alpha_1 V$, et il est facile de voir que ce système équivaut à $x_{m_1+1} = \cdots = x_n = 0$, de sorte que $E\alpha_1(u)$ est **exactement** le sous-espace vectoriel engendré par les m_1 premiers vecteurs de base.

Précisions

Supposons que u est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. On a vu que les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u et que les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on peut supposer les valeurs propres regroupées de sorte que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1 \text{fois}}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_p) = D$$

où les α_i sont distincts.

Si x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ est $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $u(x) = \lambda x$ équivaut à $DV = \lambda V$.

Il est alors clair que, si λ est différent de l'un des α_i, cette équation admet pour seule solution $V = 0$ donc λ n'est pas valeur propre.

Ainsi, les coefficients diagonaux de D sont **exactement** les valeurs propres de u.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre α_1 (par exemple) s'obtient alors en résolvant le système $DV = \alpha_1 V$, et il est facile de voir que ce système équivaut à $x_{m_1+1} = \cdots = x_n = 0$, de sorte que $E\alpha_1(u)$ est **exactement** le sous-espace vectoriel engendré par les m_1 premiers vecteurs de base.

On obtient un résultat similaire pour les autres valeurs propres.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Symétries** : si u est la symétrie par rapport à F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_{-1}(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Symétries** : si u est la symétrie par rapport à F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_{-1}(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Symétries** : si u est la symétrie par rapport à F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_{-1}(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$.

4. Étude de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array} \right.$.

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Symétries** : si u est la symétrie par rapport à F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_{-1}(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$.

4. Étude de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array} \right.$.

   Déjà, φ est bien un **endomorphisme** de $\mathbb{K}_n[X]$ (vérification facile).

Exemples

1. **Homothéties** : si u est une homothétie de rapport α, sa matrice dans toute base est αI_n, donc u est diagonalisable.

2. **Projections** : si u est la projection sur F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_0(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve en particulier une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **Symétries** : si u est la symétrie par rapport à F de direction G (avec $F \oplus G = E$), on a déjà vu que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et que $F = E_1(u)$ et $G = E_{-1}(p)$.

   Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires, et u est diagonalisable.

   On retrouve une propriété déjà vue : il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$.

4. Étude de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{array} \right.$.

   Déjà, φ est bien un **endomorphisme** de $\mathbb{K}_n[X]$ (vérification facile). De plus pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\varphi(X^k) = (k-1)X^k$, ce qui montre que la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base de vecteurs propres. φ est donc diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 0, 1, \dots, n-1\}$.

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Démonstration

En effet, on sait déjà que la somme des sous-espaces propres de u est directe (théorème 3). On sait aussi (cours sur les sommes directes), que $\dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$.

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Démonstration

En effet, on sait déjà que la somme des sous-espaces propres de u est directe (théorème 3). On sait aussi (cours sur les sommes directes), que $\dim\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$. Donc :

$$u \text{ diagonalisable} \underset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \Longleftrightarrow \dim E = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)).$$

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Théorème 7: (et définition 6)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>diagonalisable</u> si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés *équivalentes* suivantes :

1. A est semblable à une matrice diagonale d'ordre n, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale d'ordre n telles que : $D = P^{-1}AP$ (ou $A = PDP^{-1}$).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}_E$ une base de E telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ où $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable.

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Théorème 7: (et définition 6)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés *équivalentes* suivantes :

1. A est semblable à une matrice diagonale d'ordre n, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale d'ordre n telles que : $D = P^{-1}AP$ (ou $A = PDP^{-1}$).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}_E$ une base de E telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ où $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable.

Démonstration

- Supposons (1) vérifiée, et reprenons les notations de (2). Si on considère alors la base $\mathscr{B}'_E$ de E telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$ est P, la relation $D = P^{-1}AP$ signifie que D est la matrice de u dans $\mathscr{B}'_E$. Cette matrice étant diagonale, cela signifie que u est diagonalisable.

Théorème 6

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim E$.

Théorème 7: (et définition 6)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés *équivalentes* suivantes :

1. A est semblable à une matrice diagonale d'ordre n, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale d'ordre n telles que : $D = P^{-1}AP$ (ou $A = PDP^{-1}$).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}_E$ une base de E telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ où $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable.

Démonstration

- Supposons (1) vérifiée, et reprenons les notations de (2). Si on considère alors la base $\mathscr{B}'_E$ de E telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$ est P, la relation $D = P^{-1}AP$ signifie que D est la matrice de u dans $\mathscr{B}'_E$. Cette matrice étant diagonale, cela signifie que u est diagonalisable.
- Supposons (2) vérifiée. u étant diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B}'_E$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale D. Si l'on note alors P la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$, on a $D = P^{-1}AP$, d'où (1).

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0 \; .$$

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0\ .$$

Démonstration

C'est immédiat puisque λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, ce qui équivaut à non bijective puisque E est de dimension finie.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0\ .$$

Démonstration

C'est immédiat puisque λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, ce qui équivaut à non bijective puisque E est de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0\ .$$

Démonstration

C'est immédiat puisque λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, ce qui équivaut à non bijective puisque E est de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D'après la formule de développement du déterminant, il apparaît clairement que $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ est une fonction polynôme en λ, de degré n.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0 \,.$$

Démonstration

C'est immédiat puisque λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, ce qui équivaut à non bijective puisque E est de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} .$$

D'après la formule de développement du déterminant, il apparaît clairement que $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ est une fonction polynôme en λ, de degré n.

Remarques : Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, et si A' est la matrice de u dans cette base, on a :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A') \,.$$

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0\ .$$

Démonstration

C'est immédiat puisque λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non injective, ce qui équivaut à non bijective puisque E est de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Alors :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D'après la formule de développement du déterminant, il apparaît clairement que $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$ est une fonction polynôme en λ, de degré n.

Remarques : Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, et si A' est la matrice de u dans cette base, on a :

$$\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A')\ .$$

En effet, le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie ; ou on peut aussi remarquer que, puisque A et A' sont semblables, il en est de même de $\lambda I_n - A$ et de $\lambda I_n - A'$ (car $A' = P^{-1}AP \Longrightarrow (A' - \lambda I_n) = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$), donc ces deux matrices ont même déterminant.

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\,,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \quad \text{ou, en abrégé : } \chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)\,.$$

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \ \text{ ou, en abrégé : } \chi_u = \det(X \mathrm{Id}_E - u).$$

D'après la remarque précédente, si $\mathscr{B}_E$ est une base quelconque de E, et si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \ \text{ ou simplement : } \chi_u = \det(X \mathrm{I}_n - A).$$

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ , } \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \quad \text{ou, en abrégé : } \chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u) \text{ .}$$

D'après la remarque précédente, si $\mathscr{B}_E$ est une base quelconque de E, et si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ , } \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \quad \text{ou simplement : } \chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - A).$$

Le polynôme $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ s'appelle naturellement le polynôme caractéristique de la matrice A.

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \quad \text{ou, en abrégé : } \chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)\,.$$

D'après la remarque précédente, si $\mathscr{B}_E$ est une base quelconque de E, et si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \quad \text{ou simplement : } \chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - A).$$

Le polynôme $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ s'appelle naturellement le polynôme caractéristique de la matrice A.

D'après la remarque précédente, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \quad \text{ou, en abrégé : } \chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)\,.$$

D'après la remarque précédente, si $\mathscr{B}_E$ est une base quelconque de E, et si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \quad \text{ou simplement : } \chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - A).$$

Le polynôme $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ s'appelle naturellement le polynôme caractéristique de la matrice A.

D'après la remarque précédente, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Théorème 9

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

  les valeurs propres de u sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_u.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

  les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$)sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A dans $\mathbb{K}$)

Définition 7

On appelle polynôme caractéristique d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ le polynôme, noté χ_u, défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \ \text{ ou, en abrégé :}\ \chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)\,.$$

D'après la remarque précédente, si $\mathscr{B}_E$ est une base quelconque de E, et si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$, on a aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) \ \text{ ou simplement :}\ \chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - A).$$

Le polynôme $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ s'appelle naturellement le polynôme caractéristique de la matrice A.

D'après la remarque précédente, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Théorème 9

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

  les valeurs propres de u sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_u.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

  les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$)sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A dans $\mathbb{K}$)

Démonstration

Conséquence immédiate du théorème 8.

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Pour cette raison, il est important de distinguer dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\}$$

et :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\} \ .$$

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Pour cette raison, il est important de distinguer dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\}$$

et :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\} \ .$$

On a évidemment : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ mais il n'y a pas nécessairement égalité.

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Pour cette raison, il est important de distinguer dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\}$$

et :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\} \ .$$

On a évidemment : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ mais il n'y a pas nécessairement égalité.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Pour cette raison, il est important de distinguer dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\}$$

et :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\} \ .$$

On a évidemment : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ mais il n'y a pas nécessairement égalité.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de $A^\top$ est égal à celui de A ($\chi_{A^\top} = \chi_A$). Il en résulte que $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$.

Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on peut aussi la considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc étudier ses valeurs propres réelles ou ses valeurs propres complexes.

Pour cette raison, il est important de distinguer dans ce cas :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ \text{ tq } \ \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\}$$

et :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \text{ tq } \ \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = 0\} \ .$$

On a évidemment : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ mais il n'y a pas nécessairement égalité.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de $A^\top$ est égal à celui de A ($\chi_{A^\top} = \chi_A$). Il en résulte que $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$.

Démonstration

En effet, $\det(XI_n - A^\top) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A)$.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique χ_u de u est :

- de degré n :
- de coefficient dominant égal 1 (il est donc *unitaire*) ;
- le coefficient du terme en X^{n-1} est égal à $-\operatorname{tr} u$;
- le coefficient constant est égal à $(-1)^n \det u$.

Ainsi, χ_u peut s'écrire : $\chi_u = X^n - \operatorname{tr} u \, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique χ_u de u est :

- de degré n :
- de coefficient dominant égal 1 (il est donc *unitaire*) ;
- le coefficient du terme en X^{n-1} est égal à $-\operatorname{tr} u$;
- le coefficient constant est égal à $(-1)^n \det u$.

Ainsi, χ_u peut s'écrire : $\chi_u = X^n - \operatorname{tr} u\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Démonstration

- $\chi_u(0) = \det(-u)$, ce qui donne le terme constant.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique χ_u de u est :

- de degré n :
- de coefficient dominant égal 1 (il est donc *unitaire*) ;
- le coefficient du terme en X^{n-1} est égal à $-\operatorname{tr} u$;
- le coefficient constant est égal à $(-1)^n \det u$.

Ainsi, χ_u peut s'écrire : $\chi_u = X^n - \operatorname{tr} u\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Démonstration

- $\chi_u(0) = \det(-u)$, ce qui donne le terme constant.
- Les autres propriétés s'obtiennent, par exemple, en développant le déterminant de $X\mathrm{Id}_E - u$ selon la première colonne : on obtient $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii}) + Q$, où Q est un polynôme de degré $\leqslant n-2$...

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique χ_u de u est :

- de degré n :
- de coefficient dominant égal 1 (il est donc *unitaire*) ;
- le coefficient du terme en X^{n-1} est égal à $-\operatorname{tr} u$;
- le coefficient constant est égal à $(-1)^n \det u$.

Ainsi, χ_u peut s'écrire : $\chi_u = X^n - \operatorname{tr} u\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Démonstration

- $\chi_u(0) = \det(-u)$, ce qui donne le terme constant.
- Les autres propriétés s'obtiennent, par exemple, en développant le déterminant de $X\mathrm{Id}_E - u$ selon la première colonne : on obtient $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}) + Q$, où Q est un polynôme de degré $\leqslant n-2$...

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

On dit que λ est <u>valeur propre d'ordre de multiplicité m de u</u> si λ est une racine d'ordre m du polynôme caractéristique χ_u de u.

Rappels

- **Définition :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si a est une racine de P, on dit que a est <u>racine d'ordre au moins k</u> ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $(X-a)^k$ divise P.
  - On dit que a est <u>racine d'ordre k</u> si et seulement si $(X-a)^k$ divise P **et** $(X-a)^{k+1}$ ne divise **pas** P.

    L'entier k s'appelle alors <u>l'ordre de multiplicité</u> de la racine a.

Rem : On dira que a est d'ordre 0 si a n'est pas racine de P.

Rappels

- **Définition :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si a est une racine de P, on dit que a est <u>racine d'ordre au moins k</u> ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $(X-a)^k$ divise P.
  - On dit que a est <u>racine d'ordre k</u> si et seulement si $(X-a)^k$ divise P **et** $(X-a)^{k+1}$ ne divise **pas** P.

    L'entier k s'appelle alors <u>l'ordre de multiplicité</u> de la racine a.

Rem : On dira que a est d'ordre 0 si a n'est pas racine de P.

- **Théorème :**
  - a est racine d'ordre au moins k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
  - a est racine d'ordre exactement k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ **et** $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Rappels

- **Définition :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si a est une racine de P, on dit que a est racine d'ordre au moins k ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $(X-a)^k$ divise P.
  - On dit que a est racine d'ordre k si et seulement si $(X-a)^k$ divise P **et** $(X-a)^{k+1}$ ne divise **pas** P.

    L'entier k s'appelle alors l'ordre de multiplicité de la racine a.

Rem : On dira que a est d'ordre 0 si a n'est pas racine de P.

- **Théorème :**
  - a est racine d'ordre au moins k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
  - a est racine d'ordre exactement k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ **et** $P^{(k)}(a) \neq 0$.
- **Définition :**

On dit qu'un polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (ou scindé sur $\mathbb{K}$) s'il admet dans $\mathbb{K}$ des racines dont la somme des ordres de multiplicité est égale à son degré.

Rappels

- **Définition :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si a est une racine de P, on dit que a est racine d'ordre au moins k ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $(X-a)^k$ divise P.
  - On dit que a est racine d'ordre k si et seulement si $(X-a)^k$ divise P **et** $(X-a)^{k+1}$ ne divise **pas** P.

    L'entier k s'appelle alors l'ordre de multiplicité de la racine a.

Rem : On dira que a est d'ordre 0 si a n'est pas racine de P.

- **Théorème :**
  - a est racine d'ordre au moins k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
  - a est racine d'ordre exactement k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ **et** $P^{(k)}(a) \neq 0$.
- **Définition :**

On dit qu'un polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (ou scindé sur $\mathbb{K}$) s'il admet dans $\mathbb{K}$ des racines dont la somme des ordres de multiplicité est égale à son degré.

Cela équivaut à dire que P peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{k_i}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et où les } a_i \in \mathbb{K} \text{ sont distincts.}$$

Rappels

- **Définition :** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  - Si a est une racine de P, on dit que a est racine d'ordre au moins k ($k \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $(X-a)^k$ divise P.
  - On dit que a est racine d'ordre k si et seulement si $(X-a)^k$ divise P **et** $(X-a)^{k+1}$ ne divise **pas** P.

    L'entier k s'appelle alors l'ordre de multiplicité de la racine a.

Rem : On dira que a est d'ordre 0 si a n'est pas racine de P.

- **Théorème :**
  - a est racine d'ordre au moins k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
  - a est racine d'ordre exactement k de P ssi : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ **et** $P^{(k)}(a) \neq 0$.
- **Définition :**

On dit qu'un polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (ou scindé sur $\mathbb{K}$) s'il admet dans $\mathbb{K}$ des racines dont la somme des ordres de multiplicité est égale à son degré.

Cela équivaut à dire que P peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{k_i}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et où les } a_i \in \mathbb{K} \text{ sont distincts.}$$

Il est également commode de l'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-x_i),$$

les x_i étant les racines de P, chacune étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité.

Remarques

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique χ_u est *scindé* (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$;
il en admet même exactement n (où $n = \dim(E)$), en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

Remarques

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique χ_u est *scindé* (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$;
il en admet même exactement n (où $n = \dim(E)$), en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

Ainsi, dans ce cas, on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \text{ (où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres, distinctes ou non, de } u\text{)}$$

Remarques

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique χ_u est *scindé* (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$;
il en admet même exactement n (où $n = \dim(E)$), en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

Ainsi, dans ce cas, on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \text{ (où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres, distinctes ou non, de } u\text{)}$$

ou encore : $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ (où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ).

Remarques

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique χ_u est *scindé* (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$;
il en admet même exactement n (où $n = \dim(E)$), en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

Ainsi, dans ce cas, on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \text{ (où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres, distinctes ou non, de } u\text{)}$$

ou encore : $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ (où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ).

En développant la première des égalités ci-dessus, on trouve alors les relations (*très importantes*) :

$$\boxed{\operatorname{tr} u = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda} \qquad \boxed{\det u = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda}$$

Remarques

Tout endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique χ_u est *scindé* (ce qui est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$;
il en admet même exactement n (où $n = \dim(E)$), en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

Ainsi, dans ce cas, on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \text{ (où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres, distinctes ou non, de } u\text{)}$$

ou encore : $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ (où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ).

En développant la première des égalités ci-dessus, on trouve alors les relations (*très importantes*) :

$$\boxed{\operatorname{tr} u = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda} \qquad \boxed{\det u = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda}$$

On prendra soin cependant à n'utiliser ces relations que lorsque **le polynôme caractéristique de u est scindé** (donc, dans le cas d'une matrice, en considérant les valeurs propres complexes).

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Démonstration

Soit $p = \dim F$, et soit $\mathscr{B}_F$ une base de F, que l'on complète en une base $\mathscr{B}_E$ de E. La matrice de u dans cette base est alors de la forme $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où A_1 est la matrice de v dans $\mathscr{B}_F$.

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Démonstration

Soit $p = \dim F$, et soit $\mathscr{B}_F$ une base de F, que l'on complète en une base $\mathscr{B}_E$ de E. La matrice de u dans cette base est alors de la forme $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où A_1 est la matrice de v dans $\mathscr{B}_F$.

Un calcul de déterminant par blocs donne alors :

$$\chi_u = \det(X\mathrm{I}_n - A) = \det(X\mathrm{I}_p - A_1) \times \det(X\mathrm{I}_{n-p} - A_2) = \chi_v \times \det(X\mathrm{I}_{n-p} - A_2),$$

donc χ_u est multiple de χ_v.

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et m_λ son ordre de multiplicité (dans χ_u). Alors on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda .$$

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et m_λ son ordre de multiplicité (dans χ_u). Alors on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda .$$

Démonstration

- $1 \leqslant \dim E_\lambda(u)$ est immédiat, puisque $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ par définition.

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et m_λ son ordre de multiplicité (dans χ_u). Alors on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda \,.$$

Démonstration

- $1 \leqslant \dim E_\lambda(u)$ est immédiat, puisque $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ par définition.
- $E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme v induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ.

Restriction à un sous-espace vectoriel stable

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Alors le polynôme caractéristique de v, χ_v, divise le polynôme caractéristique de u, χ_u .

Théorème 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et m_λ son ordre de multiplicité (dans χ_u). Alors on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda\,.$$

Démonstration

- $1 \leqslant \dim E_\lambda(u)$ est immédiat, puisque $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ par définition.
- $E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme v induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ.

  Donc $\chi_v = (X-\lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$, et, puisque χ_v divise χ_u, on obtient l'inégalité voulue.

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si :

$$\chi_u \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \text{, on a : } m_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si :

$$\mathcal{X}_u \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \text{ on a : } m_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Démonstration

- Si u est diagonalisable et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ d'où :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \underset{\text{th. 11}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leqslant \deg \mathcal{X}_u = \dim E,$$

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si :

$$\chi_u \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \text{ on a : } m_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Démonstration

- Si u est diagonalisable et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ d'où :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \underset{\text{th. 11}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leqslant \deg \chi_u = \dim E,$$

  donc toutes les inégalités intermédiaires sont des égalités :

$$\forall i \in [\![1 ; p]\!], \ \dim E_{\lambda_i}(u) = m_{\lambda_i}, \text{ et aussi } \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \deg \chi_u, \text{ c'est-à-dire } \chi_u \text{ scindé.}$$

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si :

$$\chi_u \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \text{ on a : } m_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Démonstration

- Si u est diagonalisable et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ d'où :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \underset{\text{th. 11}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leqslant \deg \chi_u = \dim E,$$

  donc toutes les inégalités intermédiaires sont des égalités :

$$\forall\, i \in [\![1\,;p]\!],\ \dim E_{\lambda_i}(u) = m_{\lambda_i}, \text{ et aussi } \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \deg \chi_u, \text{ c'est-à-dire } \chi_u \text{ scindé.}$$

- Réciproquement, si les hypothèses de l'énoncé sont vérifiées, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u, puisque la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ est directe et que

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \deg \chi_u = \dim E,$$

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est diagonalisable si et seulement si :

$$\chi_u \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \text{ on a : } m_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Démonstration

- Si u est diagonalisable et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ d'où :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \underset{\text{th. 11}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} \leqslant \deg \chi_u = \dim E,$$

  donc toutes les inégalités intermédiaires sont des égalités :

$$\forall\, i \in [\![1\,;p]\!],\ \dim E_{\lambda_i}(u) = m_{\lambda_i}, \text{ et aussi } \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \deg \chi_u, \text{ c'est-à-dire } \chi_u \text{ scindé.}$$

- Réciproquement, si les hypothèses de l'énoncé sont vérifiées, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u, puisque la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ est directe et que

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = \deg \chi_u = \dim E,$$

  on a bien $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$, c'est-à-dire u diagonalisable.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
>
> **SI** u possède n valeurs propres distinctes, **ALORS** u est diagonalisable.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
>
> **SI** u possède n valeurs propres distinctes, **ALORS** u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, dans ce cas, il y a exactement n sous-espaces propres, tous de dimension 1. Ils sont donc supplémentaires.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
>
> **SI** u possède n valeurs propres distinctes, **ALORS** u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, dans ce cas, il y a exactement n sous-espaces propres, tous de dimension 1. Ils sont donc supplémentaires.

La réciproque est fausse ! il ne s'agit là que d'une condition *suffisante*, et non nécessaire, de diagonalisabilité.
Considérer par exemple $u = \mathrm{Id}_E$: u est évidemment diagonalisable (puisque sa matrice dans toute base est I_n), mais u admet une seule valeur propre, 1.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
>
> **SI** u possède n valeurs propres distinctes, **ALORS** u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, dans ce cas, il y a exactement n sous-espaces propres, tous de dimension 1. Ils sont donc supplémentaires.

La réciproque est fausse ! il ne s'agit là que d'une condition *suffisante*, et non nécessaire, de diagonalisabilité.
Considérer par exemple $u = \mathrm{Id}_E$: u est évidemment diagonalisable (puisque sa matrice dans toute base est I_n), mais u admet une seule valeur propre, 1.

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
>
> Si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

Corollaire:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

SI u possède n valeurs propres distinctes, **ALORS** u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, dans ce cas, il y a exactement n sous-espaces propres, tous de dimension 1. Ils sont donc supplémentaires.

La réciproque est fausse ! il ne s'agit là que d'une condition *suffisante*, et non nécessaire, de diagonalisabilité.
Considérer par exemple $u = \mathrm{Id}_E$: u est évidemment diagonalisable (puisque sa matrice dans toute base est I_n), mais u admet une seule valeur propre, 1.

Corollaire:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

Démonstration

en effet, dans ce cas, u possède n valeurs propres distinctes, les racines de χ_u, et on applique le corollaire précédent.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} =$$

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (double) et -1 (simple).

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (double) et -1 (simple). On cherche ensuite les sous-espaces propres :

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (double) et -1 (simple). On cherche ensuite les sous-espaces propres :

- Pour la valeur propre 1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = V \iff (A - I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff 2y + z = 0.$

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 (double) et -1 (simple). On cherche ensuite les sous-espaces propres :

- Pour la valeur propre 1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = V \iff (A - I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff 2y + z = 0.$

  On reconnaît là l'équation d'un (hyper)plan, engendré (par ex.) par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Pour la valeur propre -1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = -V \iff (A + I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff x = z = -y$.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Pour la valeur propre -1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = -V \iff (A + I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ \quad -2y - 2z = 0 \\ \quad 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff x = z = -y.$

  On reconnaît là un système d'équations d'une droite vectorielle (intersection de deux plans), plus précisément la droite de base le vecteur $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Pour la valeur propre -1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = -V \iff (A + I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff x = z = -y$.

  On reconnaît là un système d'équations d'une droite vectorielle (intersection de deux plans), plus précisément la droite de base le vecteur $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Directement d'après le cours on peut affirmer que A est diagonalisable : par exemple, on peut dire que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3, ou que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Quelques exercices

Exercice 1

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Pour la valeur propre -1 :

  Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $AV = -V \iff (A + I_3)V = 0 \iff \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 0 \\ \quad -2y - 2z = 0 \\ \quad 4y + 4z = 0 \end{cases} \iff x = z = -y.$

  On reconnaît là un système d'équations d'une droite vectorielle (intersection de deux plans), plus précisément la droite de base le vecteur $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Directement d'après le cours on peut affirmer que A est diagonalisable : par exemple, on peut dire que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3, ou que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Et plus précisément : $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants)

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants), mais il y a bien plus rapide.

En effet, on remarque que $B - I_4$ est une matrice de rang 1; donc $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 3$.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants), mais il y a bien plus rapide.

En effet, on remarque que $B - I_4$ est une matrice de rang 1; donc $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 3$. Puisque $\operatorname{Ker}(B - I_4)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, on en déduit que 1 est valeur propre de B, d'ordre de multiplicité (a priori) supérieur ou égal à 3.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants), mais il y a bien plus rapide.

En effet, on remarque que $B - I_4$ est une matrice de rang 1; donc $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 3$. Puisque $\operatorname{Ker}(B - I_4)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, on en déduit que 1 est valeur propre de B, d'ordre de multiplicité (a priori) supérieur ou égal à 3.

Puisque la somme des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$ a priori) est égale à $\operatorname{tr}(B) = 8$, on en déduit que les valeurs propres de B sont 1, d'ordre 3 et 5, simple.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants), mais il y a bien plus rapide.

En effet, on remarque que $B - I_4$ est une matrice de rang 1; donc $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 3$. Puisque $\operatorname{Ker}(B - I_4)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, on en déduit que 1 est valeur propre de B, d'ordre de multiplicité (a priori) supérieur ou égal à 3.

Puisque la somme des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$ a priori) est égale à $\operatorname{tr}(B) = 8$, on en déduit que les valeurs propres de B sont 1, d'ordre 3 et 5, simple.

On pouvait aussi remarquer que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour montrer que 5 est valeur propre.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

Le calcul du polynôme caractéristique de B, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $XI_4 - B$ est classique (matrice déjà rencontrée, voir chapitre sur les déterminants), mais il y a bien plus rapide.

En effet, on remarque que $B - I_4$ est une matrice de rang 1; donc $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 3$. Puisque $\operatorname{Ker}(B - I_4)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, on en déduit que 1 est valeur propre de B, d'ordre de multiplicité (a priori) supérieur ou égal à 3.

Puisque la somme des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$ a priori) est égale à $\operatorname{tr}(B) = 8$, on en déduit que les valeurs propres de B sont 1, d'ordre 3 et 5, simple.

On pouvait aussi remarquer que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour montrer que 5 est valeur propre. Et puisque 5 est une valeur propre simple, la dimension du sous-espace propre associé $E_5(A)$ est forcément égale à 1, ce qui prouve que $E_5(A)$ est exactement la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

Enfin, un calcul simple (résolution du système $AV = V$) montre que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$, dont il est facile de trouver une base.

Quelques exercices

Exercice 2

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

Enfin, un calcul simple (résolution du système $AV = V$) montre que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$, dont il est facile de trouver une base.

Conclusion : $B = PDP^{-1}$ avec (par exemple) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(5, 1, 1, 1)$.

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution

On commence par diagonaliser la matrice A.

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution

On commence par diagonaliser la matrice A.

On trouve, après avoir calculé χ_A, $Sp(A) = \{0, 1, 16\}$.

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution

On commence par diagonaliser la matrice A.

On trouve, après avoir calculé χ_A, $Sp(A) = \{0, 1, 16\}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cela se voyait...), un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et enfin un vecteur propre associé à la valeur propre 16 est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les 3 valeurs propres étant distintes, A est diagonalisable (ou autres arguments...), et on a : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, 1, 16)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution (suite)

$A = PDP^{-1}$, et en posant $M' = P^{-1}MP$ on a :

$$M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff M'^2 = D.$$

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution (suite)

$A = PDP^{-1}$, et en posant $M' = P^{-1}MP$ on a :

$$M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff M'^2 = D.$$

Or il est clair que si $M'^2 = D$ alors M' et D commutent. On en déduit alors que M' est diagonale (**cf. un résultat important dans le cours sur les matrices**, ou bien refaire le calcul à la main ici).

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution (suite)

$A = PDP^{-1}$, et en posant $M' = P^{-1}MP$ on a :

$$M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff M'^2 = D.$$

Or il est clair que si $M'^2 = D$ alors M' et D commutent. On en déduit alors que M' est diagonale (**cf. un résultat important dans le cours sur les matrices**, ou bien refaire le calcul à la main ici).

Si on pose alors $M' = \mathrm{diag}(a, b, c)$ on aura donc $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 16$.

Quelques exercices

Exercice 3

Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = A \text{ où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution (suite)

$A = PDP^{-1}$, et en posant $M' = P^{-1}MP$ on a :

$$M^2 = A \iff P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \iff M'^2 = D.$$

Or il est clair que si $M'^2 = D$ alors M' et D commutent. On en déduit alors que M' est diagonale (**cf. un résultat important dans le cours sur les matrices**, ou bien refaire le calcul à la main ici).

Si on pose alors $M' = \mathrm{diag}(a, b, c)$ on aura donc $a^2 = 0$, $b^2 = 1$ et $c^2 = 16$.

On en déduit $M' = \mathrm{diag}(0, \varepsilon, 4\varepsilon')$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$, puis les 4 solutions $M = PM'P^{-1}$, que l'on peut calculer explicitement après avoir déterminé $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

UTILISATION DES POLYNÔMES D’ENDOMORPHISMES

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E.
On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$,
$P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E.
On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$,
$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que

$$\frac{1}{P} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{(X - \lambda_j)}\,.$$

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E.
On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$,
$P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que
$\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\alpha_j}{(X - \lambda_j)}$ · Donc on peut écrire : $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j$, en ayant posé $L_j = \dfrac{P}{X - \lambda_j} = \displaystyle\prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)$.

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E.
On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$,
$P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que
$\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\alpha_j}{(X - \lambda_j)}$ · Donc on peut écrire : $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j$, en ayant posé $L_j = \dfrac{P}{X - \lambda_j} = \displaystyle\prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)$.
On en déduit, en appliquant cette égalité polynomiale à l'endomorphisme u :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall\, x \in E,\ x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u)(x).$$

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E. On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que $\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{(X - \lambda_j)}$. Donc on peut écrire : $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j$, en ayant posé $L_j = \dfrac{P}{X - \lambda_j} = \displaystyle\prod_{i \neq j} (X - \lambda_i)$.

On en déduit, en appliquant cette égalité polynomiale à l'endomorphisme u :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall\, x \in E,\ x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u)(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \circ L_j(u) = P(u)$, donc $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)(L_j(u)(x)) = P(u)(x) = 0$ et ainsi

$L_j(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$.

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E.
On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$,
$P = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que
$\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{(X-\lambda_j)}$ · Donc on peut écrire : $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j$, en ayant posé $L_j = \dfrac{P}{X-\lambda_j} = \displaystyle\prod_{i\neq j}(X-\lambda_i)$.
On en déduit, en appliquant cette égalité polynomiale à l'endomorphisme u :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall\, x \in E,\ x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u)(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)\circ L_j(u) = P(u)$, donc $(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)(L_j(u)(x)) = P(u)(x) = 0$ et ainsi
$L_j(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)$. La relation $(*)$ prouve donc l'égalité $E = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)$.

Théorème 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie), et u un endomorphisme de E. On suppose que u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, $P = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p)$ avec les λ_i scalaires distincts.

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P}$: il existe des scalaires α_j tels que $\dfrac{1}{P} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{(X-\lambda_j)}$. Donc on peut écrire : $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j$, en ayant posé $L_j = \dfrac{P}{X-\lambda_j} = \displaystyle\prod_{i\neq j}(X-\lambda_i)$.
On en déduit, en appliquant cette égalité polynomiale à l'endomorphisme u :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall\, x \in E,\ x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j L_j(u)(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)\circ L_j(u) = P(u)$, donc $(u-\lambda_j\mathrm{Id}_E)(L_j(u)(x)) = P(u)(x) = 0$ et ainsi $L_j(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_j\mathrm{Id}_E)$. La relation $(*)$ prouve donc l'égalité $E = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Ker}(u-\lambda_j\mathrm{Id}_E)$. Et le fait que la somme est directe a déjà été vu.

Remarque : Avec les notations du théorème, on sait que les valeurs propres de u sont a priori **incluses** dans l'ensemble des racines de P, c'est-à-dire dans $\{\lambda_i,\ i \in [\![1\,;p]\!]\}$.

Remarque : Avec les notations du théorème, on sait que les valeurs propres de u sont a priori **incluses** dans l'ensemble des racines de P, c'est-à-dire dans $\{\lambda_i,\ i \in [\![1\,;p]\!]\}$.
Il se peut donc, dans l'écriture ci-dessus, que certains des $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ soient réduits à $\{0\}$ (si λ_i n'est pas une valeur propre de u).

Remarque : Avec les notations du théorème, on sait que les valeurs propres de u sont a priori **incluses** dans l'ensemble des racines de P, c'est-à-dire dans $\{\lambda_i,\ i \in [\![1\,;p]\!]\}$.
Il se peut donc, dans l'écriture ci-dessus, que certains des $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ soient réduits à $\{0\}$ (si λ_i n'est pas une valeur propre de u).

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur (non nul) scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et n'ayant que des racines simples, alors u est diagonalisable.

Remarque : Avec les notations du théorème, on sait que les valeurs propres de u sont a priori **incluses** dans l'ensemble des racines de P, c'est-à-dire dans $\{\lambda_i,\ i \in [\![1\,;p]\!]\}$.
Il se peut donc, dans l'écriture ci-dessus, que certains des $\mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)$ soient réduits à $\{0\}$ (si λ_i n'est pas une valeur propre de u).

Théorème 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un polynôme annulateur (non nul) scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et n'ayant que des racines simples, alors u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, d'après le théorème précédent, E est alors somme directe des sous-espaces propres de u (en ne considérant dans la somme $E = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{p} \mathrm{Ker}(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)$ que les « vraies » valeurs propres de u, cf. remarque précédente.)

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Démonstration

1ère façon :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Démonstration

1ère façon :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$. Pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0$, donc

$$P(u)(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right)(x) = \left(\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0\,.$$

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Démonstration

1ère façon :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$. Pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0$, donc

$$P(u)(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right)(x) = \left(\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0\,.$$

u étant diagonalisable, on a : $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$, et puisque la relation $P(u)(x) = 0$ est vérifiée pour tout $x \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, elle l'est pour tout $x \in E$.

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Démonstration

1ère façon :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Soit $i \in [\![1 ; p]\!]$. Pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0$, donc

$$P(u)(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right)(x) = \left(\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0\,.$$

u étant diagonalisable, on a : $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$, et puisque la relation $P(u)(x) = 0$ est vérifiée pour tout $x \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, elle l'est pour tout $x \in E$.

Donc $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, c'est-à-dire P est annulateur de u.

Théorème 16

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Démonstration

1ère façon :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$.

Soit $i \in [\![1\,; p]\!]$. Pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0$, donc

$$P(u)(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right)(x) = \left(\prod_{j \neq i} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x) = 0\,.$$

u étant diagonalisable, on a : $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$, et puisque la relation $P(u)(x) = 0$ est vérifiée pour tout $x \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$, elle l'est pour tout $x \in E$.

Donc $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, c'est-à-dire P est annulateur de u.

2ème façon :

Démonstration matricielle : si u a pour matrice D diagonale dans une base de vecteurs propres, chaque matrice $D - \lambda_i I$ comporte un bloc de zéros à la place des λ_i donc le produit de ces matrices est nul.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable} .$$

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable} .$$

Démonstration

u est diagonalisable, donc en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, P est annulateur de u.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable} .$$

Démonstration

u est diagonalisable, donc en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, P est annulateur de u.

Si P s'écrit $P = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i$, on a $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ soit $\forall\, x \in E,\ \sum_{i=1}^{d} a_i u^i(x) = 0_E$.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable} .$$

Démonstration

u est diagonalisable, donc en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, P est annulateur de u.

Si P s'écrit $P = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i$, on a $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ soit $\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{d} a_i u^i(x) = 0_E$.

Cette relation est en particulier vraie pour $x \in F$, donc, puisque $v = u|_F$: $\forall x \in F,\ \sum_{i=1}^{d} a_i v^i(x) = 0_E$.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Longrightarrow v \text{ diagonalisable}.$$

Démonstration

u est diagonalisable, donc en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, P est annulateur de u.

Si P s'écrit $P = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i$, on a $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ soit $\forall\, x \in E,\ \sum_{i=1}^{d} a_i u^i(x) = 0_E$.

Cette relation est en particulier vraie pour $x \in F$, donc, puisque $v = u|_F$: $\forall\, x \in F,\ \sum_{i=1}^{d} a_i v^i(x) = 0_E$. Cela signifie que $P(v) = 0_{\mathscr{L}(F)}$, donc P est aussi annulateur de v.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement le résultat suivant :

Théorème 17

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Un tel polynôme est, par exemple, $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Théorème 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par u, et $v \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \implies v \text{ diagonalisable} .$$

Démonstration

u est diagonalisable, donc en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $P = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$, P est annulateur de u.

Si P s'écrit $P = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i X^i$, on a $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ soit $\forall\, x \in E,\ \sum\limits_{i=1}^{d} a_i u^i(x) = 0_E$.

Cette relation est en particulier vraie pour $x \in F$, donc, puisque $v = u|_F$: $\forall\, x \in F,\ \sum\limits_{i=1}^{d} a_i v^i(x) = 0_E$. Cela signifie que $P(v) = 0_{\mathscr{L}(F)}$, donc P est aussi annulateur de v. Ainsi v possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc v est diagonalisable.

Remarque : Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

- $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$
- $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v)\ ,\ E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F$

Remarque : Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

- $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$
- $\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(v)\ ,\ E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F$

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
> **On suppose u diagonalisable**. Alors : F est stable par u si et seulement si F admet une base formée de vecteurs propres de u.

Remarque : Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

- $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$
- $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v)$, $E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F$

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
> **On suppose u diagonalisable**. Alors : F est stable par u si et seulement si F admet une base formée de vecteurs propres de u.

Démonstration

Si F est stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est un endomorphisme diagonalisable de F donc par définition F admet une base formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

Remarque : Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

- $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$
- $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v)\ ,\ E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F$

Corollaire:

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
> **On suppose u diagonalisable**. Alors : F est stable par u si et seulement si F admet une base formée de vecteurs propres de u.

Démonstration

Si F est stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est un endomorphisme diagonalisable de F donc par définition F admet une base formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

Réciproquement, si F admet une base formée de vecteurs propres de u, notée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ alors tout vecteur x de F s'écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ donc $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i e_i$ appartient à F c'est-à-dire F stable par u.

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A.

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A. $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. Les valeurs propres sont distinctes, donc chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et A est diagonalisable.

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A. $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. Les valeurs propres sont distinctes, donc chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et A est diagonalisable.

D'après le corollaire précédent, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront donc, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A. $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. Les valeurs propres sont distinctes, donc chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et A est diagonalisable.

D'après le corollaire précédent, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront donc, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les trois droites vectorielles $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$,

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A. $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. Les valeurs propres sont distinctes, donc chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et A est diagonalisable.

D'après le corollaire précédent, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront donc, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les trois droites vectorielles $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$, respectivement engendrées par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

On commence par chercher les éléments propres de A. $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$. Les valeurs propres sont distinctes, donc chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, et A est diagonalisable.

D'après le corollaire précédent, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront donc, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les trois droites vectorielles $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$, respectivement engendrées par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- les trois plans vectoriels $E_i(A) \oplus E_j(A)$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double).

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double). Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 5 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double). Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 5 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double). Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 5 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les deux droites vectorielles $E_{-1}(A)$ et $E_5(A)$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double). Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 5 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les deux droites vectorielles $E_{-1}(A)$ et $E_5(A)$.
- le plan vectoriel $E_{-1}(A) \oplus E_5(A)$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution

Ici les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double). Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à la valeur propre 5 est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est donc pas diagonalisable. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A seront, en les classant selon leur dimension :

- $\{0_E\}$ et E .
- les deux droites vectorielles $E_{-1}(A)$ et $E_5(A)$.
- le plan vectoriel $E_{-1}(A) \oplus E_5(A)$.
- Mais il peut exister d'autres plans stables !

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

  Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Si P est un plan stable par u, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_P induit par u sur P divise χ_u ; ce polynôme étant de degré 2, il s'agit nécessairement de $(X+1)(X-5)$ ou de $(X-5)^2$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

  Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Si P est un plan stable par u, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_P induit par u sur P divise χ_u ; ce polynôme étant de degré 2, il s'agit nécessairement de $(X+1)(X-5)$ ou de $(X-5)^2$.

  Dans le 1er cas, u_P a comme valeurs propres -1 et 5 ; les sous-espaces propres correspondant sont forcément les mêmes que ceux de u donc les vecteurs propres trouvés précédemment appartiennent à P, et on retrouve $P = E_{-1}(u) \oplus E_5(u)$.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot$

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

  Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Si P est un plan stable par u, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_P induit par u sur P divise $\mathcal{X}_u$; ce polynôme étant de degré 2, il s'agit nécessairement de $(X+1)(X-5)$ ou de $(X-5)^2$.

  Dans le 1er cas, u_P a comme valeurs propres -1 et 5 ; les sous-espaces propres correspondant sont forcément les mêmes que ceux de u donc les vecteurs propres trouvés précédemment appartiennent à P, et on retrouve $P = E_{-1}(u) \oplus E_5(u)$.

  Dans le second cas, u_P a comme seule valeur propre 5, et le vecteur propre e_5 de coordonnées $(10, 15, 4)$ appartient nécessairement à P.

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

  Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Si P est un plan stable par u, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_P induit par u sur P divise χ_u ; ce polynôme étant de degré 2, il s'agit nécessairement de $(X+1)(X-5)$ ou de $(X-5)^2$.

  Dans le 1er cas, u_P a comme valeurs propres -1 et 5 ; les sous-espaces propres correspondant sont forcément les mêmes que ceux de u donc les vecteurs propres trouvés précédemment appartiennent à P, et on retrouve $P = E_{-1}(u) \oplus E_5(u)$.

  Dans le second cas, u_P a comme seule valeur propre 5, et le vecteur propre e_5 de coordonnées $(10, 15, 4)$ appartient nécessairement à P. Si $e = (x, y, z)$ est un autre vecteur de P linéairement indépendant de celui-ci, on écrit que P est stable par u si et seulement si $u(e) \in P$ ce qui se traduit par $\det(e_5, e, u(e)) = 0$, soit

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & 6x-6y+5z \\ 1 & y & -4x-y+10z \\ 1 & z & 7x-6y+4z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 6x-6y+5z \\ 0 & y-x & -10x+5y+5z \\ 0 & z-x & x-z \end{vmatrix} = (x-z)(-11x+6y+5z).$$

Exercice 2

Trouver les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

- Mais il peut exister d'autres plans stables !

  Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Si P est un plan stable par u, on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_P induit par u sur P divise χ_u ; ce polynôme étant de degré 2, il s'agit nécessairement de $(X+1)(X-5)$ ou de $(X-5)^2$.

  Dans le 1er cas, u_P a comme valeurs propres -1 et 5 ; les sous-espaces propres correspondant sont forcément les mêmes que ceux de u donc les vecteurs propres trouvés précédemment appartiennent à P, et on retrouve $P = E_{-1}(u) \oplus E_5(u)$.

  Dans le second cas, u_P a comme seule valeur propre 5, et le vecteur propre e_5 de coordonnées $(10, 15, 4)$ appartient nécessairement à P. Si $e = (x, y, z)$ est un autre vecteur de P linéairement indépendant de celui-ci, on écrit que P est stable par u si et seulement si $u(e) \in P$ ce qui se traduit par $\det(e_5, e, u(e)) = 0$, soit

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & 6x-6y+5z \\ 1 & y & -4x-y+10z \\ 1 & z & 7x-6y+4z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 6x-6y+5z \\ 0 & y-x & -10x+5y+5z \\ 0 & z-x & x-z \end{vmatrix} = (x-z)(-11x+6y+5z).$$

  On trouve donc deux plans : celui d'équation $x = z$ et celui d'équation $-11x+6y+5z = 0$; ce dernier est le plan $E_{-1}(u) \oplus E_5(u)$ (car les deux vecteurs propres trouvés vérifient cette équation).

TRIGONALISATION

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit <u>trigonalisable</u> s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathtt{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

   Cela revient à dire que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que : $T = P^{-1}AP$ (ou $A = PTP^{-1}$).

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit <u>trigonalisable</u> s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>trigonalisable</u> si l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

   Cela revient à dire que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que : $T = P^{-1}AP$ (ou $A = PTP^{-1}$).

Théorème 19

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

   Cela revient à dire que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que : $T = P^{-1}AP$ (ou $A = PTP^{-1}$).

Théorème 19

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

• Supposons u trigonalisable : il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est trigonalisable.

   Cela revient à dire que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telles que : $T = P^{-1}AP$ (ou $A = PTP^{-1}$).

Théorème 19

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

• Supposons u trigonalisable : il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Donc $\chi_v = \prod_{i=1}^{n}(X - t_{ii})$ est scindé.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n) \;:\; \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

Démonstration (suite)

- Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.

L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)\ :\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

  - Le résultat est immédiat pour $n = 1$.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)\ :\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$.
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée, et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq χ_{A_n} soit scindé. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $A_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)\ :\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$.
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée, et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq χ_{A_n} soit scindé. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $A_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

  $\chi_u = \chi_{A_n}$ étant scindé possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Soit alors e_1 un vecteur propre associé à cette valeur propre. e_1 étant non nul, on peut construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ par le théorème de la base incomplète.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)\ :\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$.
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée, et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq χ_{A_n} soit scindé. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $A_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

  $\chi_u = \chi_{A_n}$ étant scindé possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Soit alors e_1 un vecteur propre associé à cette valeur propre. e_1 étant non nul, on peut construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ par le théorème de la base incomplète.

  On a alors : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = A'_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$, d'où $\chi_u = (X - \lambda_1)\chi_{A_{n-1}}$. χ_u étant scindé, il en est de même de $\chi_{A_{n-1}}$.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)$: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{X}_A$ scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$.
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée, et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathcal{X}_{A_n}$ soit scindé. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $A_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

  $\mathcal{X}_u = \mathcal{X}_{A_n}$ étant scindé possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Soit alors e_1 un vecteur propre associé à cette valeur propre. e_1 étant non nul, on peut construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ par le théorème de la base incomplète.

  On a alors : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = A'_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$, d'où $\mathcal{X}_u = (X - \lambda_1)\mathcal{X}_{A_{n-1}}$. $\mathcal{X}_u$ étant scindé, il en est de même de $\mathcal{X}_{A_{n-1}}$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et il existe $T \in \mathcal{T}^+_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $T = P^{-1}A_{n-1}P$.

Démonstration (suite)

• Réciproquement, procédons par récurrence sur $n = \dim E$.
L'hypothèse de récurrence s'écrit : $(\mathscr{H}_n)$: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A scindé dans $\mathbb{K}[X] \Longrightarrow A$ trigonalisable.

- Le résultat est immédiat pour $n = 1$.
- Supposons $(\mathscr{H}_{n-1})$ vérifiée, et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq χ_{A_n} soit scindé. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $A_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

  $\chi_u = \chi_{A_n}$ étant scindé possède au moins une racine $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Soit alors e_1 un vecteur propre associé à cette valeur propre. e_1 étant non nul, on peut construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ par le théorème de la base incomplète.

  On a alors : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = A'_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$, d'où $\chi_u = (X - \lambda_1)\chi_{A_{n-1}}$. χ_u étant scindé, il en est de même de $\chi_{A_{n-1}}$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et il existe $T \in \mathcal{T}^+_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $T = P^{-1}A_{n-1}P$.

  Soit alors $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$.

Démonstration (suite)

On vérifie aisément que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ (faire le calcul du produit par blocs).

Démonstration (suite)

On vérifie aisément que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ (faire le calcul du produit par blocs). En effectuant le produit par blocs, on a :

$$Q^{-1}A'_nQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1}A_{n-1}P \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{bmatrix},$$

Démonstration (suite)

On vérifie aisément que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ (faire le calcul du produit par blocs). En effectuant le produit par blocs, on a :

$$Q^{-1}A'_nQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & \mathsf{A}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1}A_{n-1}P \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{bmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure d'ordre n, semblable à A'_n donc à A_n, ce qui démontre $(\mathscr{H}_n)$.

Démonstration (suite)

On vérifie aisément que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ (faire le calcul du produit par blocs). En effectuant le produit par blocs, on a :

$$Q^{-1}A'_nQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1}A_{n-1}P \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{bmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure d'ordre n, semblable à A'_n donc à A_n, ce qui démontre $(\mathscr{H}_n)$.

Corollaire:

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration (suite)

On vérifie aisément que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ (faire le calcul du produit par blocs). En effectuant le produit par blocs, on a :

$$Q^{-1}A'_nQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1}A_{n-1}P \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & BP \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{bmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure d'ordre n, semblable à A'_n donc à A_n, ce qui démontre $(\mathscr{H}_n)$.

Corollaire:

> Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
>
> Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Remarque Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable et si $\mathscr{B}$ est une base de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire supérieure, alors les éléments diagonaux de T sont exactement les valeurs propres de u, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité (cela a été démontré dans la 1ère partie de la démonstration du théorème).

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3. Mais χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3. Mais χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_c}(u)$, où $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On veut donc trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est T.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3. Mais χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_c}(u)$, où $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On veut donc trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est T.

D'abord, on veut $u(e_1') = e_1'$, donc on choisit pour e_1' un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La recherche habituelle de $E_1(A)$ donne qu'il s'agit de la droite vectorielle de base $(1,1,2)$. On choisit donc $e_1' = (1,1,2)$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3. Mais χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_c}(u)$, où $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On veut donc trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est T.

D'abord, on veut $u(e_1') = e_1'$, donc on choisit pour e_1' un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La recherche habituelle de $E_1(A)$ donne qu'il s'agit de la droite vectorielle de base $(1,1,2)$. On choisit donc $e_1' = (1,1,2)$.

On cherche ensuite $e_2' = (x,y,z)$, linéairement indépendant de e_1', tel que $u(e_2') = ae_1' + e_2'$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e_2') = ae_1'$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_A = (X-1)^3$. On peut dire tout de suite que A n'est pas diagonalisable, car sinon, elle serait semblable, donc égale, à I_3. Mais χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable, et semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_c}(u)$, où $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On veut donc trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est T.

D'abord, on veut $u(e_1') = e_1'$, donc on choisit pour e_1' un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La recherche habituelle de $E_1(A)$ donne qu'il s'agit de la droite vectorielle de base $(1,1,2)$. On choisit donc $e_1' = (1,1,2)$.

On cherche ensuite $e_2' = (x,y,z)$, linéairement indépendant de e_1', tel que $u(e_2') = ae_1' + e_2'$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e_2') = ae_1'$.

Cela donne le système : $\begin{cases} -3x - y + 2z = a \\ -15x - 7y + 11z = a \\ -14x - 6y + 10z = 2a \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = y - 3a \\ z = 2y - 4a \end{cases}$

On peut donc choisir $a = 1$ et $e_2' = (-1, 2, 0)$ (on ne peut évidemment pas choisir $a = 0$).

Solution (suite)

On cherche enfin $e'_3 = (x, y, z)$, linéairement indépendant de e'_1 et e'_2, tel que $u(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + e'_3$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e'_3) = ce'_1 + be'_2$.

Cela donne le système : $\begin{cases} -3x - y + 2z = c - b \\ -15x - 7y + 11z = c + 2b \\ -14x - 6y + 10z = 2c \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = y - 3c + 5b \\ z = 2y - 4c + 7b \end{cases}$

Solution (suite)

On cherche enfin $e'_3 = (x, y, z)$, linéairement indépendant de e'_1 et e'_2, tel que $u(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + e'_3$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e'_3) = ce'_1 + be'_2$.

Cela donne le système : $\begin{cases} -3x - y + 2z = c - b \\ -15x - 7y + 11z = c + 2b \\ -14x - 6y + 10z = 2c \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = y - 3c + 5b \\ z = 2y - 4c + 7b \end{cases}$

On ne peut pas choisir $b = 0$, sinon on retombe sur un système similaire au précédent, et les vecteurs solutions seront liés avec e'_1 et e'_2. On choisit donc $b = 1$ et $c = 0$, puis par exemple $e'_3 = (5, 0, 7)$

Solution (suite)

On cherche enfin $e'_3 = (x, y, z)$, linéairement indépendant de e'_1 et e'_2, tel que $u(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + e'_3$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e'_3) = ce'_1 + be'_2$.

Cela donne le système : $\begin{cases} -3x - y + 2z = c - b \\ -15x - 7y + 11z = c + 2b \\ -14x - 6y + 10z = 2c \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = y - 3c + 5b \\ z = 2y - 4c + 7b \end{cases}$

On ne peut pas choisir $b = 0$, sinon on retombe sur un système similaire au précédent, et les vecteurs solutions seront liés avec e'_1 et e'_2. On choisit donc $b = 1$ et $c = 0$, puis par exemple $e'_3 = (5, 0, 7)$

Il est alors facile de vérifier que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 sont linéairement indépendants, et forme donc bien une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution (suite)

On cherche enfin $e'_3 = (x, y, z)$, linéairement indépendant de e'_1 et e'_2, tel que $u(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + e'_3$, soit $(u - \mathrm{Id}_E)(e'_3) = ce'_1 + be'_2$.

Cela donne le système : $\begin{cases} -3x - y + 2z = c - b \\ -15x - 7y + 11z = c + 2b \\ -14x - 6y + 10z = 2c \end{cases}$, qui équivaut à $\begin{cases} x = y - 3c + 5b \\ z = 2y - 4c + 7b \end{cases}$

On ne peut pas choisir $b = 0$, sinon on retombe sur un système similaire au précédent, et les vecteurs solutions seront liés avec e'_1 et e'_2. On choisit donc $b = 1$ et $c = 0$, puis par exemple $e'_3 = (5, 0, 7)$

Il est alors facile de vérifier que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 sont linéairement indépendants, et forme donc bien une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

En conclusion, on a $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_B = X^2(X-1)^2$. Mais $E_0(B)$ est la droite de base $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1[B)$ est celle de base $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice d'application

Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

On trouve $\chi_B = X^2(X-1)^2$. Mais $E_0(B)$ est la droite de base $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1[B)$ est celle de base $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B n'est donc pas diagonalisable. On peut alors chercher des vecteurs V_0' et V_1' tels que la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base (V_0, V_0', V_1, V_1') soit égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(calculs à finir).

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Démonstration

- *1er cas :* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

  u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tq $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Démonstration

- *1er cas :* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

  u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E tq $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

  Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Démonstration

- *1er cas :* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

  u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tq $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

  Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

  Notons, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $E_0 = \{0\}$. On a alors, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)(E_k) \subset E_{k-1}$.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Démonstration

- *1er cas :* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

  u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E tq $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

  Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.

  Notons, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ $E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $E_0=\{0\}$. On a alors, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $(u-\lambda_k\mathrm{Id}_E)(E_k)\subset E_{k-1}$.

  Or $\chi_u(u) = (u-\lambda_1\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(u-\lambda_n\mathrm{Id}_E)$ donc :

  $$\begin{aligned}\chi_u(u)(E) = \chi_u(u)(E_n) &= (u-\lambda_1\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(u-\lambda_n\mathrm{Id}_E)(E_n)\\ &\subset (u-\lambda_1\mathrm{Id}_E)\circ\cdots\circ(u-\lambda_{n-1}\mathrm{Id}_E)(E_{n-1})\subset\dots\subset(u-\lambda_1\mathrm{Id}_E)(E_1)=\{0\}\end{aligned}$$

  soit $\chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Théorème 20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.
Alors : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Autrement dit : Le polynôme caractéristique de u est aussi un polynôme annulateur de u.

Démonstration

- *1er cas :* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

  u est trigonalisable, donc il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tq $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

  Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

  Notons, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $E_0 = \{0\}$. On a alors, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)(E_k) \subset E_{k-1}$.

  Or $\chi_u(u) = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E)$ donc :

  $$\begin{aligned} \chi_u(u)(E) = \chi_u(u)(E_n) &= (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E)(E_n) \\ &\subset (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_{n-1} \mathrm{Id}_E)(E_{n-1}) \subset \dots \subset (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)(E_1) = \{0\} \end{aligned}$$

  soit $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- *2ème cas :* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

  Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, soit A la matrice de u dans une base de E. Alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut considérer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après ce qui précède, $\chi_A(A) = 0$, donc $\chi_u(u) = 0$

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

  De plus, si u est nilpotent, u ne peut être injectif (car sinon u^p le serait !) donc 0 est effectivement valeur propre de u.

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

  De plus, si u est nilpotent, u ne peut être injectif (car sinon u^p le serait !) donc 0 est effectivement valeur propre de u.

  Ainsi, $\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent, } \mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

  De plus, si u est nilpotent, u ne peut être injectif (car sinon u^p le serait !) donc 0 est effectivement valeur propre de u.

  Ainsi, $\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent, } \mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

- Réciproquement, si la seule valeur propre d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n est 0, son polynôme caractéristique étant scindé, on a $\chi_u = X^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton prouve alors que $u^n = 0$.

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

  De plus, si u est nilpotent, u ne peut être injectif (car sinon u^p le serait !) donc 0 est effectivement valeur propre de u.

  Ainsi, $\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent, } \mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

- Réciproquement, si la seule valeur propre d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n est 0, son polynôme caractéristique étant scindé, on a $\chi_u = X^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton prouve alors que $u^n = 0$.

  Ainsi, u est nilpotent, et l'indice de nilpotence p de u est nécessairement $\leqslant n$ (ce résultat, classique, a déjà été démontré en exercice).

Application aux endomorphismes nilpotents

- Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Si p est l'indice de nilpotence de u, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, donc le polynôme X^p est annulateur de u.

  En vertu du théorème 4, la seule valeur propre **possible** de u est 0.

  De plus, si u est nilpotent, u ne peut être injectif (car sinon u^p le serait !) donc 0 est effectivement valeur propre de u.

  Ainsi, $\boxed{\text{si } u \text{ est nilpotent, } \mathrm{Sp}(u) = \{0\}.}$

- Réciproquement, si la seule valeur propre d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n est 0, son polynôme caractéristique étant scindé, on a $\chi_u = X^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton prouve alors que $u^n = 0$.

  Ainsi, u est nilpotent, et l'indice de nilpotence p de u est nécessairement $\leqslant n$ (ce résultat, classique, a déjà été démontré en exercice).

- Ce dernier résultat tombe en défaut dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : par exemple, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique n'admet que 0 comme valeur propre (réelle), mais n'est pas nilpotent.

QUELQUES APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Si d est le degré de P, la division euclidienne de X^p par P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit : $X^p = PQ + R_p$, où le reste R_p est un polynôme de degré $\leqslant d - 1$ à déterminer.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Si d est le degré de P, la division euclidienne de X^p par P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit : $X^p = PQ + R_p$, où le reste R_p est un polynôme de degré $\leqslant d-1$ à déterminer. On a alors : $A^p = P(A)Q(A) + R_p(A) = R_p(A)$, ce qui permet d'exprimer A^p pour tout entier p en fonction de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Si d est le degré de P, la division euclidienne de X^p par P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit : $X^p = PQ + R_p$, où le reste R_p est un polynôme de degré $\leqslant d-1$ à déterminer. On a alors : $A^p = P(A)Q(A) + R_p(A) = R_p(A)$, ce qui permet d'exprimer A^p pour tout entier p en fonction de $I_n, A, \dots, A^{d-1}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Si d est le degré de P, la division euclidienne de X^p par P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit : $X^p = PQ + R_p$, où le reste R_p est un polynôme de degré $\leqslant d-1$ à déterminer. On a alors : $A^p = P(A)Q(A) + R_p(A) = R_p(A)$, ce qui permet d'exprimer A^p pour tout entier p en fonction de $I_n, A, \dots, A^{d-1}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -2 \\ -3 & X+3 & -3 \\ 1 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X+1)^3$$

(je n'ai pas détaillé les calculs, il faut savoir les faire rapidement).

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

1ère méthode : utilisation d'un polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A; ce peut être son polynôme caractéristique (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), mais aussi plus simplement le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ lorsque A est diagonalisable.

Si d est le degré de P, la division euclidienne de X^p par P dans $\mathbb{K}[X]$ s'écrit : $X^p = PQ + R_p$, où le reste R_p est un polynôme de degré $\leqslant d-1$ à déterminer. On a alors : $A^p = P(A)Q(A) + R_p(A) = R_p(A)$, ce qui permet d'exprimer A^p pour tout entier p en fonction de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Solution

- On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -2 \\ -3 & X+3 & -3 \\ 1 & 0 & X+2 \end{vmatrix} = (X+1)^3$$

  (je n'ai pas détaillé les calculs, il faut savoir les faire rapidement).

  Pour $p \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^p par χ_A, ce qui s'écrit ici, compte tenu de la formule de Taylor pour les polynômes :

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1} p(X+1) + (-1)^p \,.$$

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1} p(X+1) + (-1)^p \,.$$

On en déduit, puisque $(A+I)^3 = O_3$:

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(A+I_3)^2 + (-1)^{p-1} p(A+I_3) + (-1)^p I_3$$

(on pouvait aussi obtenir cette relation en remarquant que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et en développant $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme).

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1} p(X+1) + (-1)^p .$$

On en déduit, puisque $(A+I)^3 = O_3$:

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(A+I_3)^2 + (-1)^{p-1} p(A+I_3) + (-1)^p I_3$$

(on pouvait aussi obtenir cette relation en remarquant que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et en développant $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme).

On calcule alors $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2 - 4p + 1 & -\frac{p(p-3)}{2} & \frac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & \frac{p^2}{2} + \frac{5}{2}p + 1 & \frac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \frac{p(p-1)}{2} & -\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2}p + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice notée } M(p)\text{).}$$

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1} p(X+1) + (-1)^p \, .$$

On en déduit, puisque $(A+I)^3 = O_3$:

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(A+I_3)^2 + (-1)^{p-1} p(A+I_3) + (-1)^p I_3$$

(on pouvait aussi obtenir cette relation en remarquant que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et en développant $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme).

On calcule alors $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2 - 4p + 1 & -\frac{p(p-3)}{2} & \frac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & \frac{p^2}{2} + \frac{5}{2}p + 1 & \frac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \frac{p(p-1)}{2} & -\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2}p + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice notée } M(p)\text{).}$$

Bien sûr, lorsque l'on a fini des calculs si passionnants, on pense à vérifier ses résultats au moins pour les valeurs $p = 0$ et $p = 1$...

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1} p(X+1) + (-1)^p\,.$$

On en déduit, puisque $(A+I)^3 = O_3$:

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(A+I_3)^2 + (-1)^{p-1} p(A+I_3) + (-1)^p I_3$$

(on pouvait aussi obtenir cette relation en remarquant que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et en développant $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme).

On calcule alors $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2-4p+1 & -\frac{p(p-3)}{2} & \frac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & \frac{p^2}{2} + \frac{5}{2}p + 1 & \frac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \frac{p(p-1)}{2} & -\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2}p + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice notée } M(p)\text{).}$$

Bien sûr, lorsque l'on a fini des calculs si passionnants, on pense à vérifier ses résultats au moins pour les valeurs $p = 0$ et $p = 1$...

- Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible et donc l'expression A^p pour p entier négatif a bien un sens.

Solution (suite)

$$X^p = (X+1)^3 Q + (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(X+1)^2 + (-1)^{p-1}p(X+1) + (-1)^p.$$

On en déduit, puisque $(A+I)^3 = O_3$:

$$A^p = (-1)^p \frac{p(p-1)}{2}(A+I_3)^2 + (-1)^{p-1}p(A+I_3) + (-1)^p I_3$$

(on pouvait aussi obtenir cette relation en remarquant que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente, et en développant $A^p = (-I_3 + N)^p$ à l'aide de la formule du binôme).

On calcule alors $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on en déduit :

$$A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} p^2 - 4p + 1 & -\frac{p(p-3)}{2} & \frac{p(p-5)}{2} \\ p(p-6) & \frac{p^2}{2} + \frac{5}{2}p + 1 & \frac{p(p-7)}{2} \\ -p(p-2) & \frac{p(p-1)}{2} & -\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2}p + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice notée } M(p)\text{).}$$

Bien sûr, lorsque l'on a fini des calculs si passionnants, on pense à vérifier ses résultats au moins pour les valeurs $p = 0$ et $p = 1$...

- Puisque 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible et donc l'expression A^p pour p entier négatif a bien un sens.

  Pour calculer A^{-p} avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pourrait bien sûr calculer A^{-1} puis recommencer la même méthode... Mais il est plus rapide de « remarquer », après avoir fait un autre calcul passionnant, que le produit $M(p) \times M(-p)$ est égal à la matrice I_3, donc directement $A^{-p} = M(-p)$.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $D^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Cette méthode est plutôt laborieuse, et n'est à utiliser que si vous avez déjà du calculer les matrices P D et P^{-1}.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Cette méthode est plutôt laborieuse, et n'est à utiliser que si vous avez déjà du calculer les matrices P D et P^{-1}.

3ème méthode : dans le cas général

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $D^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Cette méthode est plutôt laborieuse, et n'est à utiliser que si vous avez déjà du calculer les matrices P D et P^{-1}.

3ème méthode : dans le cas général

On peut toujours trigonaliser A, quitte à se placer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe P inversible et T triangulaire supérieure tq $A = PTP^{-1}$, avec T de la forme :

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Cette méthode est plutôt laborieuse, et n'est à utiliser que si vous avez déjà du calculer les matrices P D et P^{-1}.

3ème méthode : dans le cas général

On peut toujours trigonaliser A, quitte à se placer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe P inversible et T triangulaire supérieure tq $A = PTP^{-1}$, avec T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & 0 \\ & \boxed{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{T_q} \end{pmatrix}$$

où chaque $T_i$est de la forme $T_i = \lambda_i I + N_i$ avec N_i nilpotente.

Calcul de la puissance p-ième d'une matrice carrée

2ème méthode : dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe D diagonale et P inversible telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors :
$\forall\, p \in \mathbb{N},\ A^p = PD^pP^{-1}$, formule qui se généralise à $p \in \mathbb{Z}$ dans le cas où A est inversible.

Or, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$, donc le calcul de P, D, P^{-1} permet d'obtenir A^p.

Cette méthode est plutôt laborieuse, et n'est à utiliser que si vous avez déjà du calculer les matrices P D et P^{-1}.

3ème méthode : dans le cas général

On peut toujours trigonaliser A, quitte à se placer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément, on peut montrer qu'il existe P inversible et T triangulaire supérieure tq $A = PTP^{-1}$, avec T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & 0 \\ & \boxed{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{T_q} \end{pmatrix}$$

où chaque $T_i$est de la forme $T_i = \lambda_i I + N_i$ avec N_i nilpotente. On sait alors calculer les T_i^p à l'aide de la formule du binôme, et on a ensuite $T^p = \begin{pmatrix} \boxed{T_1^p} & & & 0 \\ & \boxed{T_2^p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{T_q^p} \end{pmatrix}$.

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Solution

Je vous conseille de vous entraîner, et pour cela je donne les principaux résultats :

$$\chi_A = (X+1)(X-2)^2$$

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^p = \begin{pmatrix} (-1)^{p+1} + 2^p(2-p) & 2^p p & 2(-1)^{p+1} + 2^p(2-p) \\ -2^{p-1}p & 2^{p-1}(p+2) & -2^{p-1}p \\ (-1)^p + 2^{p-1}(p-2) & -2^{p-1}p & 2(-1)^p + 2^{p-1}(p-2) \end{pmatrix}.$$

Exemple 2

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution

Je vous conseille de vous entraîner, et pour cela je donne les principaux résultats :

$$\chi_A = (X-1)^2(X+1)^2$$

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top\right\} \qquad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top\right\}$$

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^p = \begin{pmatrix} (-1)^p(1-4p) & 4(-1)^p p & (4p-1)(-1)^p + 2p + 1 & \left(4(-1)^{p+1} - 2\right)p \\ 4(-1)^{p+1}p & (4p+1)(-1)^p & p\left(4(-1)^p + 2\right) & \left(4(-1)^{p+1} - 2\right)p + 1 - (-1)^p \\ (0 & 0 & 2p+1 & -2p \\ 0 & 0 & 2p & -2p+1 \end{pmatrix}.$$

Étude de systèmes linéaires de suites récurrentes

On cherche (par exemple) à déterminer les valeurs de u_n, v_n w_n, avec u_0, v_0, w_0 donnés, et où les trois suites vérifient le système de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} & = & a' u_n + b' v_n + c' w_n \\ w_{n+1} & = & a'' u_n + b'' v_n + c'' w_n \end{array}\right.$$

Étude de systèmes linéaires de suites récurrentes

On cherche (par exemple) à déterminer les valeurs de u_n, v_n w_n, avec u_0, v_0, w_0 donnés, et où les trois suites vérifient le système de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} & = & a'u_n + b'v_n + c'w_n \\ w_{n+1} & = & a''u_n + b''v_n + c''w_n \end{cases}$$

Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et le système précédent s'écrit : $X_{n+1} = AX_n$.

On a alors $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on est donc ramené au calcul de A^n.

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .\}$$

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \,.\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On a alors $X_n = A^n X_0$, et le calcul de A^n permet d'obtenir u_n en fonction de n.

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall \, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On a alors $X_n = A^n X_0$, et le calcul de A^n permet d'obtenir u_n en fonction de n.

Plus précisément, $\chi_A = X(X-a) - b = X^2 - aX - b$; on distingue deux cas :

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On a alors $X_n = A^n X_0$, et le calcul de A^n permet d'obtenir u_n en fonction de n.

Plus précisément, $\chi_A = X(X-a) - b = X^2 - aX - b$; on distingue deux cas :

- si χ_A admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors A est diagonalisable, et il existe alors $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^n = P \operatorname{diag}(r_1^n, r_2^n) P^{-1}$.

  On retrouve alors qu'il existe des constantes α et β telles que $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout n.

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On a alors $X_n = A^n X_0$, et le calcul de A^n permet d'obtenir u_n en fonction de n.

Plus précisément, $\chi_A = X(X-a) - b = X^2 - aX - b$; on distingue deux cas :

- si χ_A admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors A est diagonalisable, et il existe alors $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^n = P\,\mathrm{diag}(r_1^n, r_2^n)P^{-1}$.

  On retrouve alors qu'il existe des constantes α et β telles que $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout n.

- si χ_A admet une racine double r, la matrice A n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable donc égale à rI_2), on peut alors la trigonaliser et on trouve qu'elle est semblable à $T = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

  Puisque $T^n = \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}$ et $A^n = PT^nP^{-1}$, on retrouve alors qu'il existe des constantes α et β telles que $u_n = (\alpha n + \beta) r^n$.

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Étant donnés a et b dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier :

$$\mathscr{S} = \{u \in E \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \,.\}$$

Soit $(u_n) \in \mathscr{S}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. X_0 est donné, et on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

On a alors $X_n = A^n X_0$, et le calcul de A^n permet d'obtenir u_n en fonction de n.

Plus précisément, $\chi_A = X(X-a) - b = X^2 - aX - b$; on distingue deux cas :

- si χ_A admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors A est diagonalisable, et il existe alors $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^n = P\,\mathrm{diag}(r_1^n, r_2^n)P^{-1}$.

  On retrouve alors qu'il existe des constantes α et β telles que $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout n.

- si χ_A admet une racine double r, la matrice A n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable donc égale à rI_2), on peut alors la trigonaliser et on trouve qu'elle est semblable à $T = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

  Puisque $T^n = \begin{pmatrix} r^n & nr^{n-1} \\ 0 & r^n \end{pmatrix}$ et $A^n = PT^nP^{-1}$, on retrouve alors qu'il existe des constantes α et β telles que $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$.

La méthode ci-dessus se généralise à des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur, c'est l'objet des deux exercices suivants.

Exercice 1

$u_0 = 1 + \cos\theta\ ,\ u_1 = -1\ ,\ u_2 = 4 + \cos\theta\ \ (\theta \in]0,\pi[)$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Exercice 1

$u_0 = 1 + \cos\theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos\theta$ $(\theta \in]0, \pi[)$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4\cos\theta - 1 & 2(\cos\theta - 1) \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$.

Exercice 1

$u_0 = 1 + \cos\theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos\theta$ $(\theta \in]0, \pi[)$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4\cos\theta - 1 & 2(\cos\theta - 1) \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$.

On calcule alors le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = X^3 + 2(1 - \cos\theta)X^2 + (1 - 4\cos\theta)X + 2 = (X + 2)(X^2 - 2X\cos\theta + 1) = (X + 2)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

(après avoir remarqué que -2 est racine « évidente »).

Exercice 1

$u_0 = 1 + \cos\theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos\theta$ $(\theta \in]0, \pi[)$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 2(1 - \cos\theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos\theta)u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4\cos\theta - 1 & 2(\cos\theta - 1) \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$.

On calcule alors le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = X^3 + 2(1 - \cos\theta)X^2 + (1 - 4\cos\theta)X + 2 = (X + 2)(X^2 - 2X\cos\theta + 1) = (X + 2)(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$$

(après avoir remarqué que -2 est racine « évidente »).

Puisque $\theta \in]0\,;\pi[$, A admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\exists\, P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \ \text{ telle que } \ A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \mathrm{diag}(-2, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

Solution (suite)

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0\,,$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes α, β, γ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-2)^n + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

Solution (suite)

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0\,,$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes α, β, γ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-2)^n + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

ou encore, puisque u_n est réel, il existe des constantes a, b, c réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-2)^n + b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta).$$

Solution (suite)

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0\,,$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes α, β, γ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-2)^n + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

ou encore, puisque u_n est réel, il existe des constantes a, b, c réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-2)^n + b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta).$$

Les conditions initiales conduisent aux relations :

$$u_0 = a+b = 1+\cos\theta \quad , \quad u_1 = -2a+b\cos\theta+c\sin\theta = -1 \quad \text{et} \quad u_2 = 4a+b\cos 2\theta+c\sin 2\theta = 4+\cos\theta.$$

Solution (suite)

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0\,,$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes α, β, γ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-2)^n + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

ou encore, puisque u_n est réel, il existe des constantes a, b, c réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-2)^n + b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta).$$

Les conditions initiales conduisent aux relations :

$$u_0 = a+b = 1+\cos\theta \quad , \quad u_1 = -2a+b\cos\theta+c\sin\theta = -1 \quad \text{et} \quad u_2 = 4a+b\cos 2\theta+c\sin 2\theta = 4+\cos\theta.$$

Cela permet de trouver (si les calculs sont bien conduits !) :

$$a = 1 \quad , \quad b = \cos\theta \quad \text{et} \quad c = \sin\theta$$

Solution (suite)

Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0\,,$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes α, β, γ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-2)^n + \beta e^{-in\theta} + \gamma e^{in\theta}$$

ou encore, puisque u_n est réel, il existe des constantes a, b, c réelles telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-2)^n + b\cos(n\theta) + c\sin(n\theta).$$

Les conditions initiales conduisent aux relations :

$$u_0 = a+b = 1+\cos\theta \quad , \quad u_1 = -2a+b\cos\theta+c\sin\theta = -1 \quad \text{et} \quad u_2 = 4a+b\cos 2\theta+c\sin 2\theta = 4+\cos\theta.$$

Cela permet de trouver (si les calculs sont bien conduits !) :

$$a = 1 \quad , \quad b = \cos\theta \quad \text{et} \quad c = \sin\theta$$

puis finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n + \cos((n-1)\theta).$$

Exercice 2

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 11$, $u_3 = 20$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Exercice 2

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 11$, $u_3 = 20$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$.

Exercice 2

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 11$, $u_3 = 20$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$. On calcule alors le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 = (X+1)^2(X-2)^2$$

(après avoir remarqué deux fois que -1 est racine « évidente »).

Exercice 2

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 11$, $u_3 = 20$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$. On calcule alors le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 = (X+1)^2(X-2)^2$$

(après avoir remarqué deux fois que -1 est racine « évidente »).

On peut alors vérifier que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres -1 et 2 sont tous deux de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable, mais, χ_A étant scindé, elle est trigonalisable.

Exercice 2

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 11$, $u_3 = 20$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Solution

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$, on connaît X_0 et la relation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n = A^n X_0$. On calcule alors le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 = (X+1)^2(X-2)^2$$

(après avoir remarqué deux fois que -1 est racine « évidente »).
On peut alors vérifier que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres -1 et 2 sont tous deux de dimension 1. Donc A n'est pas diagonalisable, mais, χ_A étant scindé, elle est trigonalisable.
On peut alors, par les méthodes déjà vues, trouver une matrice inversible P telle que

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec } T = \begin{bmatrix} T_1 & O_2 \\ O_2 & T_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution (suite)

En écrivant $T_1 = -I_2 + N$ et $T_2 = 2I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $N^2 = 0$ on peut facilement calculer, à l'aide de la formule du binôme, pour tout entier n :

$$T_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad T^n = \begin{bmatrix} T_1^n & O_2 \\ O_2 & T_2^n \end{bmatrix}.$$

Solution (suite)

En écrivant $T_1 = -I_2 + N$ et $T_2 = 2I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $N^2 = 0$ on peut facilement calculer, à l'aide de la formule du binôme, pour tout entier n :

$$T_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad T^n = \begin{bmatrix} T_1^n & O_2 \\ O_2 & T_2^n \end{bmatrix}.$$

Finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PT^n P^{-1} X_0$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes réelles a, b, c, d telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-1)^n + bn(-1)^n + c2^n + dn2^n.$$

Solution (suite)

En écrivant $T_1 = -I_2 + N$ et $T_2 = 2I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $N^2 = 0$ on peut facilement calculer, à l'aide de la formule du binôme, pour tout entier n :

$$T_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad T^n = \begin{bmatrix} T_1^n & O_2 \\ O_2 & T_2^n \end{bmatrix}.$$

Finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = P T^n P^{-1} X_0$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes réelles a, b, c, d telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-1)^n + bn(-1)^n + c2^n + dn2^n.$$

Les conditions initiales conduisent aux relations :

$$u_0 = a+c = 1 \quad , \quad u_1 = -a-b+2c+2d = 0 \quad , \quad u_2 = a+2b+4c+8d = 11 \quad \text{et} \quad u_3 = -a-3b+8c+24d =$$

Solution (suite)

En écrivant $T_1 = -I_2 + N$ et $T_2 = 2I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $N^2 = 0$ on peut facilement calculer, à l'aide de la formule du binôme, pour tout entier n :

$$T_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad T^n = \begin{bmatrix} T_1^n & O_2 \\ O_2 & T_2^n \end{bmatrix}.$$

Finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0$$

et puisque P et P^{-1} ne dépendent pas de n, on en déduit qu'il existe des constantes réelles a, b, c, d telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a(-1)^n + bn(-1)^n + c2^n + dn2^n.$$

Les conditions initiales conduisent aux relations :

$$u_0 = a+c = 1 \quad , \quad u_1 = -a-b+2c+2d = 0 \quad , \quad u_2 = a+2b+4c+8d = 11 \quad \text{et} \quad u_3 = -a-3b+8c+24d =$$

On résout ce système et on trouve : $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$ d'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)(-1)^n + n2^n.$$

Résolution de systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

On s'intéresse ici à des systèmes différentiels de la forme : $(H) \quad X'(t) = AX(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de t, et où $X\colon t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire que les x_i sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$).

Résolution de systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

On s'intéresse ici à des systèmes différentiels de la forme : $(H) \quad X'(t) = AX(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de t, et où $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire que les x_i sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$).

Un tel système s'écrit donc :

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right.$$

Résolution de systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

On s'intéresse ici à des systèmes différentiels de la forme : $(H) \quad X'(t) = AX(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de t, et où $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire que les x_i sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$).

Un tel système s'écrit donc :

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right.$$

Proposition 11

L'ensemble $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation différentielle homogène (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Résolution de systèmes différentiels homogènes à coefficients constants

On s'intéresse ici à des systèmes différentiels de la forme : $(H) \quad X'(t) = AX(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de t, et où $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire que les x_i sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$).

Un tel système s'écrit donc :

$$(H) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right.$$

Proposition 11

L'ensemble $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation différentielle homogène (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le théorème suivant est admis.

Théorème 21

L'espace vectoriel $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation différentielle homogène (H) est de dimension finie, et $\dim \mathscr{S}(H) = n$.

Théorème 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet une valeur propre λ.

Si V est un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}.V$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $X' = AX$.

Théorème 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet une valeur propre λ.

Si V est un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.V$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $X' = AX$.

Démonstration

Il suffit de vérifier : si l'on pose $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}V$, alors la fonction $t \mapsto X(t)$ est dérivable et, pour tout t : $X'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}V = \mathrm{e}^{\lambda t}AV$ puisque $AV = \lambda V$, et donc $X'(t) = AX(t)$.

Corollaire:

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **On suppose ici que A est diagonalisable**. Il existe donc une base $(V_1, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
>
> Alors les fonctions $X_i : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i$, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène $X' = AX$.

Théorème 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet une valeur propre λ.

Si V est un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.V$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $X' = AX$.

Démonstration

Il suffit de vérifier : si l'on pose $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}V$, alors la fonction $t \mapsto X(t)$ est dérivable et, pour tout t : $X'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}V = \mathrm{e}^{\lambda t}AV$ puisque $AV = \lambda V$, et donc $X'(t) = AX(t)$.

Corollaire:

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **On suppose ici que A est diagonalisable**. Il existe donc une base $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
>
> Alors les fonctions $X_i : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i$, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène $X' = AX$.

Démonstration

En effet, les X_i sont bien solutions de l'équation d'après le théorème précédent. De plus, on a, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $X_i(0) = V_i$, donc la famille $(X_1(0), \ldots, X_n(0))$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Théorème 22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet une valeur propre λ.

Si V est un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.V$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $X' = AX$.

Démonstration

Il suffit de vérifier : si l'on pose $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}V$, alors la fonction $t \mapsto X(t)$ est dérivable et, pour tout t : $X'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}V = \mathrm{e}^{\lambda t}AV$ puisque $AV = \lambda V$, et donc $X'(t) = AX(t)$.

Corollaire:

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **On suppose ici que A est diagonalisable**. Il existe donc une base $(V_1, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, pour les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
>
> Alors les fonctions $X_i \colon t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i$, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène $X' = AX$.

Démonstration

En effet, les X_i sont bien solutions de l'équation d'après le théorème précédent. De plus, on a, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $X_i(0) = V_i$, donc la famille $(X_1(0), \dots, X_n(0))$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Il en résulte « facilement » que la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est libre dans $\mathscr{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, donc forme une base de $\mathscr{S}(H)$ puisque cet espace vectoriel est de dimension n.

Exemple

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$

Exemple

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$

Solution

C'est un système linéaire homogène, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$

Solution

C'est un système linéaire homogène, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ X & 0 & X \end{vmatrix}$$

Exemple

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$

Solution

C'est un système linéaire homogène, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ X & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1-X \\ -1 & X-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = X(X-2)(X-1).$$

Exemple

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x + y \end{cases}$

Solution

C'est un système linéaire homogène, de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ X & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1-X \\ -1 & X-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = X(X-2)(X-1).$$

A possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. On cherche alors les sous-espaces propres.

Solution (suite)

Valeur propre 0 : Pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout le système :

$$AV = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -3x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

Valeur propre 0 : Pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout le système :

$$AV = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -3x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Valeur propre 1 : On résout le système :

$$AV = V \iff (A - I_3)V = 0 \iff \begin{cases} -y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

Valeur propre 2 : On résout le système

$$AV = 2V \iff (A - 2I_3)V = 0 \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

Valeur propre 2 : On résout le système

$$AV = 2V \iff (A - 2I_3)V = 0 \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On déduit alors directement du théorème précédent les solutions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_0 V_0 + \lambda_2 \mathrm{e}^t V_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} V_2$$

Solution (suite)

Valeur propre 2 : On résout le système

$$AV = 2V \iff (A - 2I_3)V = 0 \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où un vecteur propre $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On déduit alors directement du théorème précédent les solutions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_0 V_0 + \lambda_2 \mathrm{e}^{t} V_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} V_2$$

soit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^{t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = \lambda_0 - \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} \\ z(t) = -3\lambda_0 - \lambda_1 \mathrm{e}^{t} - \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} \end{cases} \qquad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Remarque

Supposons A à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle, et si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de A, et $\overline{V}$ en est un vecteur propre associé (puisque $AV = \lambda V \iff \overline{AV} = \overline{\lambda V} \iff A\overline{V} = \overline{\lambda V}$, car $\overline{A} = A$).

Remarque

Supposons A à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle, et si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de A, et $\overline{V}$ en est un vecteur propre associé (puisque $AV = \lambda V \iff \overline{AV} = \overline{\lambda V} \iff A\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}$, car $\overline{A} = A$).

Alors, les fonctions $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ et $\overline{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$ sont linéairement indépendantes, et, pour tout t, $\operatorname{Vect}\left\{X(t), \overline{X}(t)\right\} = \operatorname{Vect}\left\{\frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)\right\}$.

Remarque

Supposons A à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle, et si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de A, et $\overline{V}$ en est un vecteur propre associé (puisque $AV = \lambda V \iff \overline{AV} = \overline{\lambda V} \iff A\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}$, car $\overline{A} = A$).

Alors, les fonctions $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ et $\overline{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$ sont linéairement indépendantes, et, pour tout t, $\operatorname{Vect}\left\{X(t), \overline{X}(t)\right\} = \operatorname{Vect}\left\{\frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)\right\}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)$ sont alors solutions de (H) (car combinaisons linéaires de solutions), et elles sont à valeurs réelles.

Remarque

Supposons A à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle, et si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de A, et $\overline{V}$ en est un vecteur propre associé (puisque $AV = \lambda V \Longleftrightarrow \overline{AV} = \overline{\lambda V} \Longleftrightarrow A\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}$, car $\overline{A} = A$).

Alors, les fonctions $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ et $\overline{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$ sont linéairement indépendantes, et, pour tout t, $\mathrm{Vect}\left\{X(t), \overline{X}(t)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)\right\}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)$ sont alors solutions de (H) (car combinaisons linéaires de solutions), et elles sont à valeurs réelles.

On obtiendra donc une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs réelles en remplaçant, pour les valeurs propres non réelles, les couples $\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V, \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}\right)$ par $\left(\mathcal{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V\right), \mathcal{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V\right)\right)$.

Remarque

Supposons A à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre non réelle, et si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, alors $\overline{\lambda}$ est encore valeur propre de A, et $\overline{V}$ en est un vecteur propre associé (puisque $AV = \lambda V \iff \overline{AV} = \overline{\lambda V} \iff A\overline{V} = \overline{\lambda}\,\overline{V}$, car $\overline{A} = A$).

Alors, les fonctions $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} V$ et $\overline{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$ sont linéairement indépendantes, et, pour tout t, $\operatorname{Vect}\left\{X(t), \overline{X}(t)\right\} = \operatorname{Vect}\left\{\frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)\right\}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{2}\left(X(t) + \overline{X}(t)\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X(t) - \overline{X}(t)\right)$ sont alors solutions de (H) (car combinaisons linéaires de solutions), et elles sont à valeurs réelles.

On obtiendra donc une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs réelles en remplaçant, pour les valeurs propres non réelles, les couples $\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V, \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\overline{V}\right)$ par $\left(\mathcal{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V\right), \mathcal{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} V\right)\right)$.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$.

Solution

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix};\ \chi_A=(X-2)\big((X-1)^2+1\big);\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{2,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}.$$

Solution

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\chi_A = (X-2)\big((X-1)^2+1\big)$; $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, on trouve les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans l'ordre des valeurs propres écrites ci-dessus).

Solution

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $\chi_A=(X-2)\big((X-1)^2+1\big)$; $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{2,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, on trouve les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ (dans l'ordre des valeurs propres écrites ci-dessus).

Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$$

Solution

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $\chi_A=(X-2)\big((X-1)^2+1\big)$; $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{2,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, on trouve les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ (dans l'ordre des valeurs propres écrites ci-dessus).

Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-\sin t+\mathrm{i}\cos t\\-\cos t-\mathrm{i}\sin t\\\cos t+\mathrm{i}\sin t\end{pmatrix}+\gamma\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}-\sin t-\mathrm{i}\cos t\\-\cos t+\mathrm{i}\sin t\\\cos t-\mathrm{i}\sin t\end{pmatrix}$$

Solution

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $\chi_A=(X-2)\left((X-1)^2+1\right)$; $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{2,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i}\}$.

Dans $\mathbb{C}^3$, on trouve les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}$ (dans l'ordre des valeurs propres écrites ci-dessus).

Les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta e^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma e^{(1-\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$$

soit encore :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t+\mathrm{i}\cos t\\-\cos t-\mathrm{i}\sin t\\\cos t+\mathrm{i}\sin t\end{pmatrix}+\gamma e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t-\mathrm{i}\cos t\\-\cos t+\mathrm{i}\sin t\\\cos t-\mathrm{i}\sin t\end{pmatrix}$$

donc les solutions à valeurs réelles sont :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\\\cos t\end{pmatrix}+c e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\\sin t\end{pmatrix}\quad(a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Méthode générale

De façon plus générale, si la matrice A est semblable à une matrice B plus simple, on effectuera un changement de base, ce qui revient à changer de fonctions inconnues, pour obtenir un système différentiel plus facile à résoudre.

Méthode générale

De façon plus générale, si la matrice A est semblable à une matrice B plus simple, on effectuera un changement de base, ce qui revient à changer de fonctions inconnues, pour obtenir un système différentiel plus facile à résoudre.

Le principe est simple : si $B = P^{-1}AP$, le système $X' = AX$ équivaut à $P^{-1}X' = BP^{-1}X$, donc, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, soit $X(t) = PY(t)$ (le calcul de P^{-1} n'est pas utile en pratique !), on obtiendra le nouveau système différentiel $Y' = BY$ (en effet, $X(t) = PY(t)$ implique $X'(t) = PY'(t)$ car la matrice P est constante).

Exemple 1

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exemple 1

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exemple 2

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$

Exemple 1

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exemple 2

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$

Exemple 3

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = (t-2)\,x(t) - (t-1)\,y(t) \\ y'(t) = 2(t-1)\,x(t) - (2t-1)\,y(t) \end{cases}$

FIN DU CHAPITRE XIX