

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

Dans tout le chapitre, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Il est évidemment conseillé de revoir le chapitre concernant les espaces préhilbertiens réels !

I. Isométries vectorielles

I.1. Définition

Déf 1:

On appelle isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

On dit aussi que u conserve la norme.

Prop 1:

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

On dit aussi que u conserve le produit scalaire.

 *Démonstration:*

Le sens direct est immédiat. Supposons maintenant que u conserve la norme. D'après l'identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) = \langle x | y \rangle \end{aligned} \quad \text{donc } u \text{ conserve}$$

aussi le produit scalaire.

Exemple

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de E .
 s est une isométrie.

 *Démonstration:*

En effet, soit $(x, y) \in E^2$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, écrivons $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F^2$ et $(x_2, y_2) \in (F^\perp)^2$. Alors
 $\langle s(x) | s(y) \rangle = \langle x_1 - x_2 | y_1 - y_2 \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle + \langle x_2 | y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y \rangle$.

Théorème 1:

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien E est une isométrie si et seulement si l'image par u d'une/toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E

 *Démonstration:*

- Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors pour tous $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\langle u(e_i) | u(e_j) \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$, donc la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthonormale. Comme elle est constituée de n vecteurs dans un espace de dimension n , c'est une base orthonormée de E .
- Supposons que u soit un endomorphisme de E et que l'image d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ par u soit une base orthonormale de E . Soit alors $(x, y) \in E^2$. On peut décomposer x et y sur la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Dès lors

$$\langle u(x) | u(y) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \left| \sum_{j=1}^n y_j u(e_j) \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle u(e_i) | u(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

car $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Mais on a aussi $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ en utilisant le fait que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E . Par conséquent, pour tous $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, ce qui signifie que $u \in \mathcal{O}(E)$. $\square$

Prop 2:

Si u est une isométrie de E , alors u est un automorphisme.

Pour cette raison, une isométrie vectorielle s'appelle aussi un *automorphisme orthogonal*.

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries (= automorphismes orthogonaux) de l'espace E .

 Démonstration:

Il suffit de démontrer que u est injectif puisque u est un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Or, si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(x) = 0$ donc $\|u(x)\| = 0$ et u conserve la norme; donc $\|x\| = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker } u = \{0\}$, ce qui assure l'injectivité de u et donc sa bijectivité.

Ou bien : compte tenu du th. précédent, transforme une base en une base !

Prop 3:

$(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe, appelé groupe orthogonal de E .

 Démonstration:

Dire que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe signifie que :

- la loi $\circ$ est *interne* dans $\mathcal{O}(E)$.
En effet, soit $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$. Pour tout $x \in E$, $\|(v \circ u)(x)\| = \|v(u(x))\| = \|u(x)\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$ puis $u \in \mathcal{O}(E)$.
On en déduit $v \circ u \in \mathcal{O}(E)$.
- la loi $\circ$ est associative, c'est une propriété connue.
- Il est clair que Id_E est un automorphisme orthogonal, $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathcal{O}(E)$.
- Enfin, soit $u \in \mathcal{O}(E)$. On sait que u est bijectif et u^{-1} linéaire. Or, pour tout $x \in E$, $\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\|$ car u conserve la norme. Or $u \circ u^{-1} = \text{Id}_E$ donc $\|u^{-1}(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Prop 4:

Soit u une isométrie vectorielle de E ;

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

 Démonstration:

F stable par u signifie $u(F) \subset F$. Mais u étant un isomorphisme, $\dim u(F) = \dim F$ donc on a en fait $u(F) = F$.

Soit alors $y \in F^\perp$ et $x \in F$ quelconque; d'après ce qui précède, il existe $x' \in F$ tel que $x = u(x')$ donc par conservation du produit scalaire :

$$\langle u(y) | x \rangle = \langle u(y) | u(x') \rangle = \langle y | x' \rangle = 0$$

donc $u(y) \in F^\perp$, cqfd.

I.2. Matrice d'une isométrie**Théorème 2:**

Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** d'un espace vectoriel euclidien E , u un endomorphisme de E et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

Alors u est une isométrie de E si et seulement si $M^\top M = I_n$.

 Démonstration:

- Supposons $u \in \mathcal{O}(E)$, et M sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. En notant (C_k) les colonnes de la matrice M , le terme d'indice (i, j) de $M^\top M$ est égal à $C_i^\top C_j$ soit à $\langle u(e_i) | u(e_j) \rangle$ donc à $\delta_{i,j}$. Donc $M^\top M = I_n$.
- Réciproque idem !

Déf 2:

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale lorsque $M^\top M = I_n$.

Cela équivaut à dire que M est inversible et $M^{-1} = M^\top$ (et on aura donc aussi $MM^\top = I_n$).

On notera $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n .

Prop 5:

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- M est une matrice orthogonale ;
- M est la matrice d'une isométrie dans une base orthonormée ;
- M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ;
- Les vecteurs colonnes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel ;
- Les vecteurs lignes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

 Démonstration:

Le fait que les trois premières propriétés sont équivalentes découle de tous les résultats précédents.

Si on écrit $M = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$ où les C_j sont les colonnes de la matrice, le terme d'indice (i, j) de la matrice $M^T M$ est $C_i^T C_j = \langle C_i | C_j \rangle$ (produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$), donc

$$M^T M = I_n \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{i,j} \iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une famille orthonormale}$$

Pour les lignes, il suffit de remarquer que puisque $MM^T = I_n$, la matrice M^T est aussi orthogonale.

Corollaire 5.1:

$(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe (inclus dans le groupe linéaire $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \circ)$).

Rem: Pour vérifier qu'une matrice est orthogonale, il est plus simple d'utiliser la caractérisation **d)** ou **e)** plutôt que de calculer le produit matriciel $M^T M$ (on a seulement $\frac{n(n+1)}{2}$ calculs au lieu de n^2).

Exemple : $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$

Prop 6:

- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $|\det u| = 1$.
- L'ensemble des isométries de déterminant égal à $+1$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$; ses éléments sont appelés des rotations ou isométries positives.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de H s'appelle une réflexion; c'est un automorphisme orthogonal de déterminant -1 .
Une isométrie de déterminant -1 s'appelle aussi une isométrie négative; leur ensemble est noté $\mathcal{O}^-(E)$.

 Démonstration:

- En effet, $M^T M = I_n \Rightarrow \det(M^T M) = 1 \Rightarrow \det(M^T) \det(M) = 1 \Rightarrow (\det M)^2 = 1$.
- En effet, compte tenu des propriétés du déterminant, la composée de deux isométries positives est une isométrie positive, et l'inverse d'une isométrie positive est une isométrie positive.
- Dans une base de vecteurs propres, la matrice d'une réflexion est de la forme $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$ donc est de déterminant -1 .

Prop 7:

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

- Les seules valeurs propres réelles possibles de A sont ± 1 (c'est-à-dire $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$).
- Plus généralement, les valeurs propres complexes de A sont de module 1 (c'est-à-dire $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$).

 Démonstration:

1. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ dont A est la matrice dans une base orthonormée. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A donc de u ; il existe $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$. La propriété $\|u(x)\| = \|x\| \neq 0$ implique alors $|\lambda| = 1$.
2. Soit λ une valeur propre complexe de A : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$. On calcule alors

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T (\lambda X) = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \|X\|^2$$

mais puisque $\overline{X}^T AX$ est un nombre complexe, il est égal à sa transposée :

$$\overline{X}^T AX = X^T A^T \overline{X} = X^T A^{-1} \overline{X} \quad (\text{car } A \text{ orthogonale})$$

Mais A^{-1} étant à coefficients réels on a $A^{-1} \overline{X} = \overline{A^{-1} X} = \overline{\frac{1}{\lambda} X} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \overline{X}$ d'où $\overline{X}^T AX = \frac{1}{\overline{\lambda}} X^T \overline{X} = \frac{1}{\overline{\lambda}} \|X\|^2$ et finalement, puisque $\|X\|^2 \neq 0$ on obtient $\lambda = \frac{1}{\overline{\lambda}}$.

I.3. Orientation**I.3.1. Orientation d'un espace vectoriel réel (rappel)**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 3:

Dans l'ensemble des bases de E , on définit une relation binaire par :

$$\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \iff \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement *deux* classes d'équivalence.

Déf 3:

Orienté l'espace vectoriel E , c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle classe des bases directes, l'autre étant alors appelée classe des bases indirectes. (il n'y a que deux orientations possibles)

I.3.2. Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Dans le cas où E est un espace vectoriel euclidien, il sera orienté par le choix d'une base orthonormale.

Prop 8:

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E , u une isométrie vectorielle et $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$ l'image de $\mathcal{B}$ par u .

Alors u est une isométrie positive si et seulement si $\mathcal{B}'$ est encore une base directe.

 Démonstration:

immédiat, puisque la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est égale à la matrice de u dans $\mathcal{B}$, donc $\det u = \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Déf 4:

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n , et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

Alors le déterminant de cette famille dans *toute* base orthonormée directe est le même ; il s'appelle le produit mixte de $(x_1, \dots, x_n)$:

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormale directe.}$$

En effet, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases, on a la propriété :

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, on a $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$.

I.3.3. Produit vectoriel en dimension 3

Théorème 4: et définition 5

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et u, v deux vecteurs de E . Alors il existe un et un seul vecteur $a \in E_3$ tel que

$$\forall w \in E_3, [u, v, w] = \langle a | w \rangle.$$

a s'appelle le produit vectoriel de u et v et est noté $u \wedge v$. Il est donc caractérisé par

$$\forall (u, v, w) \in E_3^3, [u, v, w] = \langle u \wedge v | w \rangle.$$

 Démonstration:

L'application $w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire d'après les propriétés du déterminant. D'après le théorème de représentation d'une forme linéaire, il existe un et un seul vecteur a de E telle qu'elle soit égale à $\langle a | w \rangle$ pour tout w .

Prop 9:

Soient u et v deux vecteurs de E_3 . Alors

- $u \wedge v = 0_E \iff$ la famille (u, v) est liée.
- Le vecteur $u \wedge v$ appartient à $\text{Vect}(u, v)^\perp$. De plus, si la famille (u, v) est libre, la famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.

 Démonstration:

- Si la famille (u, v) est liée, alors, pour tout $w \in E_3$, $\langle u \wedge v | w \rangle = [u, v, w] = 0$. Ainsi, $u \wedge v \in E_3^\perp$, c'est-à-dire $u \wedge v = 0$.
Si la famille (u, v) est libre, on peut trouver w tel que (u, v, w) soit une base de E_3 (théorème de la base incomplète), et alors $[u, v, w] \neq 0$, donc $u \wedge v \neq 0$.
- $\langle u \wedge v | u \rangle = [u, v, u] = 0$ donc $u \wedge v$ est orthogonal à u , et à v de la même façon.
Si (u, v) est libre, on a $[u, v, u \wedge v] = \|u \wedge v\|^2 > 0$ donc $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.

Prop 10:

L'application $E_3 \times E_3 \longrightarrow E_3$ est bilinéaire antisymétrique.
 $(u, v) \longmapsto u \wedge v$

 Démonstration:

découle immédiatement du fait que le déterminant est une forme multilinéaire antisymétrique.

Prop 11:

Si u et v ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$, les coordonnées dans cette même base du produit vectoriel $u \wedge v$ sont :

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

 Démonstration:

Si l'on note (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée directe considérée, la première coordonnée (par exemple) de $u \wedge v$ dans cette base est égale $\langle u \wedge v | e_1 \rangle$ donc à $[u, v, e_1]$. Et en développant selon la dernière colonne, on trouve bien $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$.
Idem pour les autres coordonnées.

I.3.4. Orientation d'un plan ou d'une droite en dimension 3

- Dans E_3 , une droite D est orientée par le choix d'un vecteur non nul de D .
- Soit P un plan de l'espace euclidien orienté E_3 , et n un vecteur normal à P . Le choix de n oriente la droite $D = P^\perp$.
 P est alors orienté par le choix d'une base (u, v) de deux façons différentes, selon que la base (u, v, n) est directe ou pas. Dans le 1er cas, on dit que les orientations choisies sur D et P sont compatibles.

I.3.5. Interprétation géométrique

Angle de deux vecteurs en dimension 3

Déf 6:

Si u et v sont deux vecteurs *non nuls* de E_3 , la mesure de l'angle de ces vecteurs est l'unique réel $\theta \in [0; \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \|v\|}$.

Prop 12:

Si u et v sont deux vecteurs *non colinéaires* de E_3 , et si $\theta \in [0; \pi]$ est la mesure de leur angle, alors

$$u \wedge v = \|u\| \|v\| \sin \theta . n$$

où n est un vecteur unitaire normal au plan $\text{Vect}(u, v)$ tel que la base (u, v, n) soit directe.

 *Démonstration:*

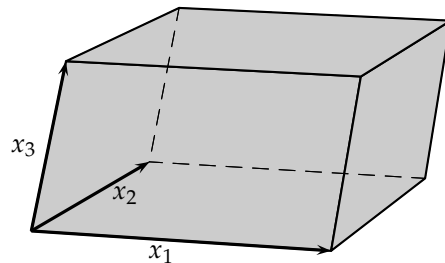
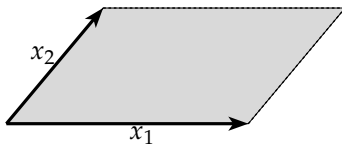
Soit $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base orthonormée directe du plan $\text{Vect}(u, v)$ (orienté par le choix de n). Alors les coordonnées de u et v dans la base orthonormée directe (e_1, e_2, n) sont respectivement $\begin{pmatrix} \|u\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \|v\| \cos \theta \\ \|v\| \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où le résultat.

Interprétation géométrique du produit mixte

En dimension 2, la valeur absolue du produit mixte de x_1 et x_2 représente l'aire du parallélogramme construit sur x_1 et x_2 .

En dimension 3, $\|x_1 \wedge x_2\|$ représente aussi l'aire du parallélogramme construit sur x_1 et x_2 .

En dimension 3, la valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs x_1 , x_2 et x_3 représente le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.



 *Démonstration:*

| Voir figure au tableau.

I.4. Classification des isométries en dimension 2

On note ici E un plan vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$, et on supposera E orienté par le choix de cette base.

Soit u un automorphisme orthogonal de E . Il y a deux cas possibles :

- $\det u = +1$.

u est alors une rotation. Il existe un réel $\theta \in]-\pi, \pi]$, appelé *angle de la rotation*, tel que la matrice de u dans toute base orthonormale directe soit de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sa matrice dans une base orthonormale *indirecte* s'obtient en changeant θ en $-\theta$.

- $\det u = -1$.

Il existe alors un réel θ tel que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

mais ici, θ dépend de la base orthonormale $\mathcal{B}$ choisie.

Il est alors facile de vérifier, en cherchant les vecteurs propres de u pour les valeurs propres ± 1 , que u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (réflexion). Cette droite a pour vecteur de

base le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

I.5. Classification des isométries en dimension 3

On note ici E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Soit u un automorphisme orthogonal de E . Il y a deux cas possibles :

- $\det u = +1$.

u s'appelle encore une rotation. On cherche alors l'ensemble des vecteurs invariants par u , c'est-à-dire le sous-espace propre $E_1(u)$ associé à la valeur propre 1. On montre qu'il n'y a que deux cas possibles :

- soit $\dim E_1(u) = 3$: u est alors l'application identique de E .
- soit $\dim E_1(u) = 1$: l'ensemble des vecteurs invariants de u est ici une droite D , appelée *axe de la rotation*.

Le plan $P = D^\perp$ est alors stable par u ; en considérant un vecteur de base unitaire e_1 de l'axe D et une base orthonormale (e_2, e_3) de P telle que la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit directe, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

θ est l'angle de la rotation ; il vérifie la relation : $\operatorname{tr} u = 1 + 2 \cos \theta$ (on rappelle que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice). Cette relation très simple permet de déterminer facilement $\theta \in [0; \pi]$.

- $\det u = -1$.

On montre alors qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ (que l'on peut choisir directe) telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- si $\theta = 0$ modulo 2π , u est la symétrie orthogonale par rapport au plan P de base (e_2, e_3) . Ce plan est le sous-espace propre $E_1(u)$.
- si $\theta = \pi$ modulo 2π , on a alors simplement $u = -\operatorname{Id}_E$.
- sinon, comme on peut le vérifier facilement à l'aide de la représentation matricielle, u est la composée commutative de la réflexion par rapport à P et de la rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$; cet axe est alors l'ensemble des vecteurs x tels que $u(x) = -x$, c'est-à-dire le sous-espace propre $E_{-1}(u)$, et l'ensemble des vecteurs invariants de u est réduit à $\{0\}$. L'angle θ de la rotation vérifie ici la relation : $\operatorname{tr} u = -1 + 2 \cos \theta$.

u s'appelle l'*antirotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ* .

Rem: On remarquera que la simple détermination des sous-espaces propres de u et le calcul de sa trace permettent de caractériser u entièrement.

Rem: On peut résumer les résultats précédents en classant les automorphismes orthogonaux selon la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants $E_1(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$; cela donne les tableaux suivants :

– si u est un automorphisme orthogonal en dimension 2 :

$\dim E_1(u)$	Nature de u	Type d'isométrie
0	rotation	+
1	réflexion d'axe $E_1(u)$	-
2	Id_E	+

– si u est un automorphisme orthogonal en dimension 3 :

$\dim E_1(u)$	Nature de u	Type d'isométrie
0	antirotation d'axe $E_{-1}(u)$	-
1	rotation d'axe $E_1(u)$	+
2	réflexion par rapport au plan $E_1(u)$	-
3	Id_E	+

II. Endomorphismes auto-adjoints

II.1. Définition

Déf 7:

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien E est dit auto-adjoint (ou symétrique) si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle.$$

On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E .

Prop 13:

1. Un endomorphisme est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans une/toute base *orthonormale* est symétrique.
2. L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

 **Démonstration:**

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et A sa matrice dans une base *orthonormale* $\mathcal{B}$. Par définition, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, a_{ij} est la i -ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ du vecteur $u(e_j)$ donc $a_{ij} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$ puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormale.
Si u est auto-adjoint, on a $a_{ij} = \langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle = a_{ji}$. Ainsi, $A = A^T$.
Réciproquement, si $A = A^T$ on a $\langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et on en déduit facilement, en utilisant la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire, que l'égalité $\langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle$ est vraie pour tous x, y .
Autre démonstration possible : avec les notations habituelles, on a $\langle x | u(y) \rangle = X^T (AY)$ donc si $A = A^T$ on a $\langle x | u(y) \rangle = X^T A^T Y = AX^T Y = \langle u(x) | y \rangle$.
2. immédiat

Prop 14: Une propriété importante

Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

Démonstration:

Supposons u auto-adjoint et F stable par u .

Alors, si y appartient à $F^\perp$ on a, pour tout $x \in F$, $\langle y | u(x) \rangle = 0$ puisque $u(x)$ appartient à F .

Donc $\langle u(y) | x \rangle = 0$ pour tout $x \in F$, c'est-à-dire $u(y) \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u .

II.2. Caractérisation des projecteurs orthogonaux et des symétries orthogonales

Remarque : les deux théorèmes de ce paragraphe sont vrais dans un espace préhilbertien réel quelconque, pas seulement dans un espace de dimension finie.

Théorème 5: Caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs

Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit p un projecteur de E ($p \circ p = p$). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) p est un projecteur orthogonal.
- b) Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- c) Pour tous $x, y \in E$, $\langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$ ($= \langle p(x) | p(y) \rangle$).

Rem: La propriété b) implique que p est une application linéaire continue (cf. chapitre sur les espaces vectoriels normés).

Démonstration:

a) $\Rightarrow$ b) découle directement de la propriété de Pythagore, puisque si p est un projecteur orthogonal, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux, donc $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

b) $\Rightarrow$ a) : soit p un projecteur tel que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Soit alors $x \in \text{Ker } p$ et $y \in \text{Im } p$ (on rappelle que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a par hypothèse :

$$\|p(x + ty)\|^2 \leq \|x + ty\|^2$$

d'où en développant et en utilisant $p(x) = 0$ et $p(y) = y$: $t^2 \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2$ soit $\|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle \geq 0$.

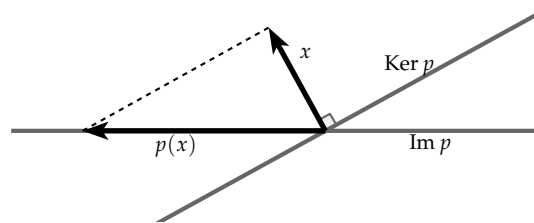
Cela étant vrai pour tout t réel, on en déduit $\langle x | y \rangle = 0$ soit $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$, cqfd.

Autre démonstration possible :

Si, par l'absurde, p n'était pas une projection orthogonale, on pourrait trouver un vecteur x tel que $x \in (\text{Ker } p)^\perp$ et $x \notin \text{Im } p$. D'après la propriété de Pythagore, puisque $p(x) - x \in \text{Ker } p$ est orthogonal à x , on aurait

$$\|p(x)\|^2 = \|(p(x) - x) + x\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|x\|^2 > \|x\|^2$$

(en effet, $p(x) \neq x$ puisque $x \notin \text{Im } p$). On a ainsi trouvé un vecteur x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$, d'où la contradiction.



c) $\Rightarrow$ b) : si c) est vérifiée on obtient, en prenant $y = x$: $\|p(x)\|^2 = \langle p(x) | x \rangle$ donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|p(x)\|^2 \leq \|p(x)\| \|x\|$. Si $p(x) \neq 0$, cela implique $\|p(x)\| \leq \|x\|$, et ce résultat reste vrai pour $x = 0$.

a) $\Rightarrow$ c) : Soit p une projection orthogonale et x, y deux vecteurs quelconques de E . Alors :

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in \text{Im } p, x_2 \in \text{Ker } p, \quad y = y_1 + y_2 \text{ avec } y_1 \in \text{Im } p, y_2 \in \text{Ker } p.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \langle p(x) | y \rangle &= \langle x_1 | y_1 + y_2 \rangle = \underbrace{\langle x_1 | y_1 \rangle}_{= \langle p(x) | p(y) \rangle} = \langle x_1 + x_2 | y_1 \rangle = \langle x | p(y) \rangle. \end{aligned}$$

Corollaire 5.1:

Un projecteur est en plus un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si il s'agit d'un projecteur orthogonal.

Théorème 6: Caractérisation des symétries orthogonales parmi les symétries

Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit s une symétrie de E ($s \circ s = \text{Id}_E$). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) s est une symétrie orthogonale.
- b) Pour tout $x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.
- c) Pour tous $x, y \in E$, $\langle s(x) | y \rangle = \langle x | s(y) \rangle$.

 *Démonstration:*

a) $\Rightarrow$ b) Supposons que s est une symétrie orthogonale. Alors pour tout $x \in E$, on a $x = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2}$, ces deux vecteurs étant orthogonaux. D'après la propriété de Pythagore on aura $\|x\|^2 = \frac{1}{4} (\|x+s(x)\|^2 + \|x-s(x)\|^2) = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|s(x)\|^2)$ (identité du parallélogramme) d'où $\|x\|^2 = \|s(x)\|^2$.

b) $\Rightarrow$ a) : soit s une symétrie telle que pour tout $x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$. En notant $p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}$ le projecteur associé on aura

$$\forall x \in E, \|p(x)\| = \frac{1}{2} \|x + s(x)\| \leq \frac{1}{2} (\|x\| + \|s(x)\|) = \|x\|$$

donc d'après le théorème précédent p est une projection orthogonale, et s est bien une symétrie orthogonale.

Corollaire 6.1:

Une symétrie est en plus un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si il s'agit d'une symétrie orthogonale.

II.3. Réduction des endomorphismes auto-adjoints**Théorème 7: Théorème spectral**

Soit E un espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme auto-adjoint de E et A sa matrice dans une base orthonormée de E . Alors :

1. Les valeurs propres de A sont toutes réelles (donc χ_u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$).
2. Les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.
3. Il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u (en abrégé, on dit que « u est diagonalisable dans une base orthonormée » ou « orthodiagonalisable »).
4. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

 *Démonstration:*

1. Soit A la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une valeur propre complexe de A : il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. Ainsi $(AX)^T = \lambda X^T$, et comme A est symétrique il vient : $X^T A = \lambda X^T$, d'où : $X^T A \overline{X} = \lambda X^T \overline{X}$. D'autre part, comme A est réelle, $\overline{A} = A$, d'où : $A \overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$, et $X^T A \overline{X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$. En définitive $\lambda X^T \overline{X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$, et comme $X^T \overline{X} \neq 0$, il vient $\lambda = \overline{\lambda}$ et λ est bien réel.

2. Soit λ, λ' deux valeurs propres distinctes et x, x' deux vecteurs propres correspondants : $u(x) = \lambda x$, $u(x') = \lambda' x'$. Comme u est symétrique : $\langle u(x) | x' \rangle = \langle x | u(x') \rangle$, c'est-à-dire $\lambda \langle x | x' \rangle = \lambda' \langle x | x' \rangle$. Comme $\lambda \neq \lambda'$, on en déduit $\langle x | x' \rangle = 0$. Ainsi les sous-espaces propres associés à λ et λ' sont orthogonaux.

3. Soit $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ la somme directe des sous-espaces propres de u . Le sous-espace vectoriel F est stable par u , donc son supplémentaire orthogonal $F^\perp$ est également stable par u . Si $F^\perp \neq \{0\}$, alors la restriction de u à $F^\perp$ a au moins une valeur propre complexe, qui est en fait réelle d'après le premier point, d'où $F^\perp \cap F \neq \{0\}$, ce qui est absurde. On en conclut que $F^\perp = \{0\}$, d'où $F = E$: ainsi E est somme directe des sous-espaces propres, donc u est diagonalisable. En choisissant une base orthonormale dans chaque sous-espace propre, on constitue une base orthonormale de vecteurs propres de u .

4. Si A est la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ et si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de vecteurs propres de u , alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale, c'est-à-dire $P^{-1} = P^T$. D'où :

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

 **Rem :** Le résultat ne s'étend pas aux matrices à coefficients complexes.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

II.4. Formes bilinéaires symétriques associées à un endomorphisme auto-adjoint

Déf 8:

Soit E un espace vectoriel euclidien.
Étant donné un endomorphisme auto-adjoint u , l'application

$$\varphi_u : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle \end{cases}$$

est une forme bilinéaire symétrique (vérification facile), dite associée à u .

Écriture matricielle :

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , u un endomorphisme auto-adjoint et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
Soient x et y deux vecteurs de E , et X, Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
Alors :

$$\varphi_u(x, y) = X^T A Y = Y^T A X.$$

Prop 15:

Si $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$X^T A Y = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} a_{i,j} x_i y_j.$$

 **Démonstration:**

| cf. formule du produit matriciel.

La proposition suivante établit que toute forme bilinéaire symétrique peut être définie de cette façon :

Prop 16:

Soit E un espace vectoriel euclidien et φ une forme bilinéaire symétrique sur E .
Alors il existe un unique endomorphisme auto-adjoint u tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \langle u(x) | y \rangle.$$

 **Démonstration:**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , et soit A la matrice donnée par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket, a_{ij} = \varphi(e_i, e_j).$$

Alors on vérifie aisément que l'endomorphisme u de matrice A dans $\mathcal{B}$ convient.

Déf 9:

Un endomorphisme auto-adjoint u est dit positif (resp. défini positif) si la forme bilinéaire φ_u qui lui est associée est positive (resp. définie positive), c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, \langle x | u(x) \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x | u(x) \rangle > 0).$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) de E se note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$).

Théorème 8:

Soit E un espace vectoriel euclidien, et u un endomorphisme auto-adjoint de E .

1. u est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. u est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

 Démonstration:

Soit u un endomorphisme symétrique.

1. a) $\Rightarrow$: Supposons que u est positif, avec λ une valeur propre de u et x un vecteur propre correspondant. Alors : $\langle u(x) | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$ puisque $x \neq 0$. Les valeurs propres de u sont bien positives.
- b) $\Leftarrow$: Supposons que toutes les valeurs propres λ_i de u sont positives. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés (existe d'après le théorème spectral).

$$\text{Pour tout vecteur } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ on a : } \langle u(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

Ainsi l'endomorphisme u est bien positif.

2. La démonstration s'étend sans difficulté aux endomorphismes symétriques définis positifs.

Déf 10:

1. Une matrice représentant dans une base orthonormale un endomorphisme auto-adjoint positif est appelée symétrique positive.

L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On a donc, par définition :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X \geq 0$$

et d'après le théorème précédent :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+.$$

2. Une matrice représentant dans une base orthonormale un endomorphisme auto-adjoint défini positif est appelée symétrique définie positive.

L'ensemble des matrices symétriques définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc, par définition :

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0, X^\top A X > 0$$

et d'après le théorème précédent :

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Prop 17:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive si et seulement si il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.

 Démonstration:

- Si $A = B^\top B$ alors A est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$X^\top A X = X^\top B^\top B X = (B X)^\top (B X) = \|B X\|^2$$

donc $X^\top A X \geq 0$ d'où $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Réciproquement, supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

A étant symétrique réelle est (ortho)diagonalisable : $A = P D P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

D'après la question précédente, les λ_i sont des réels positifs, donc en posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on a $D = \Delta^2$, et puisque $\Delta^\top = \Delta$ on a $A = P \Delta \Delta^\top P^\top = B^\top B$ en posant $B = \Delta^\top P^\top$.

On peut démontrer exactement de la même façon que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement si il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.