ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 2

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Déf 1:

Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta : I \to \mathbb{K}$ des applications continues.
On considère l'équation différentielle linéaire scalaire du second ordre :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \quad (L)$$

On appelle solution de (L) sur I toute application $f\colon I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable, telle que

$$\forall\, t \in I,\ \alpha(t)f''(t) + \beta(t)f'(t) + \gamma(t)f(t) = \delta(t).$$

L'équation (L) est dite homogène si $\delta = 0$. L'équation homogène associée à (L) est l'équation :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = 0 \quad (H)$$

Prop 1:

1. L'ensemble $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{D}_2(I,\mathbb{K})$ des applications deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
2. Si f_0 est une solution particulière de (L) (s'il en existe), l'ensemble $\mathscr{S}(L)$ des solutions de l'équation (L) est égal à $f_0 + \mathscr{S}(H) = \{f_0 + h \mid h \in \mathscr{S}(H)\}$.

Démonstration:

1. Immédiat par la caractérisation d'un sous-espace vectoriel : $\mathscr{S}(H)$ contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéaires.
2. Si f_0 est solution de (L), alors pour une application $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable, on a :

   $f \in \mathscr{S}(L) \iff \alpha f'' + \beta f' + \gamma f = \delta \iff \alpha f'' + \beta f' + \gamma f = \alpha f_0'' + \beta f_0' + \gamma f_0 \iff \alpha(f-f_0)'' + \beta(f-f_0)' + \gamma(f-f_0) = 0 \iff f - f_0 \in \mathscr{S}(H)$

   ce qui établit le résultat

Remarques

1. Il suffit donc, pour déterminer $\mathscr{S}(L)$, de connaître une solution de (L) et les solutions de (H) : si f_0 est une solution particulière de l'équation complète (L), alors la solution générale de (L) est : $f = f_0 + h$ où h désigne une solution quelconque de 1'équation homogène (H).
2. Sans plus d'hypothèse, on ne peut pas prévoir la dimension de $\mathscr{S}(H)$, ni garantir que (L) possède effectivement une solution sur I, comme on le verra plus loin sur des exemples.

Comme dans tout problème linéaire, on dispose aussi du principe de superposition des solutions :

Prop 2:

Soient $\delta_1,\ \delta_2 : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues et $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
Si f_1 est une solution de l'équation $\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta_1(t)$ et f_2 est une solution de l'équation $\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta_2(t)$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution de l'équation $\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \lambda_1\delta_1(t) + \lambda_2\delta_2(t)$.

Rem: Ce résultat se généralise sans problème au cas où le second membre est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i(t)$.

■ **Résolution dans le cas où α ne s'annule pas**

Si l'application α ne s'annule pas sur I, l'équation (L) est alors équivalente à :

$$x'' = -\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}x' - \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}x - \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}$$

donc on se ramène à une équation sous forme réduite (ou équation résolue) de la forme :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (L)$$

où a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$.

Rem: Dans le cas où x est solution d'une telle équation, x est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$.

Le théorème suivant est admis.

Théorème 1: de Cauchy-Lipschitz

Si a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, pour tout $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$ il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \quad (L)$$

définie sur I et qui vérifie les conditions initiales : $f(t_0) = x_0$, $f'(t_0) = x'_0$.

Corollaire 1.1: *structure de l'ensemble des solutions*

Soient a et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble $\mathscr{S}(H)$ des solutions de l'équation homogène linéaire du second ordre :

$$x'' = a(t)x' + b(t) \quad (H)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

☞ *Démonstration:*

On a déjà vu que $\mathscr{S}(H)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit alors $t_0 \in I$ et φ l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{S}(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ f & \longmapsto & (f(t_0), f'(t_0)) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que φ est linéaire. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(x_0, x'_0) \in \mathbb{K}^2$ il existe une et une seule $f \in \mathscr{S}(H)$ telle que $\varphi(f) = (x_0, x'_0)$, c'est-à-dire que φ est bijective. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Il en résulte que $\mathscr{S}(H)$ est de dimension finie, et que $\dim \mathscr{S}(H) = \dim \mathbb{K}^2 = 2$.

Corollaire 1.2:

Avec les mêmes notations, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (H), l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\mathscr{S}(H) = \left\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\}.$$

II. Cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène

Dans ce cas, on peut appliquer la méthode de variation de la constante (encore appelée *méthode de Lagrange*). En voici le principe.
Considérons l'équation différentielle (pas forcément écrite sous forme résolue) :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t).$$

Supposons connue une solution x_1 de l'équation homogène.
Sur un intervalle J où la fonction x_1 ne s'annule pas, on peut chercher une solution quelconque de l'équation complète sous la forme : $x(t) = y(t)x_1(t)$ (en effet, puisque x_1 ne s'annule pas, la fonction $y = \dfrac{x}{x_1}$ est bien définie et deux fois dérivable).

On a alors :

$$\begin{cases} x(t) = y(t)x_1(t) \\ x'(t) = y'(t)x_1(t) + y(t)x_1'(t) \\ x''(t) = y''(t)x_1(t) + 2y'(t)x_1'(t) + y(t)x_1''(t) \end{cases}$$

D'où :

$$a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t) = a(t)x_1(t)y''(t) + \left(2a(t)x_1'(t)+b(t)x_1(t)\right)y'(t) + \left(a(t)x_1''(t)+b(t)x_1'(t)+c(t)x_1(t)\right)y(t)$$

Comme $a(t)x_1''(t)+b(t)x_1'(t)+c(t)x_1(t) = 0$, l'équation différentielle devient :

$$a(t)x_1(t)y''(t) + \left(2a(t)x_1'(t)+b(t)x_1(t)\right)y'(t) = d(t)\,.$$

C'est une équation scalaire du premier ordre pour la fonction y'. Il ne reste « plus qu'à » la résoudre pour trouver y', d'où l'on déduit y puis x.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle $(t-1)x''+tx'+x = 1$, en cherchant une solution de l'équation homogène sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$.

Solution:

On se place sur l'un des intervalles $I =]-\infty, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est solution de l'équation homogène si et seulement si $\forall t \in I \;\; (t-1)\alpha^2 + t\alpha + 1 = 0$, c'est-à-dire $(\alpha^2+\alpha)t + 1 - \alpha^2 = 0$; la seule possibilité est $\alpha = -1$, d'où $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Puisque x_1 ne s'annule jamais (ouf!), on peut chercher une solution de l'équation complète sous la forme $x(t) = y(t)\mathrm{e}^{-t}$. On obtient, après quelques calculs :

$$(t-1)y''(t) - (t-2)y'(t) = \mathrm{e}^t$$

En posant $y' = z$, la fonction z est solution sur I de l'équation scalaire du premier ordre :

$$(t-1)z' - (t-2)z = \mathrm{e}^t$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont $z = C\dfrac{\mathrm{e}^t}{t-1}$, et e^t est une solution particulière évidente. D'où :

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathrm{e}^t + C_1\frac{\mathrm{e}^t}{t-1} \\ y(t) &= \mathrm{e}^t + C_1\int \frac{\mathrm{e}^t}{t-1}\,\mathrm{d}t + C_2 \\ x(t) &= 1 + C_1\,\mathrm{e}^{-t}\int \frac{\mathrm{e}^t}{t-1}\,\mathrm{d}t + C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

(les constantes C_1 et C_2 dépendant de l'intervalle sur lequel on se place).

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ tend vers ∞ au point 1 (car $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1). Les seules solutions prolongeables à $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x(t) = 1 + C_2\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle : $tx'' + 2(t+1)x' + 2x = 1 - \mathrm{e}^{-2t}$, en cherchant une solution de l'équation homogène sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.

Solution:

On trouve $x = \dfrac{1}{t}$ comme solution particulière de l'équation homogène.

A la fin de passionnants calculs, on trouve les solutions sur $\mathbb{R}$:

$$x(t) = \begin{cases} C_1\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{t} + \dfrac{D_1}{t} + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) & \text{si } t > 0 \\ C_2\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{t} + \dfrac{D_2}{t} + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Pour que cette fonction soit prolongeable par continuité à droite en 0, il faut et il suffit que $C_1 = -D_1$ et pour qu'elle soit prolongeable par continuité à gauche en 0, il faut et il suffit que $C_2 = -D_2$.
Dans ce cas, x s'écrit :

$$x(t) = \begin{cases} C_1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}-1}{t}\right) + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) & \text{si } t > 0 \\ C_2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}-1}{t}\right) + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Il faut alors $C_1 = C_2$ pour que cette fonction soit continue en 0. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\; x(t) = C\left(\frac{\mathrm{e}^{-2t}-1}{t}\right) + \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) \quad (C \in \mathbb{R})$$

et ces fonctions sont toutes solutions car elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour le justifier, il suffit de remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-2t}-1}{t}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$.

III. Équations à coefficients constants (rappels de 1re année)

Il s'agit des équations différentielles de la forme :

$$ax'' + bx' + cx = d(t) \quad (L)$$

où a, b, c sont des scalaires tels que $a \neq 0$, et où d est une application continue de I dans $\mathbb{K}$.

III.1. Résolution de l'équation homogène

Cette équation s'écrit

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (H).$$

On peut alors chercher une solution de cette équation sous la forme $t \mapsto e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Facilement :

$$t \mapsto e^{\lambda t} \in \mathscr{S}(H) \iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.$$

L'équation ci-dessus s'appelle *l'équation caractéristique* de l'équation. Notons Δ son discriminant.
La résolution de l'équation différentielle sera différente selon que $\mathbb{K}= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- *1er cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
  Il y a alors deux sous-cas à considérer :
  - Si $\Delta \neq 0$:
    L'équation caractéristique admet alors deux racines distinctes λ_1, λ_2. Il est alors facile de vérifier que les deux applications $t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $t \mapsto e^{\lambda_2 t}$ sont linéairement indépendantes ; on en déduit, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la forme générale des solutions de (H) :
    $$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2}\,.$$
  - Si $\Delta = 0$:
    L'équation caractéristique admet alors une racine double λ. L'application $= t \mapsto e^{\lambda t}$ est donc solution de (H), et un rapide calcul montre alors que l'application $t \mapsto te^{\lambda t}$ est aussi solution de (H). Les deux solutions obtenues étant linéairement indépendantes, on en déduit la solution générale de (H) :
    $$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2}\,.$$
- *2ème cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*
  Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on est conduit cette fois à distinguer trois cas selon les valeurs du réel Δ :
  - Si $\Delta > 0$:
    L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2. On en déduit, comme dans le cas complexe, la forme générale des solutions de (H) :
    $$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}\,.$$
  - Si $\Delta = 0$:
    L'équation caractéristique admet alors une racine double λ, et on conclut comme dans le cas complexe : les solutions de (H) sont données par :
    $$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}\,.$$
  - Si $\Delta < 0$:
    Puisque les coefficients a, b, c sont réels, l'équation caractéristique admet ici deux racines complexes conjuguées λ, $\overline{\lambda}$ distinctes. Une base de l'espace vectoriel des solutions à valeurs complexes est alors formée, d'après les calculs précédents, par les deux fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto e^{\overline{\lambda} t}$ ou encore par les deux fonctions $t \mapsto \mathcal{R}e\left(e^{\lambda t}\right)$ et $t \mapsto \mathcal{I}m\left(e^{\lambda t}\right)$, qui sont encore linéairement indépendantes.
    Si l'on note $\lambda = r + i\omega$ avec $r, \omega \in \mathbb{R}$, on a alors $e^{\lambda t} = e^{rt}e^{i\omega t}$, d'où $\mathcal{R}e\left(e^{\lambda t}\right) = e^{rt}\cos\omega t$ et $\mathcal{I}m\left(e^{\lambda t}\right) = e^{rt}\sin\omega t$, ce qui donne la forme générale des solutions à valeurs réelles :
    $$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ x(t) = \left(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right)e^{rt} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2}\,.$$

III.2. Résolution de l'équation avec second membre

Pour résoudre l'équation : $ax'' + bx' + cx = d(t)$ (L), puisque l'on vient de voir comment résoudre l'équation homogène, il y a toujours, bien sûr, la méthode de variations d'une constante.

Il y a cependant quelques cas particuliers où l'on peut trouver assez facilement une solution particulière de (L) (nous nous contentons d'énumérer les résultats, pour la démonstration, référez-vous à votre cours de première année).

- Si le second membre est de la forme $d(t) = P(t)$, où P est un polynôme, on cherchera (avec des coefficients à déterminer) une solution particulière sous la forme

$$\begin{cases} x(t) = Q(t) & \text{si } c \neq 0 \\ x(t) = tQ(t) & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ x(t) = t^2Q(t) & \text{si } b = c = 0 \end{cases} \quad \text{avec } Q \text{ polynôme de même degré que } P.$$

- Notons (E_c) l'équation caractéristique de (H), c'est-à-dire l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
  Si le second membre est de la forme $d(t) = \mathrm{e}^{mt}P(t)$, où P est un polynôme et où m est un nombre complexe, on cherchera (avec des coefficients à déterminer) une solution particulière sous la forme

$$x(t) = t^k\mathrm{e}^{mt}Q(t) \text{ où } \begin{cases} k = 0 & \text{si } m \text{ n'est pas racine de } (E_c) \\ k = 1 & \text{si } m \text{ est racine simple de } (E_c) \\ k = 2 & \text{si } m \text{ est racine double de } (E_c) \end{cases}$$

  et où Q est un polynôme de même degré que P.

IV. Utilisation de séries entières

Dans certaines circonstances [1], en particulier lorsque les coefficients de x' et de x sont des polynômes, il est possible de déterminer certaines solutions de l'équation différentielle homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ sous forme d'une série entière.

Pour cela, on procède de la manière suivante :

1. On se donne une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, dont on suppose le rayon de convergence $R > 0$, et l'on suppose que sa somme $x(t)$ est solution de l'équation différentielle pour $t \in]-R\,;R[$.
2. Les résultats du cours permettent d'exprimer facilement $x'(t)$ et $x''(t)$ sous forme de séries entières. On remplace alors x, x' et x'' dans l'équation différentielle, ce qui permet, en utilisant l'unicité du développement, d'en déduire une relation vérifiée par les a_n puis de les calculer en fonction de n.
3. Réciproquement, on vérifie que la série entière obtenue a bien un rayon de convergence strictement positif. Sa somme sera alors forcément solution de l'équation différentielle, d'après les calculs faits précédemment.

Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$.

   Solution:

   • Supposons qu'il existe une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Notons : $f(x) = \sum\limits_{=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Le théorème de dérivation d'une série entière permet d'écrire :

$$\forall\, x \in]-R\,;R[\,,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

   f est solution de (E) sur$]-R, R[$ si et seulement si :

$$4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

   d'où, après changement d'indice : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 4(n+1)na_{n+1}x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

1. Il s'agit du théorème de Fuchs...

puis : $2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n)x^n = 0$. Et par unicité du développement en série entière :

$$a_1 = \frac{a_0}{2} \text{ et } a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

On en déduit par récurrence facile : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$.
Ainsi, si (E) admet des solutions développables en séries entières, elles forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par f définie par :

$$\forall x \in]-R;R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!} = 0$, on a $R = +\infty$. La fonction f définie ci-dessus est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elle est forcément solution de (E), d'après les calculs faits.
De plus, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \text{ ch } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \text{ ch } \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_- , \cos \sqrt{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Ainsi : $f(x) = \begin{cases} \text{ch } \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

• Résolution de (E) sur $]-\infty;0[$:
Soit y une solution quelconque de (E) sur $]-\infty;0[$. Posons $y = zf$ (*ce qui est possible car f ne s'annule pas su $\mathbb{R}_+$!*), et recherchons une équation différentielle (E') vérifiée par z (méthode de variation de la constante). On a : $y' = z'f + zf'$ et $y'' = z''f + 2z'f' + zf''$.
En remplaçant dans (E), on obtient : $4x(z''f + 2z'f' + zf'') + 2(z'f + zf') - zf = 0$, et comme f est solution de (E) : $z(4xf'' + 2f' - f) = 0$ donc il reste finalement :

$$4xf(x)z'' + (8xf'(x) + 2f(x))z' = 0 \quad \text{soit} \quad z'' + \left(2x\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{2x}\right)z' = 0.$$

Et comme, sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f(x) = \text{ch } \sqrt{x}$,on obtient l'équation différentielle du premier ordre en z' :

$$(E') : z'' + \left(\frac{\text{th } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\right) z' = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\text{th } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\ln(\text{ch } \sqrt{x})$, d'où : $z'(x) = Ce^{-2\ln(\text{ch } \sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln x} = \dfrac{C}{(\text{ch } \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$.
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(\text{ch } \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2 \text{ th } \sqrt{x}$, donc : $z(x) = 2C \text{ th } \sqrt{x} + D$.
Enfin : $y(x) = z(x)f(x) = (2C \text{ th } \sqrt{x} + D) \text{ ch } \sqrt{x} = 2C \text{ sh } \sqrt{x} + D \text{ ch } \sqrt{x}$.
En posant $A = D$ et $B = 2C$, on obtient finalement la solution générale de E sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = A \text{ ch } \sqrt{x} + B \text{ sh } \sqrt{x}.$$

• Résolution de (E) sur $]-\infty;0[$:
On peut procéder de la même façon, mais c'est un peu plus délicat ici car la fonction $x \mapsto \cos \sqrt{-x}$ peut s'annuler su $\mathbb{R}_-$! Il faut donc faire les calculs sur tout intervalle où cette fonction ne s'annule pas, puis raccorder les solutions. On trouve alors que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}_-$ est :

$$y(x) = C \cos \sqrt{-x} + D \sin \sqrt{-x}.$$

• Raccords
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
Continuité de y : $y(0^+) = y(0^-)$ équivaut à $A = C$. On a alors $y(0) = A$.
Continuité de y' : $y'(x) = \dfrac{A \text{ sh } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{B \text{ ch } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ si $x > 0$ et $y'(x) = \dfrac{A \sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} - \dfrac{D \sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$ si $x < 0$.
Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{A\text{sh} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{A}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{A \sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{A}{2}$.
Par contre les applications $x \mapsto \dfrac{B\text{ch} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \dfrac{D \sin \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}$ n'admettent de limites en 0 (respectivement à droite et à gauche) que si $B = D = 0$.
On a donc, à ce stade : : $y(x) = A \text{ ch } \sqrt{x}$ si $x > 0$ et $y(x) = A \cos \sqrt{-x}$ si $x < 0$ et $y(0) = A$.
Donc $y = Af$ (où f est la fonction de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ vue au début), et puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, y est bien solution.
• Conclusion :
L'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1 et :

$$y \text{ solution de } (E) \iff y(x) = \begin{cases} A \text{ ch } \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ A \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle : $(E) : 4tx'' - 4x' + t^3x = 0$.

Solution:

Même principe.
Ici la relation de récurrence sur les (a_n) est : $a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-3}}{4(n+1)(n-1)}$, avec $a_1 = a_3 = 0$.
En prenant $a_0 = 1$ et $a_2 = 0$, on trouve la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$; en prenant $a_0 = 0$ et $a_2 = 1$, on trouve la fonction $t \mapsto \sin\left(\dfrac{t^2}{4}\right)$.
Cela donne directement une base de solutions.

V. Utilisation d'un changement de variable

Soit l'équation différentielle : $\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \quad (L)$, avec $\alpha, \dots, \delta$ continues de I dans $\mathbb{K}$.
Si φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle J sur I, telle que φ' ne s'annule pas sur J (donc φ strictement monotone), on peut alors faire le changement de variable $t = \varphi(u)$. On aura alors $x(t) = x \circ \varphi(u) = y(u)$. Si x est deux fois dérivable sur I, il en sera de même de y sur J et réciproquement.
Il faut maintenant calculer les dérivées successives de x en fonction de celles de $y = x \circ \varphi$, en utilisant la formule donnant la dérivée d'une fonction composée :

$$y'(u) = \varphi'(u) \cdot x' \circ \varphi(u) = \varphi'(u) \cdot x'(t) \quad \text{d'où} \quad x'(t) = \frac{1}{\varphi'(u)} \cdot y'(u)$$
$$y''(u) = \varphi''(u) \cdot x' \circ \varphi(u) + \varphi'(u)^2 \cdot x'' \circ \varphi(u) \quad \text{d'où} \quad x''(t) = \frac{y''(u)}{\varphi'(u)^2} - \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3} y'(u)$$

En remplaçant alors $x(t)$, $x'(t)$ et $x''(t)$ par ces expressions dans l'équation initiale (L), on obtient une équation différentielle du second ordre vérifiée par y. Si l'on sait la résoudre, on obtiendra alors $y(u)$, d'où l'on déduira $x(t) = y \circ \varphi^{-1}(t)$.

Exemples

1. Résoudre l'équation différentielle : $(1+t^2)x'' + tx' - \dfrac{x}{4} = 0$ à l'aide du changement de variable $t = \operatorname{sh} u$.

Solution:

Le coefficient de x'' ne s'annulant pas, on cherchera les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
L'application $u \mapsto \operatorname{sh} u$ étant une bijection de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur R, on peut poser $x(t) = x(\operatorname{sh} u) = y(u)$ avec y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On a alors, par dérivation d'une fonction composée :

$$y'(u) = \operatorname{ch} u \, x'(\operatorname{sh} u) \quad \text{et} \quad y''(u) = \operatorname{sh} u \, x'(\operatorname{sh} u) + \operatorname{ch}^2 u \, x''(\operatorname{sh} u)$$

et puisque $\operatorname{ch}^2 u = 1 + \operatorname{sh}^2 u$, on a $y''(u) = tx'(t) + (1+t^2)x''(t)$, de sorte que l'équation proposée est équivalente à

$$y'' - \frac{y}{4} = 0.$$

Les solutions de cette équation du second ordre à coefficients constants sont donc de la forme :

$$y(u) = \lambda e^{\frac{u}{2}} + \mu e^{-\frac{u}{2}} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \text{ constantes.}$$

Il faut ensuite exprimer ces solutions en fonction de t (c'est-à-dire déterminer φ^{-1}). C'est ici un exercice classique de Sup :

$$t = \operatorname{sh} u \iff t = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \iff \begin{cases} 2t = x - \frac{1}{x} \\ x = e^u \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - 2tx - 1 = 0 \\ x = e^u \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \pm \sqrt{t^2+1} \\ x = e^u \end{cases}$$
$$\iff e^u = t + \sqrt{t^2+1} \qquad \text{(seule solution positive).}$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme :

$$x(t) = \lambda \sqrt{t + \sqrt{t^2+1}} + \frac{\mu}{\sqrt{t + \sqrt{t^2+1}}} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \text{ constantes.}$$

2. Résoudre l'équation différentielle : $t^2x'' + 4tx' + 2x = 0$ à l'aide du changement de variable $t = \pm e^u$.

Solution:

On trouve la base de solutions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).