FORMES LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Formes linéaires et hyperplans

Déf 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.
(*Rem : Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, cela équivaut à : $\dim(H) = n - 1$.*)

Prop 1:

Si H est un hyperplan de E, alors, pour tout vecteur $a \notin H$, on a : $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Déf 2:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans le corps de base $\mathbb{K}$.
L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E s'appelle l'espace vectoriel dual de E, et est noté $E^\star$.

Rem: Si E est de dimension finie, on a : $\dim E = \dim E^\star$ (car $\dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K}$).

Exemples de référence

1. Soit D un ensemble non vide et $x_0 \in D$. L'application $\varphi \colon f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ (appelée *évaluation en un point*).
2. Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
   On peut alors considérer les n applications de E dans $\mathbb{K}$, e_i^* pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, définies par :
   $$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ e_i^*(x) = x_i\,.$$
   Alors les e_i^* sont des formes linéaires sur E, appelées formes linéaires coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
   Il est alors facile de vérifier que la famille $\{e_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est libre ; puisque le cardinal de cette famille est $n = \dim E = \dim E^\star$, cette famille forme une base de $E^\star$, appelée base duale de $\mathscr{B}$.

Théorème 1:

1. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^\star$, non nulle, telle que : $H = \operatorname{Ker} \varphi$.
2. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

II. Équations d'un hyperplan

Déf 3:

Si H est un hyperplan de E et si $\varphi \in E^\star$ (non nulle) est telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de l'hyperplan H.

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On sait que toute forme linéaire φ sur E est entièrement caractérisée par la donnée des images des vecteurs d'une base, donc ici les scalaires $a_i = \varphi(e_i)$.
Si x est un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a alors :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i .$$

Cette expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x s'appelle l'expression analytique de φ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarques

1. L'égalité $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ peut aussi s'écrire $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(x)$, où (e_i^*) désigne la base duale de $\mathscr{B}$.
   Ainsi, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$, et les a_i sont les coordonnées de φ dans la base duale.
2. Réciproquement, il est facile de vérifier que toute application de ce type est bien une forme linéaire sur E, puisque, d'après le calcul ci-dessus, il s'agit d'une combinaison linéaire des e_i^*.
   On a donc obtenu ainsi *l'expression générale d'une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie* dans une base donnée.

Conséquence :

Si H est un hyperplan de E, et si $H = \operatorname{Ker} \varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E, H est l'ensemble des vecteurs x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ (où les a_i sont des scalaires non tous nuls, ce sont les images des vecteurs de $\mathscr{B}$ par φ).
L'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ s'appelle alors une équation de H dans la base $\mathscr{B}$.

Prop 2:

Soient H et H' deux hyperplans de E, d'équations respectives dans $\mathscr{B}$: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$.
Alors $H' = H$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on ait $b_i = \lambda a_i$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2), l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient une équation de la forme $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi(e_1) = a$ et $\varphi(e_2) = b$.
   Un vecteur de base de cette droite est le vecteur $(-b, a)$.
   Si $a'x + b'y = 0$ est une autre équation de cette droite, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3), l'ensemble des triplets (x, y, z) qui vérifient une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan (c'est le noyau de la forme linéaire φ telle que $\varphi(e_1) = a$, $\varphi(e_2) = b$, $\varphi(e_3) = c$).
   Si $a'x + b'y + c'z = 0$ est une autre équation de ce plan, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$.

Rem: Ces résultats concernant l'équation d'un hyperplan, et plus particulièrement d'un plan en dimension 3, sont importants à retenir, et il faut penser à les utiliser car ils simplifient grandement certaines démonstrations.

Exercice Dans $\mathbb{R}^3$, écrire une équation du plan P engendré par les vecteurs $u = (1, -1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$.

III. Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille *libre* de p formes linéaires sur E ($p \in \mathbb{N}^*$), le sous-espace vectoriel

$$F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1\,;p]\!] \,, \varphi_i(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$.
L'ensemble des p équations $\varphi_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ s'appelle un système d'équations de F.

Rem: La même démonstration montre que, si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille de p formes linéaires sur E, *de rang* r, alors $\dim F = n - r$.

Exercice Déterminer une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ dont un système d'équations est :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Le théorème précédent possède une sorte de réciproque.

Théorème 3:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \leqslant n - 1$.
Il existe $n - p$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p}$ telles que

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker} \varphi_i$$

c'est-à-dire telles que, pour tout $x \in E$:

$$x \in F \iff [\varphi_1(x) = 0,\ \varphi_2(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_{n-p}(x) = 0] \quad (S)$$

(S) est un système d'équations de F.

Exercice Dans $\mathbb{R}^5$, écrire un système d'équations du plan P engendré par les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1, 0)$ et $v = (0, 1, -1, 1, -1)$.

Rem : Les méthodes utilisées dans les exemples et exercices de ce chapitre doivent être absolument sues.

Il faut savoir :

- reconnaître un hyperplan, et plus généralement, reconnaître un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations linéaires;
- trouver la dimension et une base d'un sous-espace vectoriel si l'on en connaît un système d'équations;
- trouver un système d'équations d'un sous-espace vectoriel si l'on en connaît une base.