

CALCUL MATRICIEL

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et p, q, n désignent des entiers naturels non nuls.

I. Matrices

I.1. Définitions

Déf 1:

Une matrice à p lignes et q colonnes (ou de type (p, q)), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application

$$A : \begin{cases} \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto a_{ij} \end{cases} \quad \text{notée :}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

On notera :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées de type (n, n) , ou d'ordre n , se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déf 2:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, on appelle :

- $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A le vecteur $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}) \in \mathbb{K}^p$
- $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A le vecteur $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}) \in \mathbb{K}^q$.

Déf 3:

- Une matrice de type $(1, q)$ est appelée une matrice ligne.
- Une matrice de type $(p, 1)$ est appelée une matrice colonne.

I.2. Matrice d'un système de vecteurs

Déf 4:

Soit F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , rapporté à une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $(x_1, \dots, x_q)$ des vecteurs de F .

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1; q \rrbracket$, il existe $(a_{ij})_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ tels que $x_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} e'_i$.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice des (x_j) dans la base $\mathcal{B}_F$.

Il s'agit donc de la matrice obtenue en écrivant dans chaque **colonne** les coordonnées dans $\mathcal{B}_F$ des vecteurs de la famille. Cela peut être visualisé ainsi :

$$M_{\mathcal{B}_F}(x_1, \dots, x_q) = \begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_q & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \rightarrow & e'_1 \\ & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \rightarrow & e'_2 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & \rightarrow & e'_p \end{array}$$

I.3. Matrice d'une application linéaire

Déf 5:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q , rapporté à une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , rapporté à une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice dans $\mathcal{B}_F$ du système de vecteurs $(u(e_1), \dots, u(e_q))$.

On la notera $M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u)$ ou $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ ou $M(u; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Ainsi : $M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, où a_{ij} désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ soit :

$$\forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} e'_i.$$

Cette matrice peut être visualisée ainsi :

$$M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u(\mathcal{B}_E)) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_q) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow e'_1 \\ \rightarrow e'_2 \\ \vdots \\ \rightarrow e'_p \end{matrix}$$

Rem: Il est important de se rappeler que la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension $\boxed{q}$ dans un espace vectoriel de dimension $\boxed{p}$ est une matrice de type $\boxed{(p, q)}$.

Prop 1:

L'application $\mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est une bijection de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$u \longmapsto M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

(cette bijection dépend évidemment du choix des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$).

Corollaire 1.1:

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors il existe une et une seule application linéaire $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de a dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^p$ soit égale à A .

a s'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A .



Rem : Quand on parle de la matrice d'une application linéaire, il est indispensable de préciser dans quelles bases.

Dire : « soit A la matrice de u », ou : « soit u l'application linéaire associée à A », sans dire dans quel(s) espace(s) ni dans quelle(s) base(s) on travaille, n'a aucun sens !

I.4. Rang d'une matrice

Déf 6:

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\text{rg } A$.

- Si A est la matrice, dans une base $\mathcal{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ de F , le rang de A est aussi celui, dans F , du système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ (c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \dots, x_q)$).
- Si A est la matrice, dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u .

En effet, en reprenant les notations précédentes, si $A = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u)$, le rang de u est par définition la dimension de $\text{Im } u$, donc celle de $\text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_q))$, et les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ sont précisément les colonnes de la matrice.

Propriétés:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A \leq \min(p, q)$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\text{rg } A = p \iff u \text{ surjective}, \quad \text{rg } A = q \iff u \text{ injective}$$

II. Opérations sur les matrices

II.1. Addition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q , rapporté à une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , rapporté à une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$.

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On peut alors leur associer, de manière unique, deux applications linéaires $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que $A = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(v)$.

On définit alors la matrice $C = A + B$ par : $C = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u + v)$.

Il est facile de vérifier que $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

II.2. Multiplication externe

Avec les mêmes notations que ci-dessus, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\lambda.A$ la matrice : $\lambda.A = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(\lambda u)$.

On a alors : $\lambda.A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$, $(\lambda.A)_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Théorème 1:

Muni des lois précédentes, $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $O_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.
2. Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est formée de la famille des matrices $(E_{k\ell})_{(k,\ell) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;q \rrbracket}$, définies par :

$E_{k\ell}$ est la matrice de type (p, q) dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

Ainsi, le terme d'indice (i, j) de E_{kl} vaut : $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$.

En effet, compte tenu de la définition des lois $+$ et $\cdot$, il est facile de vérifier que toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}.$$

Les coordonnées de A dans cette base sont donc les a_{ij} .

3. On en déduit : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})) = pq$.

Déf 7:

La base $(E_{kl})_{(k,l) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;q \rrbracket}$ est appelée base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

II.3. Multiplication

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p , rapportés respectivement à des bases $\mathcal{B}_G = (e_1'', \dots, e_r'')$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{B}_F = (e_1', \dots, e_p')$.

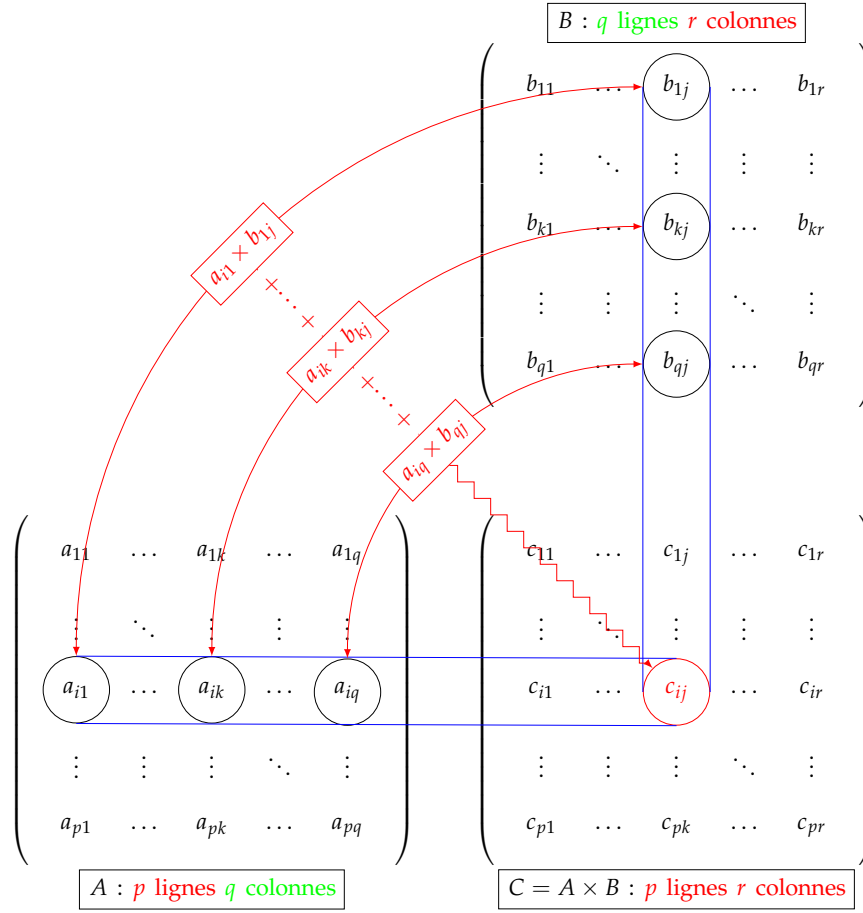
Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $A = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathcal{L}(G, E)$ tq $B = M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathcal{L}(G, F)$).

Un simple calcul montre alors que : $\forall (i, k) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;r \rrbracket, c_{ik} = \sum_{j=1}^q a_{ij} b_{jk}$.

Par définition, la matrice $C = (c_{ik})_{(i,k) \in \llbracket 1;p \rrbracket \times \llbracket 1;r \rrbracket}$ s'appelle le produit de A par B , noté $C = AB$.

Disposition pratique :



Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type (p, q) et B de type (q, r) . Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_F}(u \circ v) = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u) \times M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathcal{B}_E$.

Propriétés:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$.

Prop 2:

Si $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E'_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq \ell \leq r}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket, \forall (k, \ell) \in \llbracket 1; q \rrbracket \times \llbracket 1; r \rrbracket : E_{ij}E'_{k\ell} = \delta_{jk}E''_{i\ell}$$

où $(E''_{i\ell})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq \ell \leq r}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

II.4. Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left\{ \begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ rapporté à une base } \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ rapporté à une base } \mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p) \\ u \in \mathcal{L}(E, F) \\ \text{et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u). \end{array} \right.$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^q x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^p y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_E$: $X = (x_1 \dots x_q)^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{B}_F$: $Y = (y_1 \dots y_p)^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $y_i = \sum_{j=1}^q a_{ij} x_j$ (expression analytique de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX}$.

Rem : Si A est la matrice d'une application linéaire, on peut dire pour simplifier que

- on lit en colonne les coordonnées des images des vecteurs de base ;
- et on lit en ligne les coordonnées de l'image d'un vecteur (expression analytique).

Rem : *Cas d'une forme linéaire :*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q , rapporté à une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E . Sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\{1\}$ de $\mathbb{K}$ est une matrice ligne, de type $(1, q)$: $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_q)$, avec $a_i = \varphi(e_i)$.

Si $x = \sum_{j=1}^q x_j e_j \in E$, on a alors : $\varphi(x) = \sum_{j=1}^q a_j x_j$ (expression analytique de φ).

II.5. Image et noyau d'une matrice

Déf 8:

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le noyau de A , noté $\text{Ker } A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$

- l'image de A , notée $\text{Im } A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\text{Im } A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})\}.$$

Il est facile de vérifier que $\text{Ker } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et que $\text{Im } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Reprenons toutes les notations précédentes : A est la matrice dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$, x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ est X , et y est un vecteur de F dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}_F$ est Y .

Alors :

$$X \in \text{Ker } A \iff x \in \text{Ker } u \quad \text{et} \quad Y \in \text{Im } A \iff y \in \text{Im } u.$$

Le théorème du rang appliqué à u donne alors : $\dim E = \text{rg } u + \dim \text{Ker } u$ donc :

$$\boxed{\text{pour } A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad q = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A.}$$

II.6. Matrices par blocs

Déf 9:

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle bloc de A toute matrice $(a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, où I et J sont respectivement des parties de $\llbracket 1; p \rrbracket$ et $\llbracket 1; q \rrbracket$ formées d'entiers consécutifs.

(N.B : si on ne suppose plus ces entiers consécutifs, on obtient ce qui est appelé une matrice extraite).

Prop 3:

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, décomposées en blocs avec le même découpage :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m} \\ \hline \xleftrightarrow{q_1} & & \xleftrightarrow{q_j} & & \xleftrightarrow{q_m} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \vdots \\ \updownarrow p_i \\ \vdots \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \quad p \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1j} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i1} & \dots & B_{ij} & \dots & B_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{\ell 1} & \dots & B_{\ell j} & \dots & B_{\ell m} \\ \hline \xleftrightarrow{q_1} & & \xleftrightarrow{q_j} & & \xleftrightarrow{q_m} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \vdots \\ \updownarrow p_i \\ \vdots \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \quad p$$

Alors, si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda A + B$ s'écrit, par blocs :

$$\lambda A + B = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} + B_{11} & \dots & \lambda A_{1j} + B_{1j} & \dots & \lambda A_{1m} + B_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i1} + B_{i1} & \dots & \lambda A_{ij} + B_{ij} & \dots & \lambda A_{im} + B_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{\ell 1} + B_{\ell 1} & \dots & \lambda A_{\ell j} + B_{\ell j} & \dots & \lambda A_{\ell m} + B_{\ell m} \\ \hline \xleftrightarrow{q_1} & & \xleftrightarrow{q_j} & & \xleftrightarrow{q_m} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \vdots \\ \updownarrow p_i \\ \vdots \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \quad p$$

Théorème 2: produit par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, décomposées en blocs compatibles comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m} \\ \hline \xleftrightarrow{q_1} & & \xleftrightarrow{q_j} & & \xleftrightarrow{q_m} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \vdots \\ \updownarrow p_i \\ \vdots \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \quad p \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{j1} & \dots & B_{jk} & \dots & B_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mk} & \dots & B_{mn} \\ \hline \xleftrightarrow{r_1} & & \xleftrightarrow{r_k} & & \xleftrightarrow{r_n} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow q_1 \\ \vdots \\ \updownarrow q_j \\ \vdots \\ \updownarrow q_m \end{matrix} \quad q$$

et soit $C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, décomposée en blocs :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1k} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & \dots & C_{ik} & \dots & C_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell 1} & \dots & C_{\ell k} & \dots & C_{\ell n} \\ \hline \xleftrightarrow{r_1} & & \xleftrightarrow{r_k} & & \xleftrightarrow{r_n} \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \vdots \\ \updownarrow p_i \\ \vdots \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \quad p$$

Alors : $\forall (i, k) \in \llbracket 1; \ell \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, on a : $C_{ik} = \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{jk}$.

Cas particulier : écriture par blocs du produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$, chaque L_i étant une matrice ligne de q

éléments, et soit $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $B = [C_1 \ \dots \ C_j \ \dots \ C_r]$, chaque C_j étant une matrice colonne à q éléments.

Alors la matrice $C = AB$ est la matrice de type (p, r) dont le terme d'indice (i, j) vaut $c_{ij} = L_i C_j$.

Illustration :

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix} \quad B = [C_1 \ \dots \ C_j \ \dots \ C_r]$$

$$\left(\begin{array}{cccc} & & \vdots & \\ \dots & \dots & L_i C_j & \dots \end{array} \right) = A \times B$$

II.7. Transposition**Déf 10:**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket, a'_{ji} = a_{ij}.$$

Avant l'adoption regrettable de cette notation anglo-saxonne, la transposée de A était notée : ${}^t A$; cette notation est celle qui apparaît dans la plupart des anciens énoncés de concours.

Écriture par blocs de la transposée :

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrite par blocs de lignes sous la forme $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$.

Alors $A^\top$ est la matrice écrite par blocs de colonnes : $A^\top = \begin{bmatrix} L_1^\top & \dots & L_i^\top & \dots & L_p^\top \end{bmatrix}$.

Prop 4:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (ou : ${}^t({}^t A) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ (ou : ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (ou : ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (ou : ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$).

Prop 5:

L'application : $A \mapsto A^\top$ est un isomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Prop 6:

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrite par blocs : $A =$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m} \end{bmatrix}$$

$\xleftrightarrow{q_1} \quad \xleftrightarrow{q_j} \quad \xleftrightarrow{q_m}$
 $\xleftrightarrow{q}$

$\updownarrow p_1$
 $\updownarrow p_i$
 $\updownarrow p_\ell$
 $\updownarrow p$

Alors la matrice transposée de A s'écrit, par blocs :

$$A^\top = \begin{bmatrix} A_{11}^\top & \dots & A_{i1}^\top & \dots & A_{\ell 1}^\top \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1j}^\top & \dots & A_{ij}^\top & \dots & A_{\ell j}^\top \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1m}^\top & \dots & A_{im}^\top & \dots & A_{\ell m}^\top \end{bmatrix}$$

$\xleftrightarrow{p_1} \quad \xleftrightarrow{p_i} \quad \xleftrightarrow{p_\ell}$
 $\xleftrightarrow{p}$

$\updownarrow q_1$
 $\updownarrow q_j$
 $\updownarrow q_m$
 $\updownarrow q$

III. L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est une loi de composition interne. Les propriétés précédentes sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 3:

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre (non commutative et non intègre dès que $n \geq 2$).

Le terme « $\mathbb{K}$ -algèbre » sert à résumer les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- la multiplication interne des matrices est une loi associative, possédant un élément neutre et distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition ;
- enfin, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$

Rem: Dire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *non intègre* signifie que l'on peut trouver des matrices A, B telles que : $A \neq 0, B \neq 0$ et $AB = 0$.

Cela implique que les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas réguliers en général, c'est-à-dire qu'une égalité de la forme $AB = AC$ n'implique pas toujours $B = C$.

Déf 11:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , rapporté à une base $\mathcal{B}_E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle matrice de u dans $\mathcal{B}_E$ la matrice $M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E}(u)$, notée simplement $M_{\mathcal{B}_E}(u)$ ou $M(u; \mathcal{B}_E)$.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
On a alors, pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathcal{B}_E$ de E : $I_n = M_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)$.
 I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2 . Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ définies par :

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}.$$

Prop 7 et déf 12 :

On notera $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.
 $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n .

En particulier, on a :

Prop 8:

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Le résultat suivant découle directement du théorème 14 du chapitre II :

Prop 9: invariance du rang par multiplication par une matrice inversible

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

Si $p = q$ et $A \in GL_p(\mathbb{K})$, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$, et, si $q = r$ et $B \in GL_q(\mathbb{K})$, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$.

Prop 10:

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Théorème 4:

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est inversible.
- (b) A est inversible à droite.
- (c) A est inversible à gauche.
- (d) $\text{rg } A = n$.

Prop 11:

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r , alors $\text{rg } A \geq r$.

Rem: La réciproque de la proposition précédente est vraie ; elle sera admise.

Corollaire 11.1:

Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A = \text{rg}(A^\top)$.

IV. Matrices carrées remarquables**IV.1. Matrices triangulaires****Déf 13:**

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, [j < i \Rightarrow a_{ij} = 0] \text{ (resp. } [j > i \Rightarrow a_{ij} = 0]).$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) d'ordre n .

Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 5:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = M_{\mathcal{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : A est triangulaire supérieure $\iff \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ est stable par u .

Théorème 6:

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus stable pour la multiplication interne et qui contient son élément neutre, I_n .

Remarques

1. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est évidemment aussi une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphe en tant qu'espace vectoriel à la précédente (par la transposition),
2. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont triangulaires supérieures, alors $C = AB$, triangulaire supérieure, a pour coefficients diagonaux $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

Prop 12:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Prop 13:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ii} = 0$.

On dispose d'une sorte de réciproque de ce résultat :

Théorème 7:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est nilpotent si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls.

Rem : Ce théorème sera démontré plus tard...

Pour les 5/2 : si u est nilpotent d'indice p , il annule le polynôme X^p qui est scindé, donc u est trigonalisable. Et comme sa seule valeur propre est 0, on a le résultat.

IV.2. Matrices diagonales**Déf 14:**

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, j \neq i \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n .

On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Prop 14:

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n .

Prop 15:

Soit $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ii} \neq 0$; et dans ce cas, $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$.

Prop 16:

Soit $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont distincts.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si A est diagonale.

IV.3. Matrices scalaires**Déf 15:**

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Prop 17:

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , d'une homothétie.

Prop 18:

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

IV.4. Matrices symétriques, antisymétriques**Déf 16:**

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (resp. antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$).
Cela équivaut à : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_{ji} = a_{ij}$ (resp. $a_{ji} = -a_{ij}$).
On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n .

Prop 19:

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

IV.5. Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* de E , $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, de sorte que $\mathcal{B}$ est une base de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow^p \\ \updownarrow^{n-p} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow p \\ \leftarrow n-p \end{matrix}$$

(on remarquera que A_1 et A_2 sont des matrices carrées, que $A_1 = M_{\mathcal{B}_1}(p_1 \circ u|_{E_1})$ et que $A_2 = M_{\mathcal{B}_2}(p_2 \circ u|_{E_2})$, où p_1 (resp. p_2) sont les projections sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1)). On a le résultat important suivant, dont la démonstration est immédiate.

Théorème 8:

1. E_1 est stable par $u \iff B_1 = 0$.
2. E_2 est stable par $u \iff B_2 = 0$.

Déf 17:

1. Ainsi, si E_1 est stable par u , A est de la forme : $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.
Une telle matrice est dite triangulaire supérieure par blocs. A_1 est alors la matrice dans $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme induit par u sur E_1 .
2. Si E_1 et E_2 sont stables par u , A est de la forme $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.
Une telle matrice est dite diagonale par blocs. A_1 et A_2 sont alors les matrices dans les bases $\mathcal{B}_i$ des endomorphismes induits u_{E_1} et u_{E_2} .

Prop 20:

L'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Prop 21:

$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix}$ est inversible si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B'_2 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix}$

Corollaire 21.1:

$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est égale à : $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$.

Rem: Les résultats ci-dessus se généralisent sans difficulté aux cas des matrices triangulaires supérieures

par blocs, de la forme : $\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{nn} \end{bmatrix}$, où les A_{ii} sont des matrices carrées,

et aux matrices diagonales par blocs de la forme $\begin{bmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{nn} \end{bmatrix}$.

V. Changements de base

V.1. Matrices de passage

Déf 18:

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .
- On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
- On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.
- Ainsi, la j -ème colonne de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathcal{B}$.

Interprétations :

- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est aussi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(e_i) = e'_i$.
- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est aussi la matrice, dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, de l'application Id_E , c'est-à-dire $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

Prop 22:

1. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E , on a :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$$

2. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

V.2. Formules de changement de bases

Prop 23:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit x un vecteur de E , X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et X' celle de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

On a alors la relation :

$$X = PX' \quad \text{ou encore} \quad M_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(x)$$

Prop 24:

Soient :

- E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q , muni de deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$.
- F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , muni de deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$.
- $P \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$
- $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$

Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'_E}^{\mathcal{B}'_F}(u)$ ($A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$).

On a alors la relation :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Corollaire 24.1: Cas d'un endomorphisme :

Soient : $\left\{ \begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } n, \text{ muni de deux bases } \mathcal{B}_E \text{ et } \mathcal{B}'_E. \\ P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathcal{B}_E \text{ à } \mathcal{B}'_E \\ u \in \mathcal{L}(E), A = M_{\mathcal{B}_E}(u) \text{ et } A' = M_{\mathcal{B}'_E}(u) \text{ (} A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{)}. \end{array} \right.$

On a alors la relation :

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad M_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Théorème 9:

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$A = Q^{-1}J_rP$$

où

$$Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K}), P \in \text{GL}_q(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$$

Rem: D'après la proposition 9 page 10, la réciproque du théorème précédent est vraie : si $A = Q^{-1}J_rP$ avec P et Q inversibles, alors $\text{rg } A = \text{rg } J_r = r$.

Corollaire 9.1:

| Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A = \text{rg } A^T$.

V.3. Matrices semblables

Déf 19:

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A et A' sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension n .

Rem: On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (relation réflexive, symétrique et transitive).

Exercice Montrer que la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VI. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

Déf 20:

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Théorème 10:

1. L'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Rem: Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le résultat ci-dessus donne, en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$

mais on n'a pas $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$ en général.

Ex : avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 11:

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Déf 21:

- ~ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
- ~ Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , le scalaire $\text{tr} (M_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend donc pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.
- ~ Ce scalaire s'appelle la trace de l'endomorphisme u , noté $\text{tr } u$.

Propriétés:

1. L'application $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v)$.

Prop 25:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Si p est un projecteur de E , alors : $\text{tr } p = \text{rg } p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2 , alors : $\text{tr } s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.