DÉTERMINANTS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désigne un entier naturel non nul.

I. Applications p-linéaires

Déf 1:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f\colon E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\,,\ \forall (a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j\colon \left\{\begin{array}{lll} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1,\dots,a_{j-1},x,a_{j+1},\dots,a_p)\end{array}\right.$$

est une application linéaire.

On notera $\mathscr{L}_p(E,F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p,F)$.

Déf 2:

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathscr{L}_p(E)$.

Exemples

1. Dans un espace préhilbertien E, le produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire.
2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel est une application bilinéaire.
3. Si les $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont des formes linéaires sur E, l'application $(x_1,\dots,x_p) \mapsto \varphi_1(x_1)\times\cdots\times\varphi_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E.

Rem : Ne pas confondre *application p-linéaire sur* E et *application linéaire sur* E^p !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a

$$f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p) = f(\lambda.(x_1,\dots,x_p)) = \lambda f(x_1,\dots,x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a

$$f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p) = \lambda^p f(x_1,\dots,x_p)$$

Déf 3:

Une application p-linéaire $f \in \mathscr{L}_p(E,F)$ est dite :

- symétrique si, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ avec $i<j$, pour tout $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$,
$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)$$
(c'est-à-dire que la valeur de f est inchangée lorsque l'on permute deux arguments).
- antisymétrique si, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ avec $i<j$, pour tout $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$,
$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = -f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)$$
(c'est-à-dire que la valeur de f est transformée en son opposée lorsque l'on permute deux arguments)

Prop 1:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1,\dots,x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire 1.1:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\Longrightarrow$ $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des *autres*.

II. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
- $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

Le théorème suivant est admis :

Théorème 1:

1. Étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, il existe une et une seule forme n-linéaire antisymétrique φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.
   Elle s'appelle le déterminant dans la base $\mathscr{B}$ et est notée $\det_{\mathscr{B}}$:
   $$\det_{\mathscr{B}} : \begin{cases} E^n & \longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto \quad \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$
2. Pour toute forme n-linéaire antisymétrique φ sur E, il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$ (ou, en termes savants, l'ensemble des formes n-linéaires antisymétriques est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathscr{B}}$).

Puisque le déterminant est une forme n-linéaire antisymétrique, on en déduit immédiatement les propriétés suivantes (toujours avec les notations précédentes).

Propriétés:

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, on a
   $$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$
   Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \dots, v_n)$, le déterminant change de signe.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$.
3. Si la famille $({}_1, \dots, {}_n)$ est liée, le déterminant est nul.
4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des ***autres***.

Prop 2:

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

1. $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}$ c'est-à-dire
   $$\forall\, (v_1, \dots, v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}'}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$
2. $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$.

Théorème 2:

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :
$$(v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

III. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3:

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le déterminant de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1),\dots,u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$$

Propriétés:

1. $\det \mathrm{Id}_E = 1$
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
   En effet, $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de E, ce qui équivaut à $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right) \neq 0$ en vertu du théorème 2.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
   En effet, $\det(u\circ v) = \det_{\mathscr{B}}\left(u \circ v(\mathscr{B})\right) = \det_{\mathscr{B}}\left(u[v(\mathscr{B})]\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}\left(v(\mathscr{B})\right) = \det u . \det v$.
4. Si $u \in GL(E)$, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.
   Car $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et on applique les deux résultats précédents.
5. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.

IV. Déterminant d'une matrice carrée

Déf 4:

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :
$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n) = \det u .$$
Notation : le déterminant de A se note aussi : $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Propriétés:

Les 5 premières propriétés ci-dessous découlent directement de celles concernant le déterminant d'un endomorphisme.

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.
   En effet, si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\det A = \det u = \det A'$.
   On peut aussi utiliser la relation $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}).\det A.\det P = \det A$.

Prop 3:

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Prop 4:

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^\top) = \det A$.

Rem: La proposition ci-dessus permet, pour calculer un déterminant, d'utiliser les mêmes opérations sur les lignes que sur les colonnes. En particulier :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant change de signe ;
- si l'on multiplie une ligne d'une matrice par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ ;
- on ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'une de ses lignes une combinaison linéaire des *autres* lignes.

V. Calculs de déterminants

Lemme:

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$*, alors* $\det A = \det A'$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \dots, C_n).$$

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. On peut écrire $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$ où les E_i sont les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j-ème variable on obtient :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}\Big(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_{\mathscr{B}_n}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Ainsi : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (*)$, où A_{ij} est la matrice :

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ C_1 & \cdots & C_{j-1} & 1 & C_{j+1} & \cdots & C_n \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right) \leftarrow i^{\text{ème}}\text{ligne}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array}$$

Prop 5:

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le <u>mineur</u> d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le <u>cofacteur</u> d'indice (i,j).

La formule $(*)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\det A \;=\; \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}\,.}$$

Cette formule s'appelle <u>le développement de $\det A$ selon la $j^{ème}$ colonne</u> .

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $i^{ème}$ ligne, que l'on écrit $L_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$ où e_j est le $j^{ème}$ vecteur ligne de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient de la même façon :

$$\det A \;=\; \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$

Cette formule s'appelle <u>le développement de $\det A$ selon la $i^{ème}$ ligne</u> .

Exemple

Calcul d'un déterminant d'ordre 3 et règle de Sarrus .

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

– Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\end{aligned}$$

– et en développant par rapport à la 2ème ligne par exemple on a :

$$\Delta = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\,.$$

– Dans les deux cas on trouve $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, ce qui peut être illustré par le schéma :

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Théorème 4: calcul d'un déterminant par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array}$

Alors : $\det A \;=\; \det A_1 \times \det A_2$

Rem: On en déduit facilement par récurrence que, si A s'écrit par blocs sous la forme $\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & A_{pp} \end{bmatrix}$,

où les A_{ii} sont des matrices *carrées*, alors $\det A = \prod\limits_{i=1}^{p}\det(A_{ii})$.

Exemples à connaître

1. Matrices tridiagonales

Il s'agit de calculer, pour $n \geqslant 2$, le déterminant d'ordre n : $D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

2. Un grand classique

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Plusieurs méthodes sont possibles :

- par récurrence...
- en utilisant la multilinéarité...
- en additionnant les $n-1$ dernières colonnes à la première...
- On calcule le déterminant $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & & \\ & a+X & & c+X \\ b+X & & \ddots & \\ & & & a+X \end{vmatrix}$, en remarquant qu'il s'agit d'un polynôme en X de degré $\leqslant 1$ ...

3. Déterminant de Vandermonde

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Prop 6:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

On en déduit en particulier que :

$$\boxed{V(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0 \iff \text{les } a_i \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange :

Étant donnés $n+1$ scalaires *deux à deux distincts* $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $n+1$ scalaires (non nécessairement distincts) $b_0, b_1, \dots, b_n$, on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Si l'on écrit ce polynôme dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, sous la forme

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j X^j,$$

déterminer P revient à résoudre le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les λ_j) suivant :

$$\forall i \in \llbracket 0\,; n+1 \rrbracket, \ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_i^j = b_i.$$

Or la matrice de ce système n'est autre que la matrice de Vandermonde $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$; puisque cette matrice est inversible, le système possède une et une seule solution, ce qui redémontre l'existence et l'unicité du polynôme P.

Exemple

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2.$$

VI. Orientation d'un espace vectoriel réel

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5:

Dans l'ensemble des bases de E, on définit une relation binaire par :

$$\mathscr{B} \,\Re\, \mathscr{B}' \iff \det\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} > 0\,.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement *deux* classes d'équivalence.

Déf 5:

Orienter l'espace vectoriel E, c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle classe des bases directes, l'autre étant alors appelée classe des bases indirectes. (il n'y a que deux orientations possibles).

VII. Annexe : rappels de Sup sur les suites récurrentes linéaires

Les suites arithmético-géométriques ou les suites récurrentes linéaires peuvent apparaître dans plusieurs types d'exercices (calculs de déterminants, calculs de probabilités...). Il est donc important d'apprendre les méthodes et formules rappelées ci-après.

VII.1. Suites arithmético-géométriques

On considère ici l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec $a,\ b \in \mathbb{K}$.

- Si $a = 1$, la suite est tout simplement arithmétique de raison b et l'on a alors $u_n = u_0 + nb$ pour tout entier n.
- Si $a \neq 1$, la suite constante égale à $\ell = \frac{b}{1-a}$ vérifie bien la relation de récurrence (il suffit de résoudre l'équation $\ell = a\ell + b$). Si l'on pose alors $v_n = u_n - \ell$ pour tout n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n\,,$$

de sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. On aura donc $v_n = a^n v_0$ pour tout n, d'où l'on tire finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \ell = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}\,.$$

Remarques

1. Il ne faut bien sûr pas retenir cette dernière formule par cœur mais seulement la méthode ; les calculs sont alors faciles à refaire.
2. Il faut savoir adapter les résultats dans le cas où la suite n'est définie qu'à partir d'un rang n_0.
   Pour cela, il suffit de se rappeler que les formules deviennent :
   - $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)b$ pour une suite arithmétique de raison b ;
   - $v_n = a^{n-n_0}v_{n_0}$ pour une suite géométrique de raison a.

VII.2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère ici l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui vérifient une relation de la forme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad (L)$$

avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{K},\ a \neq 0$.

On « sait » alors que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
On peut alors chercher des éléments particuliers de $\mathscr{S}$: une suite géométrique $n \mapsto r^n$ avec $r \in \mathbb{K}^*$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = 0 \quad \text{soit} \quad ar^2 + br + c = 0\,.$$

L'équation (E_c) : $ar^2 + br + c = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence.
On étudie alors ses solutions. Il faut distinguer deux cas, selon que le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En notant Δ le discriminant de l'équation caractéristique, on a les résultats suivants.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
  - Si $\Delta \neq 0$, (E_c) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 ; dans ce cas, les suites $n \mapsto r_1^n$ et $n \mapsto r_2^n$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L). L'ensemble des solutions de (L) est donc l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n\ ,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\,.$$

  - Si $\Delta = 0$, (E_c) possède une racine double r ; dans ce cas, les suites $n \mapsto r^n$ et $n \mapsto nr^n$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L). L'ensemble des solutions de (L) est alors l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = (\lambda n + \mu) r^n\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\,.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
  - Si $\Delta \geqslant 0$, on a les mêmes résultats que ci-dessus (mais avec ici λ_1, λ_2, λ et μ réels).
  - Si $\Delta < 0$, l'équation (E_c) admet deux racines complexes non réelles conjuguées $r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$, et alors les suites $n \mapsto r^n \cos n\theta$ et $n \mapsto r^n \sin n\theta$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L). L'ensemble des solutions de (L) est ici l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) r^n\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\,.$$