ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS.

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$.

I. Produit scalaire

I.1. Définitions - Exemples

Déf 1:

Une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune des deux variables, c'est-à-dire telle que :

a) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.

b) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.

Pour vérifier qu'une application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, il faut donc vérifier :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

(linéarité par rapport à la 1ère variable), et :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

(linéarité par rapport à la 2ème variable).

Déf 2:

Une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Rem: Si φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, symétrique et linéaire d'un côté, elle est bilinéaire.

Déf 3:

On appelle produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une forme bilinéaire symétrique φ qui est de plus :

- positive, c'est-à-dire : $\forall x \in E\ ,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$.
- et définie, c'est-à-dire : $\forall x \in E\ ,\ \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

Dire que φ est définie positive peut aussi s'écrire : $\forall x \in E \setminus \{0\}\ ,\ \varphi(x, x) > 0$.

Déf 4:

Si φ est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, le couple (E, φ) s'appelle un espace préhilbertien réel.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y se note en général : $\varphi(x, y) = (x|y)$ ou $\langle x \,|\, y \rangle$ ou $\langle x\,,\, y \rangle$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$: $\quad \langle x \,|\, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.
   Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$; la démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est simple :

   Rem: En notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^\top$, on a aussi : $\boxed{\langle x \,|\, y \rangle = X^\top Y = Y^\top X\,.}$

2. De façon plus générale, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans cette base, on définit un produit scalaire sur E en posant : $\langle x \,|\, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on peut poser :
$$\langle A\,|\,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}\,.$$
Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k$ et $Q=\sum\limits_{k=0}^{p} b_kX^k$: $\quad \langle P\,|\,Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\min(n,p)} a_kb_k\,.$
Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

5. Dans l'ensemble $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a\,;b]$ on peut poser : $\langle f\,|\,g\rangle = \int_a^b fg$.

I.2. Norme associée à un produit scalaire

Déf 5:

Si E est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$, on appelle norme (euclidienne) associée l'application :
$$N : x\in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}\,.$$
(cela a bien un sens car $\langle x\,|\,x\rangle \geqslant 0$).

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x=(x_1,\dots,x_n)$ on a : $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$

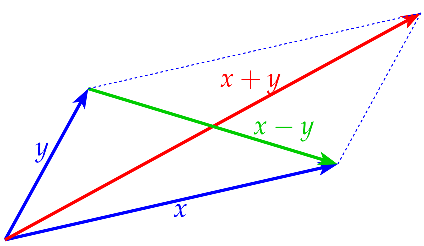
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ on a; $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}\,.$

3. Dans l'ensemble $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a\,;b]$ muni du produit scalaire vu ci-dessus, on aura : $\|f\| = \sqrt{\int\limits_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,.$

De la définition d'un produit scalaire découlent facilement les propriétés suivantes :

Propriétés :

1. $\forall x\in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E\,.$
2. $\forall x\in E\,,\ \forall \lambda\in\mathbb{R}\,,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\,.$
3. Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\|=1$.
Si x est un vecteur non nul, alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire.
4. $\forall (x,y)\in E^2\,,\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x\,|\,y\rangle + \|y\|^2\,.$
5. *Identité de polarisation :* $\forall (x,y)\in E^2\,,\ \langle x\,|\,y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\,.$
6. $\forall (x,y)\in E^2\,,\ \langle x+y\,|\,x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2\,.$
7. *Identité du parallélogramme :*
$$\forall (x,y)\in E^2\,,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\,.$$



Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\| . \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire 1.1: *Inégalité triangulaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ *positif* tel que $x=\lambda y$ ou $y=\lambda x$).

Corollaire 1.2:

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\big|\, \|x\|-\|y\| \,\big| \leqslant \|x+y\| \ .$$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x=(x_1, \ldots, x_n)$ et $y=(y_1, \ldots, y_n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} .$$
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left|\operatorname{tr}(A^{\top} B\right| \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\top} A)} \sqrt{\operatorname{tr}(B^{\top} B)} .$$
3. Dans l'espace vectoriel $E=\mathscr{C}([a ; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a ; b]$ muni du produit scalaire usuel, si $f, g \in E$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left|\int_a^b f(t) g(t) \,\mathrm{d} t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \,\mathrm{d} t} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 \,\mathrm{d} t} .$$

II. Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E,\langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel.

II.1. Orthogonal d'une partie

Déf 6:

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x \mid y\rangle=0$.

Rem: La relation $\langle x \mid y\rangle=0$ est équivalente à $\langle y \mid x\rangle=0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Déf 7:

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E.
Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à tout vecteur de A.
L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$. Ainsi :

$$A^{\perp}=\{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x \mid a\rangle=0\}$$

Théorème 2:

Si x est un vecteur non nul de E, alors $\{x\}^{\perp}$ est un hyperplan de E.
Un supplémentaire en est la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$.

Prop 1:

Si A est une partie non vide de E, alors $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Prop 2:

Propriétés de l'orthogonal :

1. $E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$;
2. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$;
3. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A^{\perp} = \text{Vect}(A)^{\perp}$;
il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i\in I}$ est une base de F, un vecteur x appartient à $F^{\perp}$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x \,|\, f_i \rangle = 0$;
4. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$;
5. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E : $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Déf 8:

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.
On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x,y) \in F \times G, \quad \langle x \,|\, y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.
Cela équivaut à : $F \subset G^{\perp}$ et/ou $G \subset F^{\perp}$.

Prop 3:

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. On suppose que l'on dispose d'une base $(f_i)_{i\in I}$ de F et d'une base $(g_j)_{j\in J}$ de G.
Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(i,j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$.
Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^{\perp} = G$.
Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, mais seulement $F^{\perp} \supset H$..
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_2 + e_3)$. On n'a pas $F \perp G$ mais par contre $F^{\perp} \perp G^{\perp}$.
Les deux plans F et G sont alors dits *perpendiculaires*.

Rem : Les exemples précédents montrent qu'il faut faire attention à la terminologie employée.
Ainsi, dire que F et G sont orthogonaux ne veut PAS dire que l'un est l'orthogonal de l'autre !

Prop 4:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, alors $F \cap G = \{0\}$.

II.2. Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales)

Déf 9:

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si : $\forall (i,j) \in I^2\,,\ i \neq j \Longrightarrow \langle x_i \,|\, x_j \rangle = 0\,.$

Elle est dite orthonormée (ou orthonormale) si, *en plus*, $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si

$$\forall (i,j) \in I^2\,, \langle x_i \,|\, x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Rem: Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs *non nuls*, alors la famille des vecteurs $\left(\dfrac{x_i}{\|x_i\|}\right)_{i\in I}$ est orthonormée.

Prop 5: Relation de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel, alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2\,.$$

Cas particulier :

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle . \,|\, . \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\,.$$

Théorème 4:

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs *non nuls*, alors cette famille est libre.

Corollaire 4.1:

Toute famille orthonormée est libre.

Exemple

Dans $E = \mathscr{C}([0\,;\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle f \,|\, g \rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, la famille de fonctions $f_n : t \mapsto \cos nt$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est orthonormée.

II.3. Orthogonalité en dimension finie

Déf 10:

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Rem: En vertu du corollaire 4.1, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\,,\ \langle x_i \,|\, x_j \rangle = \delta_{i,j}\,.$
- et que $n = \dim E\,.$

Théorème 5:

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, défini par :
$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n)\ ,\ \langle x \,|\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
la base canonique est une base orthonormée.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par :
$$\text{si } A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ et } B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\ \langle A \,|\, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$$
la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée.

II.4. Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Prop 6:

Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base *orthonormée* de E.

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $\boxed{x_i = \langle e_i \,|\, x\rangle\ .}$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in E\ ,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x\rangle\, e_i\,.}$

Soit E un espace euclidien, muni d'une base *orthonormée* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soient x et y deux vecteurs de E :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

On notera aussi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes formées des coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs x et y.

Par bilinéarité du produit scalaire : $\langle x \,|\, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \underbrace{\langle e_i \,|\, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}}$

donc :
$$\boxed{\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y = Y^\top X} \quad \text{et} \quad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\quad ,\quad \|x\|^2 = X^\top X\,.}$$

III. Projections orthogonales

III.1. Supplémentaire orthogonal

Théorème 6:

Soit F un sous-espace vectoriel *de dimension finie* d'un espace préhilbertien E. Alors :

1. $E = F \oplus F^\perp$.
2. $(F^\perp)^\perp = F$.

Déf 11:

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, on a : $E = F \oplus F^{\perp}$.
$F^{\perp}$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 6.1:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien de dimension finie E on a :

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

Théorème 7: Théorème de la base orthonormée incomplète

Si E est un espace préhilbertien de dimension finie, toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée.

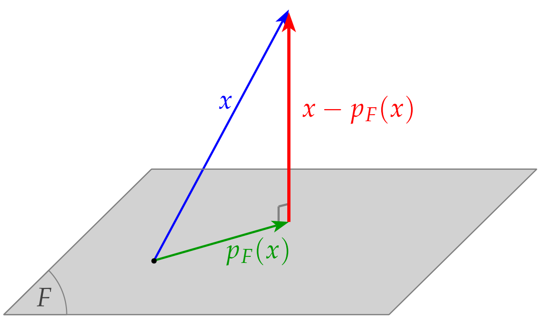
III.2. Projection orthogonale

Déf 12:

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle :

- projection orthogonale sur F, notée p_F, la projection sur F de direction $F^{\perp}$.
- symétrie orthogonale par rapport à F, notée s_F, la symétrie par rapport à F et de direction $F^{\perp}$.
  Rappel : $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

- On a, pour tout $x \in E$: $p_F(x) \perp x - p_F(x)$.
- Par définition d'une projection, $y = p_F(x)$ est l'unique vecteur de E vérifiant $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$.



Directement d'après la démonstration du théorème 6, on obtient :

Théorème 8:

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une *base orthonormée* d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E, on a, pour tout $x \in E$:

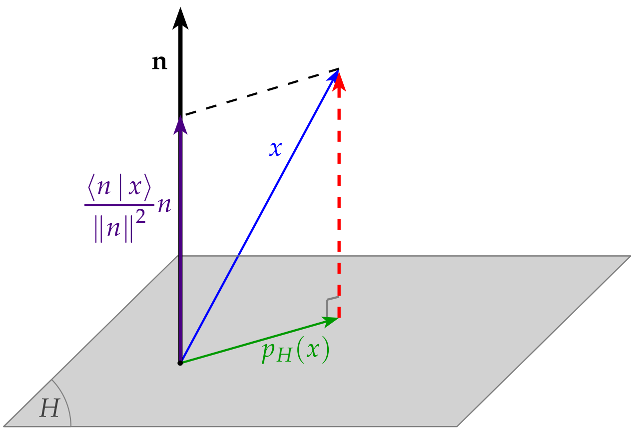
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \, e_i .$$

Rem: Si l'on connaît seulement une base *orthogonale* $(e_1, \ldots, e_n)$ de F, on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle e_i \,|\, x \rangle}{\|e_i\|^2} \, e_i .$$

Rem: Dans le cas particulier où H est un hyperplan, et si n est un vecteur orthogonal à H, la formule précédente donne le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathbb{K}.n$: $p_{H^\perp}(x) = \dfrac{\langle n \,|\, x\rangle}{\|n\|^2}\, n$ d'où :

$$p_H(x) = x - \frac{\langle n \,|\, x\rangle}{\|n\|^2}\, n\,.$$



Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x+y+z=0$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \end{cases}.$$

III.3. Distance à un sous-espace vectoriel

Déf 13:

Soit E un espace préhilbertien réel.
On appelle distance entre deux vecteurs x et y de E le réel
$$d(x,y) = \|x-y\|\,.$$

Déf 14:

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E.
si x est un vecteur de E, on appelle distance de x à A le réel :
$$d(x,A) = \inf\{d(x,a)\ ,\ a\in A\} = \inf\{\|x-a\|\ ,\ a\in A\}$$
(cette borne inférieure existe bien car c'est celle d'une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$).

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, on a le résultat suivant :

Théorème 9:

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E.
Pour tout $x\in E$ il existe un et un seul vecteur $y\in F$ tel que
$$d(x,F) = d(x,y)\,.$$
Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F.

Remarques

1. En reprenant les mêmes notations, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F, on sait que $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \, e_i$.
   On a donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2$ puis, d'après la relation de Pythagore (les vecteurs $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ étant orthogonaux),
   $$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 ,$$
   ce qui donne la formule :
   $$\boxed{d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 .}$$
2. Dans le cas particulier où F est un hyperplan H, et si n est un vecteur orthogonal à H, on a vu que le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathbb{K}.n$ est : $p_{H^\perp}(x) = \dfrac{\langle n \,|\, x \rangle}{\|n\|^2} n$ d'où :
   $$d(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_{H^\perp}(x)\| = \frac{|\langle n \,|\, x \rangle|}{\|n\|} .$$
   (voir figure page 8).

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit le vecteur $u = (1,1,1,3)$ et P le plan dont un système d'équations est : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.
   Déterminer la distance de u à P.
2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\displaystyle\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 \, \mathrm{d}x$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

III.4. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille *libre* de vecteurs de E, où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $[\![1\,;n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille *orthonormée* $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k \,|\, a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Remarques

1. Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i \,|\, a_k \rangle \, e_i$ puis $e_k = \dfrac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k, sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues...)
2. Si l'on veut seulement construire une famille *orthogonale* à partir des a_k, il suffit de ne pas normer les b_k à la fin du calcul, donc d'utiliser la formule
   $$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i \,|\, a_k \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$
3. Si E est un espace euclidien, $\mathscr{B} = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et si $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est la base orthonormée de E obtenue par le procédé de Schmidt, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux positifs. En effet :

– pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ on a $\mathrm{Vect}(a_1,\ldots,a_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ donc la matrice est triangulaire supérieure ;
– si l'on considère la matrice inverse, c'est-à-dire la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$, le i-ème coefficient diagonal est la i-ème coordonnée de a_i sur e_i, donc est égal à $\langle a_i \,|\, e_i \rangle$ puisque la base (e_i) est orthonormée, et ce coefficient est positif par construction. Les coefficients diagonaux de la matrice inverse sont donc aussi positifs.

Exercice On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}_3[X]\ ,\ \langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

III.5. Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien

Théorème 11:

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E ;
Alors il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall\, x \in E\ ,\ \varphi(x) = \langle a \,|\, x \rangle\ .$$

Rem: Lorsque φ est non nulle, son noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan H. D'après le théorème précédent, il existe donc $a \in E$ tel que

$$H = \{x \in E \text{ tq } \langle a \,|\, x \rangle = 0\} = \{a\}^{\perp}\ .$$

$\mathbb{R}.a$ est la droite orthogonale à H ; ses vecteurs sont les vecteurs <u>normaux</u> à H.