LIMITES - CONTINUITÉ

I. Limites

I.1. Définitions et premières propriétés

E et F désignent ici deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis de normes notées respectivement $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

Déf 1:

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
On dit que f admet une <u>limite en a</u> (selon A) si et seulement si il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon.$$

(*on peut aussi donner cette définition avec des inégalités larges*).

Rem: La définition ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ x \in \mathcal{B}(a,\alpha) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{B}(\ell,\varepsilon)$$

ou encore, puisque toute boule ouverte de centre x est un voisinage de x et que tout voisinage de x contient une boule ouverte de centre x :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists U \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } f(U \cap A) \subset V.$$

L'avantage de cette écriture est qu'elle peut s'adapter aux cas $a = +\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{N}$ (cas des suites), $a = \pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$ lorsque $F = \mathbb{R}$.

Théorème 1:

Si f admet une limite en a selon A, le vecteur ℓ de la définition est unique.

Notation : Dans le cas où *la* limite de f en a selon A existe, on la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f.$$

Cas particuliers :

1. <u>Si $a \in A$</u> : si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce ne peut être que $f(a)$ (en effet, compte tenu de la définition, on doit avoir $\|f(a) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$).

2. <u>Si $a \in \overline{A} \setminus A$</u> (c'est le cas le plus courant), la limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

   Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.

3. <u>Si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$:</u>
   Par définition, un voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;M[$).
   La définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ s'écrit alors, par exemple :

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in A,\ x > M \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon.$$

4. <u>Si $F = \mathbb{R}$ et $\ell = \pm\infty$</u>, la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ (par exemple) s'écrit :

   $$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Longrightarrow f(x) < M$$

5. <u>Si $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{N}$</u> on retrouve la définition de la limite d'une suite.

Rem: La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture de la définition de la limite à l'aide des voisinages montre que l'existence de la limite (ainsi que sa valeur éventuelle) sont inchangées si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Prop 1:

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Si f admet une limite en a, alors f est bornée sur A au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tels que } \forall\, x \in U \cap A,\ \|f(x)\|_F \leqslant M.$$

Rem: Dans le cas particulier des suites, on retrouve ici le résultat : toute suite convergente est bornée.

Théorème 2: caractérisation séquentielle de la limite

Soit A une partie non vide de E, et f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a selon A.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

I.2. Opérations sur les limites

Théorème 3:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, et f et g deux applications de A dans F. Soit enfin $a \in \overline{A}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ existe et est égale à $\ell + \ell'$.

Théorème 4:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie non vide de E, $a \in \overline{A}$, f une application de A dans F et φ une application de A dans $\mathbb{K}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in E$ et $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$ existent, alors $\lim\limits_{x\to a}(\varphi.f)(x)$ existe et est égale à $\lambda.\ell$.

Théorème 5: Composition des limites

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $B \subset F$, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$.
On suppose $f(A) \subset B$, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Alors, $b \in \overline{B}$, et si $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \in G$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

Exercices

1. L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array}\right.$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

2. Même question pour l'application $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$.

Dans le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'autres opérations sont possibles, le produit et le quotient. Le théorème ci-dessous a été vu l'an dernier pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, et s'étend sans difficultés aux fonctions définies sur un espace vectoriel normé.

Théorème 6:

Soient f, g définies sur une partie A de E, *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, et soit $a \in \overline{A}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors :

1. La fonction produit fg admet en a la limite $\ell\ell'$.
2. Si $\ell' \neq 0$, il existe un voisinage V de a sur lequel g ne s'annule pas, et $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

I.3. Résultats spécifiques aux fonctions à valeurs réelles

Les résultats suivants ont été vus en Sup, mais seulement dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$; ils utilisent la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On considère ici des applications définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a désigne un point adhérent à A. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas où $E = \mathbb{R}$ et où $a = \pm\infty$.

Théorème 7: d'encadrement

Soient f, g, h définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Théorème 8: prolongement des inégalités

Soient f, g définies sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.
On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Dans le cas d'une limite infinie, on a le résultat suivant :

Prop 2:

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) \leqslant g(x)$.
On suppose également que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = +\infty$.

Il y a une « réciproque » partielle **importante** au théorème de prolongement des inégalités :

Prop 3:

Soient f, g définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{A}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.

Si $\ell < \ell'$, il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap A,\ f(x) < g(x)$.

Enfin, pour une fonction numérique de la variable réelle, il n'est pas inutile de rappeler le théorème suivant, que l'on utilisera souvent par la suite :

Théorème 9: de la limite monotone

Soit $f :]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On suppose f *croissante* sur $]a\,;b[$.

1. **a)** Si f est majorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b^-, et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f$.

   b) Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{]a;b[} f = +\infty$.

2. **a)** Si f est minorée, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a^+, et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f$.

   b) Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{]a;b[} f = -\infty$.

3. En tout point $x_0 \in \,]a\,;b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche, et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Remarques

1. On obtient des résultats similaires si on suppose f *décroissante* sur $]a\,;b[$.

   Par exemple : si f est décroissante sur $]a\,;b[$, elle admet une limite à gauche en b si et seulement si elle est minorée et une limite à droite en a si et seulement si elle est majorée.

2. Ce théorème permet de calculer les bornes sup et inf d'une fonction simplement à partir de son tableau de variations.

II. Continuité

II.1. Continuité en un point

Déf 2:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

Soit a *appartenant à* A. On dit que f est continue en a si sa limite en a existe (et elle vaut alors nécessairement $f(a)$).

Cela équivaut à : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$.

Rem: Dire que f est continue en a peut s'écrire :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in A,\ \|x-a\|_E < \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall\, V \in \mathscr{V}(f(a)),\ \exists\, U \in \mathscr{V}(a) \text{ tel que } f(U\cap A) \subset V.$$

Rem: La notion de voisinage étant une notion topologique, l'écriture précédente montre que la notion de continuité est inchangée si on remplace l'une des normes (dans E ou F) par une norme équivalente.

Mais il se peut qu'une fonction soit continue au sens de certaines normes mais pas au sens d'autres normes (voir exemples sur la feuille d'exercices).

Déf 3:

Si f est définie sur $A\setminus\{a\}$ avec $a \in \overline{A}$ et si $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe, on peut définir une application

$$\widehat{f} : \left\{\begin{array}{ccc} A\cup\{a\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}\right. .$$

$\widehat{f}$ est évidemment continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a

Théorème 10: caractérisation séquentielle de la continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, et $a \in A$. Alors

f est continue en a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.

Comme conséquences des théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement :

Théorème 11:

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans F, et $a \in A$.

   Si f et g sont continues en a, alors $f+g$ est continue en a.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F, φ une application de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.

   Si f et φ sont continues en a, alors l'application $\varphi.f$ est continue en a.
3. Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, f et g deux applications de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in A$.

   Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
4. Soient E,F,G trois espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F.
   Soit $f \in \mathcal{A}(A,F)$ telle que $f(A) \subset B$, et $g \in \mathcal{A}(B,G)$

   Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

II.2. Continuité globale

Déf 4:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dira que f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$.

L'ensemble des applications continues sur A et à valeurs dans F se note $\mathscr{C}(A,F)$.

En utilisant les théorèmes concernant les opérations sur les limites, on obtient directement le résultat suivant :

Théorème 12:

$\mathscr{C}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(A,F)$.

Un cas particulier important d'applications continues sur une partie est le suivant :

Déf 5:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une application de A dans F.

On dit que f est lipschitzienne sur A s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2 \ , \ \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant k\,\|x-y\|_E \ .$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne (k n'est pas unique !)

Remarques

1. Si l'on remplace l'une des normes par une norme équivalente, le fait que f est lipschitzienne est inchangé, mais le rapport k est modifié.
2. Lorsque $E=\mathbb{R}$ et f de classe $\mathscr{C}^1$, pour que f soit k-lipschitzienne sur A il faut et il suffit que f' soit bornée sur A, en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

Prop 4:

Avec les mêmes notations, si f est lipschitzienne sur A, alors f est continue sur A.

Rem: Il existe cependant des applications continues et non lipschitziennes, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 4.1: *cas particulier important*

L'application « norme » $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\|_E \end{array}$ est continue.

Théorème 13:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application *continue* de E dans F. Alors :

a) l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

b) l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

Exemples

1. Soit : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues. Alors (par exemple) :
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\} \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$
3. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient
$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\} \text{ le graphe de } f$$
$$\mathscr{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant f(x)\right\} \text{ l'épigraphe de } f$$
$$\mathscr{E}' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > f(x)\right\}$$
Alors Γ et $\mathscr{E}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}'$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
4. Dans un espace vectoriel normé E, toute boule fermée $\mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé.
5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.3. Cas de la dimension finie

II.3.1. Formes linéaires coordonnées

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On rappelle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on peut considérer la *forme linéaire coordonnée* e_i^* définie par :
$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ avec } x_i \in \mathbb{K}, \text{ alors } e_i^*(x) = x_i.$$

Prop 5:

Les applications $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une conséquence importante en est le théorème suivant :

Théorème 14:

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B}$.
Si $f : A \subset E \to \mathbb{K}$ est une fonction polynomiale en les coordonnées, alors f est continue.

Exemple

L'application $\det : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array} \right.$ est continue.

En effet, on a démontré dans un chapitre précédent que le déterminant d'une matrice $M = (m_{ij})$ est une somme de termes de la forme $m_{i_1,1} m_{i_2,2} \cdots m_{i_n,n}$, c'est donc une fonction polynomiale des $m_{i,j}$, qui sont les coordonnées de M dans la base canonique $(E_{i,j})$.

II.3.2. Cas d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On suppose ici que f est une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in A$, $f(x)$ peut s'écrire, dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

Les f_i, définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, s'appellent les <u>applications coordonnées</u> de f. On remarque que l'on a : $f_i = e_i^* \circ f$.

<u>Théorème 15:</u>

Avec les mêmes notations, si $a \in \overline{A}$, pour que f admette une limite $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in F$ quand x tend vers a , il faut et il suffit que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i admette une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a, et on a alors : $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$.

Compte tenu de la définition de la continuité en un point à l'aide de la limite, il en résulte immédiatement :

<u>Théorème 16:</u>

Avec les mêmes notations :

f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ f_i est continue en a.

II.3.3. Cas d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie

On considère ici des applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Pour simplifier les notations, on supposera $E = \mathbb{K}^n$ (une base de E étant choisie, cela revient à identifier tout vecteur de E au n-uplet formé par ses coordonnées). Puisque toutes les normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes, on munira E de la norme $\| \ \|_\infty$.
Soit alors $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on notera $\omega_{a,i}$ l'application :

$$\omega_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

Alors les $\omega_{a,i}$ sont continues car :

$$\|\omega_{a,i}(x) - \omega_{a,i}(y)\|_\infty = \|(0, \dots, 0, x - y, 0, \dots, 0)\|_\infty = |x - y|$$

ce qui signifie que $\omega_{a,i}$ est lipschitzienne de rapport 1.
Si maintenant f est une application définie sur une partie A de E, à valeurs dans F, et si $a \in A$, on considérera, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'application $f_{a,i} = f \circ \omega_{a,i}$, c'est-à-dire

$$f_{a,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} A_i \subset \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{array} \right.$$

$f_{a,i}$ s'appelle la <u>i-ème application partielle de f en a</u>.
Les $\omega_{a,i}$ étant continues, on a immédiatement :

<u>Théorème 17:</u>

Si f est continue en a, alors toutes ses applications partielles $f_{a,i}$ sont continues en a_i.

⚡ *La réciproque de cette propriété est FAUSSE !*

Il se peut que toutes les applications partielles de f soient continues en un point, et que f ne soit pas continue en ce point !

Exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

En effet, les applications partielles en $(0,0)$ sont égales à l'application nulle, donc sont continues, mais f n'a même pas de limite en $(0,0)$!

II.3.4. Théorème des bornes atteintes

Le théorème suivant est admis :

Théorème 18: fondamental

Soit K une partie *fermée* et *bornée* d'un espace vectoriel normé *de dimension finie*, et f une application *continue* sur K, *à valeurs réelles*.
Alors « f est bornée sur K et atteint ses bornes », c'est-à-dire :

$$\exists\, m,\ M \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\, x \in K,\ m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \exists\, x_0,\ x_1 \in \mathbb{K} \text{ tels que } m = f(x_0) \text{ et } M = f(x_1).$$

III. Quelques rappels du cours de Sup

On vient ici d'étudier la continuité d'applications définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.
Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

Théorème 19: des valeurs intermédiaires

Soit I un *intervalle* de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application *continue*.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Conséquences :

1. Le théorème peut aussi s'énoncer ainsi : si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
2. En particulier, si f est continue sur $[a\,;b]$ à valeurs réelles, et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c) = 0$.
3. Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors f a un signe constant sur I.
4. L'image d'un *segment* par une application continue à valeurs réelles est un segment.

Exercices d'application

1. Soit f continue sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe c appartenant à $[a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit A une partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   Soit a et b deux points de A et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
   Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Théorème 20: de bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est *continue* et *strictement monotone* sur I, alors f permet de définir une bijection (que l'on notera encore f) de I sur $J = f(I)$, et la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.

Il existe une sorte de réciproque au théorème précédent :

Théorème 21:

Si f est une bijection continue d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, alors f est strictement monotone.

IV. Applications linéaires continues

Théorème 22: Caractérisations d'une application linéaire continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue ;

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$;

(c) u est lipschitzienne.

Remarques

1. Une application linéaire n'est pas nécessairement continue !
   Exemple : on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par :
   $$\text{si } P = \sum a_i X^i,\ \|P\|_\infty = \max |a_i|$$
   Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Alors, pour $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ $(n \in \mathbb{N})$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$, et $\varphi(P_n) = n + 1$. Il ne peut donc pas exister de constante k telle que, pour tout P on ait $|\varphi(P)| \leqslant k \|P\|_\infty$ donc φ n'est pas continue.

2. Une application linéaire peut être continue pour une norme, mais pas pour une autre ! (si elles ne sont pas équivalentes).
   Exemple : si l'on reprend l'exemple précédent, lorsqu'on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \|_1$ définie par $\left\|\sum a_i X^i\right\|_1 = \sum |a_i|$, alors φ est continue ! En effet, $|\varphi(P) = |P(1)| = |\sum a_i| \leqslant \sum |a_i| = \|P\|_1$, donc φ est continue en vertu de la propriété (b).

Cependant, on a le résultat (important) suivant :

Théorème 23:

Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.

Exemples

1. L'application « trace » est une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'application « transposée » est une application linéaire continue de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. L'application $M \mapsto AM$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

V. Applications multilinéaires continues

Théorème 24:

Soient $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ p espaces vectoriels normés, muni chacun d'une norme notée $\| \|_i$.

On munit l'espace vectoriel produit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ de la norme $\| \|_\infty$ définie par
$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \|x_i\|_i$$
Soit F un espace vectoriel normé, et $u : E \longrightarrow F$ une application p-linéaire. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est continue.

(b) Il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, on ait
$$\|u(x_1, \ldots, x_p)\| \leqslant k \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p.$$

Exemple

Si E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x|y \rangle \end{array} \right.$, alors φ est une forme bilinéaire continue.

Cela découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème précédent.

Théorème 25:

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors toute application p-linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ est continue.

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ qui à toute famille de n vecteurs de E associe son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est continue.
2. Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, l'application qui à deux matrices A et B associe leur produit AB est bilinéaire continue.

   Cela permet alors de dire, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, que si deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ convergent vers deux matrices A et B respectivement, alors la suite $\left(A_nB_n\right)$ converge vers AB.

   Cela permet aussi, par exemple, de démontrer que l'application $A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, comme composée de l'application « produit » et de l'application linéaire continue $A \mapsto (A, A)$.