SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Toutes les fonctions considérées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites de fonctions

I.1. Convergence simple

Déf 1:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que cette suite converge simplement sur I (en abrégé : CVS) si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe (dans } \mathbb{K}).$$

Dans ce cas, on peut définir une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

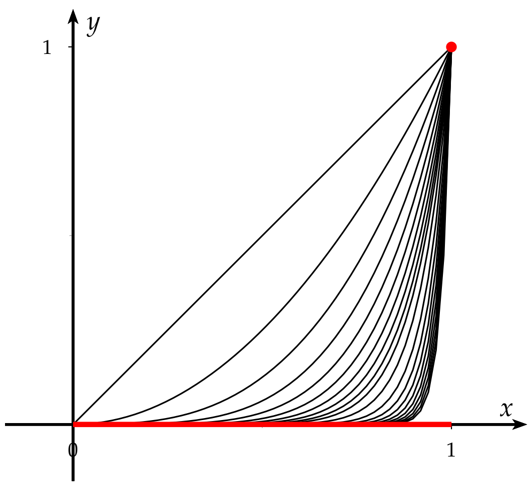
$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

f s'appelle la limite simple de la suite (f_n).

Exemples :

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{cases}$

   Pour déterminer la limite simple de cette suite de fonctions, il suffit de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n$ selon les valeurs de x.
   On obtient immédiatement que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$



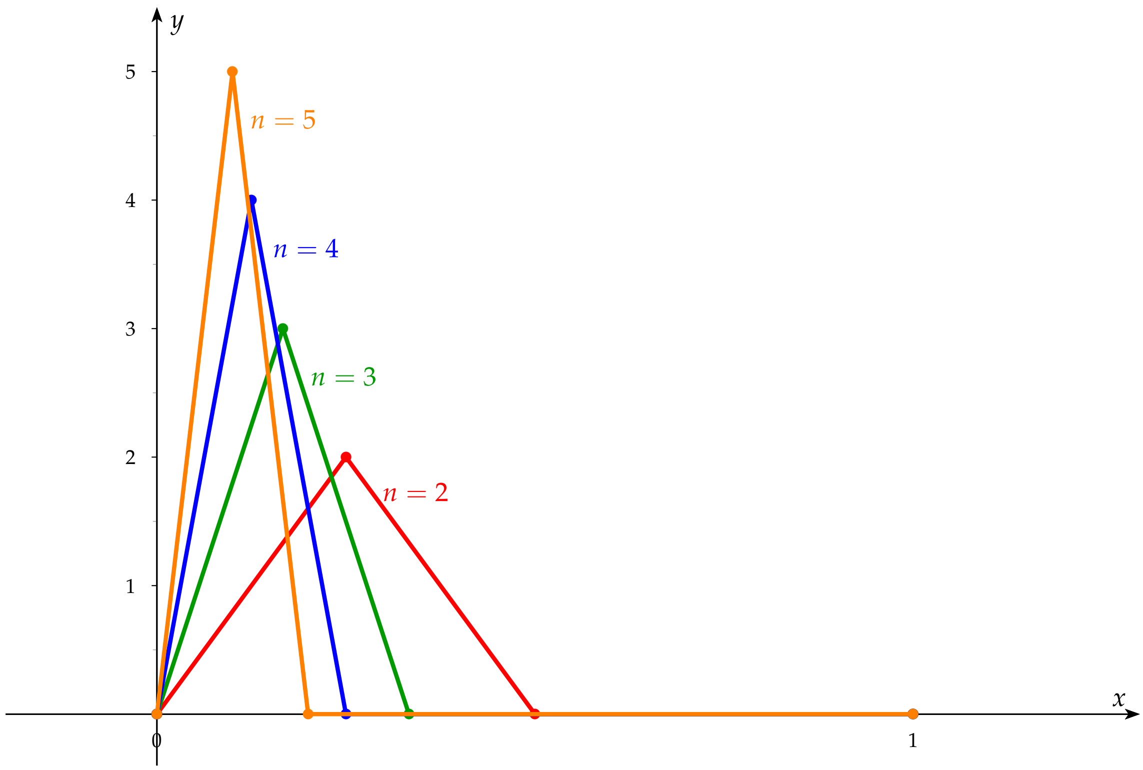
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, f_n définie comme suit :

   $$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0\,;1],\quad f_n(0) = f_n\left(\tfrac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0,\quad f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = n.$$

   Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle.

   En effet, soit $x \in [0\,;1]$ fixé. Alors :
   – soit $x = 0$ et alors $f_n(0) = 0$ pour tout n donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
   – soit $x \in]0\,;1]$, et alors on a $x > \frac{2}{n}$ pour n assez grand, d'où $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang et forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ce résultat n'est pas très intuitif, si l'on regarde le graphique :



I.2. Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

ou encore, en réécrivant la définition de la limite :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{dépend de}\\ \varepsilon \text{ et de } x}} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

S'il est normal que n_0 dépende de ε (plus on veut une approximation précise, plus il faut calculer de termes de la suite), il est parfois gênant qu'il dépende aussi de x (la suite ne converge pas partout vers f « à la même vitesse »). Cela a conduit à la définition suivante :

Déf 2:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

On dit que cette suite converge uniformément vers f sur I (en abrégé : CVU) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{ne dépend}\\ \text{que de } \varepsilon}} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Prop 1:

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, *alors* (f_n) converge simplement vers f.

Démonstration:

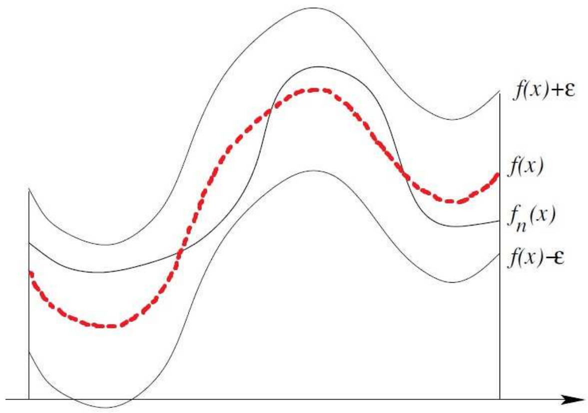
Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.
Alors (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

La figure suivante donne l'interprétation géométrique de cette définition. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f, alors pour n assez grand, le graphe de f_n reste dans un « tube » de largeur constante 2ε autour du graphe de f :



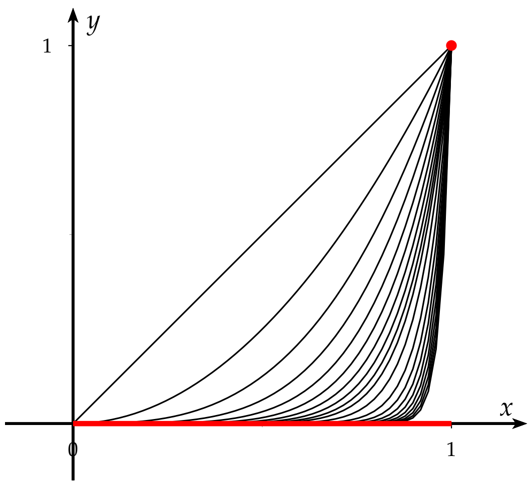
Exemples :

1. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n\,. \end{cases}$

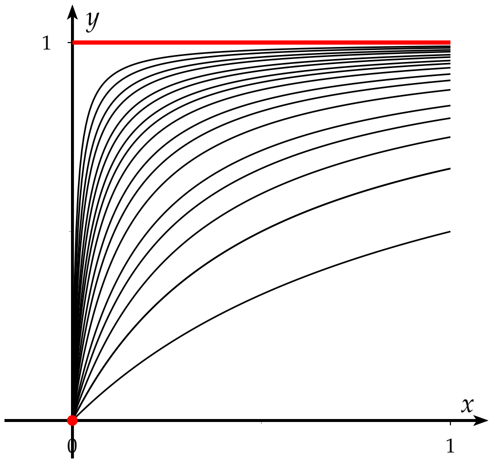
   Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$

   Or $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1[} x^n = 1$, donc *la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,;1]$.*

   Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[0\,;a]$ avec $0\leqslant a<1$, puisque $\|f_n - f\|_\infty^{[0;a]} = \sup\limits_{x\in[0;a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n$ tend vers 0 quand $n\longrightarrow+\infty$.



2. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{nx}{1+nx}\,. \end{cases}$

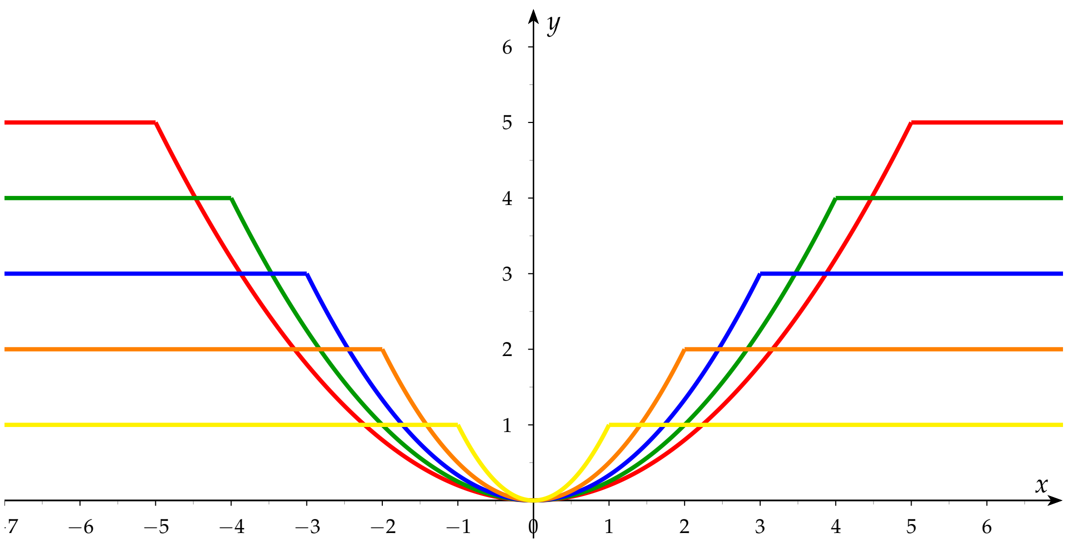


Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in]0;1]} \dfrac{1}{1+nx} = 1$, donc *la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,;1]$*.

Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a\,;1]$ avec $0 < a \leqslant 1$, car $\|f_n - f\|_\infty^{[a;1]} = \sup\limits_{x\in[a;1]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1+na}$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min\left(n, \dfrac{x^2}{n}\right) \end{cases}$.



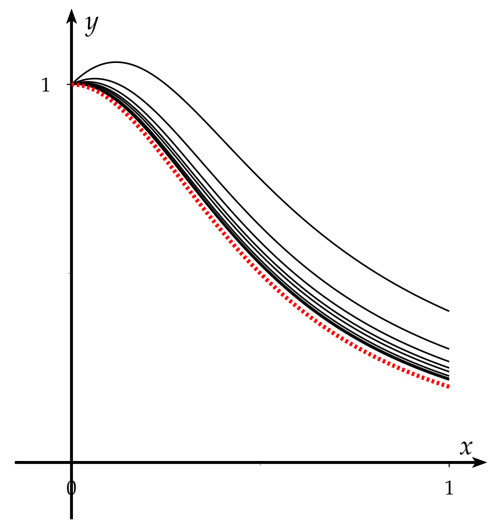
La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\dfrac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Cependant, *il n'y a pas convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$, puisque $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = n$.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[-a\,;a]$ $(a > 0)$. En effet, à partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{a^2}{n} < n$, donc pour tout $x \in [-a\,;a]$, on aura, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$ et $\sup\limits_{x\in[-a;a]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{a^2}{n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

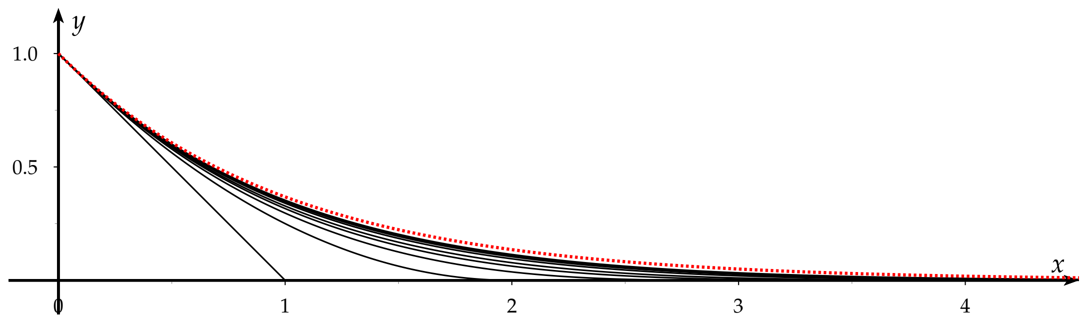
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+n}{n+4nx^2} \end{array} \right.$.



La suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$.

Il y a ici convergence uniforme sur $[0\,;1]$ car :
$\forall\, x \in [0\,;1],\ f_n(x) - f(x) = \dfrac{x}{n(1+4x^2)}$ donc $\|f_n - f\|_\infty^{[0;1]} = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

5. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0\,;n[\\ 0 & \text{si } x \geqslant n\,. \end{cases} \end{array} \right.$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on aura $x \in [0\,;n[$ à partir d'un certain rang donc $f_n(x) = \mathrm{e}^{n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$, et puisque $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

En étudiant la fonction $g_n\colon x \mapsto f(x) - f_n(x)$, nous allons montrer que $\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{1}{ne}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Prop 2:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge *uniformément* sur I vers une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si les f_n sont bornées sur I, alors f est bornée sur I.

Rem: Le résultat ne subsiste pas si il y a seulement convergence simple : considérer par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \text{ si } x \in \left]0\,;1\right] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0\,.$$

Prop 3: et déf 3

L'ensemble $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par

$$\forall f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty^I = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

D'après la proposition 2, si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, alors $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$, et la convergence uniforme de (f_n) vers f s'écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$$

c'est-à-dire que la suite (f_n) tend vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty\right)$ (au sens qui a été vu dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

II. Continuité de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f\colon I \to \mathbb{K}$.

Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang) ;
- il existe un voisinage V de a tel que *la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* V.

Alors f est continue en a.

Déf 4:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I.

Rem: Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0\,;1[$.

Corollaire 2.1:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I, *la convergence étant uniforme locale*, et si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire 2.2:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.

Rem: Ce théorème peut parfois servir à montrer qu'il n'y a *pas* convergence uniforme.

Reprenons le premier exemple du chapitre, avec $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0\,;1]$. On a vu que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction $f\colon x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$

Les f_n sont continues sur $[0\,;1]$ mais pas f : il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $[0\,;1]$.

III. Intégration d'une suite de fonctions sur un segment

Théorème 3: Interversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$, et *convergeant uniformément sur* $[a\,;b]$ vers une fonction f.

Alors f est continue sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Rem: Le théorème s'applique également à une suite de fonctions f_n *continues par morceaux*, qui converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f *continue par morceaux*. La démonstration est similaire, *mais il faut en plus vérifier la continuité par morceaux de f, celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.*

Remarques :

Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

   On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0 !

2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } t \in \left[0\,;n-\tfrac{1}{n}\right] \quad ; \quad f_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqslant n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

   Alors $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n}$ donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Cependant, on vérifie facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = 1$.

IV. Dérivation d'une suite de fonctions

Rem: Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$.
On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Cependant, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, et la suite (f_n') n'a même pas de limite simple !

Il faut donc des hypothèses supplémentaires pour pouvoir dériver la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f.

b) La suite de fonctions (f_n') converge simplement sur I vers une fonction g, *la convergence étant uniforme locale sur* I .

Alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f_n'$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f.

Corollaire 4.1: *Suites de fonctions de classe* $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 1$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) Pour tout $j \in [\![0\,;k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;

b) La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction g, *la convergence étant uniforme locale.*

Alors, la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, on a $f^{(k)} = g$ et pour $j \in [\![0\,;k]\!]$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

Corollaire 4.2: *Suites de fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;

b) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale.*

Alors, la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et pour $j \in \mathbb{N}$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

☞ *Démonstration:*

On applique le corollaire précédent à tout ordre $k \geqslant p$.

V. Séries de fonctions

V.1. Généralités

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall\, x \in I \ ,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\,.$$

Étudier la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n).

Déf 5:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dénies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I s'il existe une application $S : I \to \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S.
Cela signifie donc que, pour tout $x \in I$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge et que $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
S s'appelle alors la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. On définit également le reste d'ordre n $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. La suite de fonctions (R_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.

Déf 6:

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S: I \to \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S.

Théorème 5:

La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$).

Rem: Comme pour les suites, on définit de la même manière la notion de *convergence uniforme locale* : lorsqu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^V = 0$.

Exemples :

1. Étude de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$.
2. Étude de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^2}{(x^2+1)^n}$.

V.2. Convergence normale d'une série de fonctions

Déf 7:

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- et la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty^I$ est convergente (en notant comme d'habitude : $\|u_n\|_\infty^I = \sup\limits_{x\in I} |u_n(x)|$).

Rem: Pour montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in N} u_n$ est normalement convergente, il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|u_n\|_\infty^I \leqslant \alpha_n$ (c'est-à-dire $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$ pour tout $x \in I$), et telle que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge.

Théorème 6:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est *normalement convergente* sur I, alors :

a) Pour tout $x \in I$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I.

Rem: En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :

$$\begin{tikzcd}
 & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ CVA } \forall x \in I \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVN sur } I \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVS sur } I \\
 & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CVU sur } I \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Exemples :

1. Étude de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$.

   Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}$.
   On a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour tout x, donc $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   La série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
   Ainsi, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$.

2. **Exemple important :** Étude de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

V.3. Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Le théorème suivant, important, est admis.

Théorème 7: Interversion des limites (ou « théorème de la double limite »).

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit $a \in \overline{I}$ (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que, pour tout entier n, la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} u_n(x) = \ell_n$ existe, et que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est *uniformément convergente dans un voisinage de a*. Notons $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors :

- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire en abrégé : $\lim\limits_{a} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{a} u_n$).

Les théorèmes qui suivent découlent directement des théorèmes similaires concernant les suites de fonctions (on applique ces théorèmes aux sommes partielles de la série de fonctions).

Théorème 8: Continuité de la somme

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I. Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge uniformément sur* V.

Alors S est continue en a.

Corollaire 8.1:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si les u_n sont continues sur I et si la série *converge uniformément localement sur* I, alors sa somme S est continue sur I.

Théorème 9: Interversion série-intégrale sur un segment.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur *un segment* $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que *les u_n sont continues sur* $[a\,;b]$, et que *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge uniformément sur* $[a\,;b]$.

Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors S est continue sur $[a\,;b]$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Rem: Le théorème s'applique également lorsque les u_n sont seulement *continues par morceaux*, mais il faut alors vérifier la continuité par morceaux de S, celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.

Théorème 10: Dérivation terme à terme

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;

b) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I ; on notera S sa somme ;

c) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors :

1. La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;

2. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément localement sur I ;

3. pour tout $x \in I$, on a : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

Corollaire 10.1: *Séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 1$.*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

b) chaque série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(j)}$ pour $j \in [\![0\,;k-1]\!]$ converge simplement sur I ;

c) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors : la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in [\![0\,;k]\!]$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$, et :

$$\forall\, j \in [\![0\,;k]\!]\ ,\ \forall\, x \in I\ ,\ S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x)\,.$$

Corollaire 10.2: *Séries de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

a) les u_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I ;

b) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;

c) il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $k \geqslant p$ la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I, *la convergence étant uniforme locale sur* I.

Alors : la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in \mathbb{N}$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$ et :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, x \in I\ ,\ S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x)\,.$$

VI. Étude complète d'exemples

L'étude détaillée d'exemples se trouve dans le cours complet. Je vous conseille vivement de les travailler.