SÉRIES ENTIÈRES

I. Définition

Déf 1:

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.
On appelle série entière de la variable complexe z et de coefficients (a_n) la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Le domaine de convergence de cette série est $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} \right\}$; c'est le domaine de définition de la fonction somme de la série entière, définie par :

$$\forall z \in D\,,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,.$$

Rem : Dans les écritures ci-dessus, on pose $z^0 = 1$, même si $z = 0$. Ainsi, on a toujours $0 \in D$, et $f(0) = a_0$.

Exemples

1. Un polynôme en z est une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $D = \mathbb{C}$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière pour laquelle $D = \mathbb{C}$ (sa somme est e^z).
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^n$ est une série entière pour laquelle $D = \{0\}$ (en effet, pour tout $z \neq 0$, la suite $(n! z^n)$ n'est pas bornée, d'après les résultats sur les croissances comparées des suites usuelles).
4. Si a est un complexe non nul, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{a^n}$ est une série entière pour laquelle $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < |a|\}$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|a|$ (et, pour tout $z \in D$, on a ici $f(z) = \frac{a}{a-z}$).
5. Si a est un complexe non nul, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2 a^n}$ est une série entière pour laquelle $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leqslant |a|\}$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $|a|$.

II. Rayon de convergence d'une série entière

II.1. Définition du rayon de convergence et propriétés

Ce paragraphe détaille les propriétés du domaine de convergence d'une série entière. Tous les résultats sont basés sur le théorème suivant, très important :

Théorème 1: *Lemme d'Abel*

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.
On suppose qu'il existe un complexe non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.
Alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.

Déf 2:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée est un intervalle contenant 0 (en effet, $0 \in I$ et si $r > 0$ appartient à I, tout réel r' tel que $0 \leqslant r' \leqslant r$ appartient aussi à I).

On appelle alors rayon de convergence R de cette série entière la borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de cet intervalle :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \text{ ou } R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|\, r^n) \text{ bornée}\right\} \quad (R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}).$$

Remarques

Il y a deux cas particuliers importants.

1. Si $R = 0$, quel que soit z non nul, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est alors grossièrement divergente. Elle ne converge que pour $z = 0$.
   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} n! z^n$.
2. Si $R = +\infty$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+$. Puisque, pour tout complexe z, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r$, il résulte du lemme d'Abel que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.

Dans le cas général, on a le résultat suivant :

Théorème 2:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si $R > 0$, alors :
   pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R < +\infty$ alors :
   pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

↪ Ce qui est important pour l'étude d'une série entière est la recherche des z tels que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée.

D'autres caractérisations du rayon de convergence peuvent être utiles :

Prop 1:

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Son rayon de convergence R peut être défini par l'une des égalités suivantes :

a) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ est absolument convergente}\right\}$;

b) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ est convergente}\right\}$;

c) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq } \lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$;

d) $R = \sup\left\{|z| \text{ tq la suite } (a_n z^n) \text{ est bornée}\right\}$.

Déf 3:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
On appelle disque ouvert de convergence de cette série entière l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\} \quad \text{(boule ouverte de centre 0 et de rayon } R\text{)}.$$

Rem : Dans le cas d'une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, on parle alors de l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Ce disque ouvert de convergence est donc caractérisé par les propriétés suivantes :

- Si $z \in D$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $z \notin \overline{D}$, la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.
- Si $|z| = R$ on ne peut rien dire *a priori* (le cercle de centre 0 et de rayon R s'appelle parfois le *cercle d'incertitude*).

II.2. Méthodes de détermination du rayon de convergence

II.2.1. Application de la définition de R

Les remarques qui suivent découlent directement de la définition du rayon de convergence d'une série entière (ou de l'une des définitions équivalentes vues plus haut), et peuvent aider à sa détermination (ou à un encadrement).

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = z_1$ alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la série $\sum a_n z^n$ converge non absolument pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée pour $z = z_0$, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 pour $z = z_1$, alors $R \leqslant |z_1|$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée mais ne converge pas vers 0 pour $z = z_2$, alors $R = |z_2|$.

Exemples

1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour $z = -1$: son rayon de convergence est donc $R = 1$.
   On peut aussi dire : la série diverge pour $z = 1$, donc $R \leqslant 1$; et elle converge absolument pour $|z| < 1$ (par comparaison à la série géométrique de terme général $|z|^n$), donc $R \geqslant 1$.
2. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$ converge (absolument) pour $z = 1$: son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1 ; puisque la suite $\left(\frac{z^n}{n^2}\right)$ ne converge pas vers 0 dès que $|z| > 1$, on a : $R \leqslant 1$. En définitive, $R = 1$.
3. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}$:
   $\left|\frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{2^n}$: cette suite est donc bornée pour $z = 2$, mais elle ne converge pas vers 0, donc $R = 2$.

Les deux premiers exemples sont un cas particulier du résultat suivant, qui figure désormais au programme, donc qui peut être utilisé directement.

Prop 2:

Pour tout réel α, le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ est égal à 1.

II.2.2. Utilisation des règles de comparaison

Théorème 3:

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.
2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

Exemples

1. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n désigne la n-ième décimale après la virgule dans l'écriture décimale illimitée de π.
2. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} d_n z^n$ où d_n est le nombre de diviseurs de n.
3. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\cos n) z^n$. Quelle est sa somme ?
4. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{ch} n) z^n$. Quelle est sa somme ?

II.2.3. Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques

On considère ici une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ telle que, pour tout entier n, $a_n \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite de terme général $u_n = a_n z^n$ ne s'annule donc pas. On peut alors essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la série à termes positifs $\sum |u_n|$, en étudiant la limite éventuelle lorsque $n \to +\infty$ du rapport $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$, c'est-à-dire de l'expression $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$.

On rappelle que, si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe (dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

- si $\ell < 1$, la série de terme général u_n est absolument convergente ;
- et si $\ell > 1$, cette série est (grossièrement) divergente.

Exemples

1. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n!}{n^n} z^n$.
2. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$.
3. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n! z^{n^2}$.
4. Rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.

III. Opérations sur les séries entières

III.1. Somme de deux séries entières

Théorème 4:

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

– Si $R_a \neq R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.
– Si $R_a = R_b$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant R_a$.
– Dans les deux cas, on a, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n .$$

Rem: Si $R_a = R_b$, il se peut que $R > \min(R_a, R_b)$: par exemple, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2^n} - 1) z^n$ ont toutes deux un rayon de convergence égal à 1, mais le rayon de convergence de leur somme est 2.

III.2. Produit de Cauchy de deux séries entières

On considère ici deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Pour z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, posons $u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$. Les deux séries de terme général u_n et v_n sont alors absolument convergentes. On peut alors considérer leur série *produit de Cauchy* dont le terme général w_n est défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{soit} \quad w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n .$$

Si on pose, pour tout entier naturel n :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N} \\ p+q=n}} a_p b_q ,$$

la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ s'appelle la série produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$.
Les résultats du cours sur les séries absolument convergentes permettent alors d'énoncer directement le théorème suivant.

Théorème 5:

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est tel que $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) .$$

Exemples

1. En effectuant le produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ par elle-même, on obtient :

$$\text{pour tout nombre complexe } z \text{ tel que } |z| < 1 , \ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n .$$

2. Plus généralement, on peut démontrer par récurrence sur l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* , \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1 , \ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n .$$

IV. Continuité de la somme d'une série entière

IV.1. Cas d'une série entière de la variable réelle

Théorème 6:

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de la variable réelle x, de rayon de convergence $R>0$, est normalement convergente sur tout *segment* inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Rem : Il n'y a pas nécessairement convergence normale ni même convergence uniforme de la série entière sur *tout* l'intervalle de convergence.

Exemple

La série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ converge simplement vers $x\mapsto \ln(1+x)$ sur $[-1\,;1[$.

Il n'y a pas convergence normale sur $]-1\,;1[$, car $\|u_n\|_\infty^{]-1;1[} = \dfrac{1}{n}$.

Il n'y a pas convergence uniforme sur $]-1\,;1[$, car sinon, le théorème de la double limite conduirait à une absurdité.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[a\,;1]$ avec $-1<a<1$ (en utilisant la majoration du reste d'une série alternée).

Théorème 7:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ ($x\in\mathbb{R}$).

La fonction somme $x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,;R[$.

Corollaire 7.1:

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R>0$. Posons, pour $x\in\,]-R\,;R[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors, pour tout entier p, f admet au voisinage de 0 le développement limité :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{p} a_n x^n + O(x^{p+1})\,.$$

IV.2. Cas général

Dans le chapitre 8, nous avons défini la notion de continuité d'une fonction définie sur un espace vectoriel normé et à valeurs dans un autre espace vectoriel normé. En particulier, dire qu'une application f définie sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est continue en un point z_0 de D s'écrit :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0 \text{ tel que } \forall\,z\in D,\ |z-z_0|<\alpha \Longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

Certains résultats sur les suites et séries de fonctions peuvent également être étendus sans difficulté aux fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Déf 4:

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que cette suite converge simplement sur D s'il existe une fonction $u\colon D\to\mathbb{C}$ telle que : $\forall\,z\in D,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z)=u(z)$.

Déf 5:

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On dit que cette suite converge uniformément sur D s'il existe une fonction $u\colon D \to \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_\infty^D = 0$.

On a noté, comme d'habitude : $\|u_n - u\|_\infty^D = \sup\{|u_n(z) - u(z)| \mid z \in D\}$, et cette définition suppose que les fonctions $u_n - u$ sont bornées sur D (au moins à partir d'un certain rang).

Théorème 8:

Si les u_n sont continues sur D et si la suite (u_n) converge uniformément sur D vers une fonction u, alors u est continue sur D.

Déf 6:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On dit que cette série converge simplement sur D si pour tout $z \in D$ la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est convergente.
2. On dit que cette série converge uniformément sur D si elle converge simplement sur D et si la suite (R_n) des restes converge uniformément sur D vers la fonction nulle.
3. On dit que cette série converge normalement sur D si les u_n sont bornées sur D (au moins à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^D$ converge.

On démontre exactement de la même façon que pour les séries de fonctions de la variable réelle le résultat suivant :

Théorème 9:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications de $D \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est *normalement convergente* sur D, alors :

a) Pour tout $z \in D$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur D.

Le théorème suivant généralise le théorème 6 dans le cas d'une série entière de la variable complexe.

Théorème 10:

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence $R > 0$, est normalement convergente sur tout disque *fermé* inclus dans le disque ouvert de convergence.

Théorème 11:

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ $(z \in \mathbb{C})$.

La fonction somme $f\colon z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Exemples

1. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et :

$$\forall z \in \mathcal{B}(0,1), \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Il résulte du théorème précédent que la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est continue sur $\mathcal{B}(0,1)$.

2. La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Il résulte du théorème précédent que la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.

V. Dérivation. Intégration

V.1. Série dérivée

Déf 7:

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.

On appelle série dérivée de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n\right).$$

On appelle série primitive de cette série la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \quad \left(= \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n\right).$$

Théorème 12:

Une série entière, sa série dérivée et sa série primitive ont même rayon de convergence.

V.2. Dérivation d'une série entière de la variable réelle

Théorème 13:

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Posons, pour $x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R;R[$ et, pour tout $x \in]-R;R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Exemples

1. Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

   La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$, et, pour tout $x\in\,]-1\,;1[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$.
   Le théorème précédent permet d'écrire directement, pour tout $x\in\,]-1\,;1[\,$: $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ et enfin : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$.

2. Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

   En reprenant les mêmes notations, et toujours à l'aide du théorème précédent, on a, pour tout $x\in\,]-1\,;1[\,$: $f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$, donc $x^2f''(x)=\sum\limits_{\substack{\cancel{n=2}\\ n=1}}^{+\infty} n(n-1)x^n$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n=x^2f''(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Corollaire 13.1:

Avec les mêmes notations, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur sur $]-R\,;R[$ et, pour tout entier naturel k et pour tout $x\in\,]-R\,;R[$:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n.$$

Corollaire 13.2:

Avec les mêmes notations on a : $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.}$

Corollaire 13.3: *Unicité du développement en série entière*

Soient deux séries entières $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ et $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$.
Si f et g sont définies et coïncident dans un voisinage de 0, on a $a_n=b_n$ pour tout entier n.

V.3. Intégration d'une série entière de la variable réelle

Théorème 14:

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{C}$, et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R>0$. Posons, pour $x\in\,]-R\,;R[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

a) Pour tout segment $[a\,;b]\subset\,]-R\,;R[$, on a ; $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b (a_nx^n)\,\mathrm{d}x$.

b) En particulier, pour tout $x\in\,]-R\,;R[$, on a : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$.

Exemples :

1. On sait que, pour $|x|<1$: $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$.

   Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R=1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall x\in\,]-1\,;1[\,,\ \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\quad\text{soit}\quad \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

   ou encore :

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.}$$

Rem: En utilisant le CSSA, on peut montrer que la série de fonctions ci-dessus converge uniformément sur $[0\,;1]$, donc l'égalité précédente reste vraie pour tout $x \in \left]-1\,;1\right]$. Cela a été fait dans le chapitre sur les séries de fonctions.

2. On sait que, pour $|x| < 1$: $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.
Il s'agit d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a donc, d'après le théorème précédent :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[,\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\ \operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.}$$

Cette série de fonctions converge en fait uniformément sur le segment $[-1\,;1]$.
En effet, il est facile de vérifier que cette série vérifie les hypothèses du CSSA sur ce segment, donc converge pour tout $x \in [-1\,;1]$ et, si l'on note $r_n(x)$ son reste d'ordre n, on aura :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[,\ |r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

donc $\|r_n\|_\infty^{[-1;1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$. Cette convergence uniforme entraîne alors la continuité de la fonction somme sur le segment $[-1\,;1]$, et l'égalité ci-dessus reste donc vraie pour tout $x \in [-1\,;1]$.

En particulier, pour $x = 1$ on (re)trouve la formule célèbre : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

VI. Développements en série entière

VI.1. Définition

Déf 8:

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière dans un voisinage V de 0 s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour tout $z \in V$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si f est une fonction de la variable réelle x, développable en série entière au voisinage de 0, on a donc :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \left]-r\,;r\right[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,.$$

D'après les résultats précédents, on en déduit que :

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-r\,;r\right[$;
- $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$;

donc la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ n'est autre que la série de Taylor de f an 0.

Rem : Il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence non nul, mais dont la somme ne coïncide pas avec f.

Ex : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{ et } \quad f(0) = 0\,.$$

On vérifie aisément, à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (itéré), que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n. Ainsi la série de Taylor de f donne la fonction nulle ; cette série a un rayon de convergence infini et ne coïncide avec f qu'en 0.

VI.2. Méthodes de développement en série entière

VI.2.1. Utilisation d'une formule de Taylor

Soit f une fonction de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage V de 0. On a alors, pour tout $x \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)\,.$$

Pour montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, il suffit donc de démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]-r\,;r\right[$ on ait : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Pour cela, on peut utiliser :

– l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t\in[0,x]} \left| f^{n+1}(t) \right|$;

– ou la formule de Taylor avec reste intégrale : $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples :

1. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a déjà obtenu les développements en série entière des fonctions sin, cos et exp.

Tous ces développements en série entière sont à savoir par cœur et figurent à la fin de ce chapitre.

2. Soit α un nombre réel, et $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$.

Quelle que soit la valeur de α, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

On utilisera ici la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \quad \text{avec} \quad r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Or, pour t compris entre 0 et x (ou x et 0), $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ (en effet, la fonction homographique $t \mapsto \frac{x-t}{1+t}$ est monotone sur $\left]-1\,;+\infty\right[$) donc on a l'inégalité :

$$|r_n(x)| \leqslant \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n\right|}_{=u_n} \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

Or l'expression notée u_n ci-dessus tend vers 0 quand $n \to +\infty$, puisque $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n-1}{n+1} x\right| \to |x| < 1$ et en vertu de la règle de d'Alembert.

Donc, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$ et $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ soit :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\; \forall\, x \in \left]-1\,;1\right[\,,\; (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots}$$

(si $\alpha \in \mathbb{N}$, la somme ci-dessus est finie et l'on retrouve la formule du binôme).

VI.2.2. Utilisation de l'intégration ou de la dérivation

- On a déjà obtenu, à la suite du théorème 14, les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$.
- On peut obtenir de la même manière celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$.
  En effet, $f : x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$.
  D'après le calcul précédent $\alpha = -1/2$, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \tfrac{x}{2} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{x^2}{2!} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\tfrac{(2n-1)}{2}\right)\tfrac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

  soit

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n n!(2\cdot 4\cdots 2n)}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^{2n}}\,.\end{aligned}$$

  Ainsi, pour $t \in]-1\,;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\dfrac{t^{2n}}{2^{2n}}$ et le théorème 14 permet de conclure directement :

$$\boxed{\forall x \in]-1\,;1[\,,\ \operatorname{Arc}\sin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}\,.}$$

- Un autre exemple : *déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction* $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

VI.2.3. Combinaison linéaire de développements connus

On utilise ici le théorème 4.

Exemples

1. À partir du développement de exp, on obtient facilement ceux des fonctions sh et ch, en utilisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,.$$

   Les séries obtenues ont, comme pour la fonction exp, un rayon de convergence ∞.
2. *Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de* $f : x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$.
3. *Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de* $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

VI.2.4. Développement en série entière d'une fraction rationnelle

Soit $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle de la variable complexe z *n'admettant pas* 0 *pour pôle* (i.e $Q(0) \neq 0$). La décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$R(z) = \underbrace{E(z)}_{\text{partie entière}} + \sum_i\sum_j \frac{\lambda_{i,j}}{(z-a_i)^j} \quad (\text{où les } a_i \text{ sont les racines de } Q)$$

Or :

$$\frac{1}{(z-a_i)^j} = \frac{1}{(-a_i)^j}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^j} = \frac{1}{(-a_i)^j}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{-j}$$

(puisque $a_i \neq 0$ par hypothèse), et on a vu page 5 que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\,,\ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}z^n$$

(on pourrait aussi utiliser la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^{-p}$).
On peut donc obtenir le développement en série entière de chaque élément simple $\dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^j}$ pour $\left|\dfrac{z}{a_i}\right| < 1$ soit $|z| < |a_i|$, et la combinaison linéaire des développements ainsi obtenus donnera le développent en série entière de la fraction rationnelle R, avec pour rayon de convergence $R = \min(|a_i|)$.

Ex : *Développement en série entière, au voisinage de* 0 *de* $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ *avec* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

VI.2.5. Utilisation du produit de Cauchy

Cette méthode, qui s'appuie sur le théorème 5 conduit, en général, à des expressions compliquées. Donnons seulement un exemple.

Ex : *Développement en série entière, au voisinage de* 0 *de* $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

VI.2.6. Méthode de l'équation différentielle

On suppose ici que la fonction f vérifie une certaine équation différentielle, et que f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On connaît alors aussi le développement en série entière des dérivées de f (théorème 13), et on peut alors remplacer l'expression de f ainsi que celles de ses dérivées dans l'équation différentielle pour obtenir une relation de récurrence entre les coefficients, puis les calculer.

Le problème de cette méthode (outre les calculs !) est qu'elle suppose f développable en série entière *a priori*, donc il faut vérifier a posteriori que le résultat obtenu convient, c'est-à-dire que le rayon de convergence de la série obtenue est bien strictement positif.

Exemples :

1. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$; f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.
   La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x)y' = \alpha y$. C'est l'unique solution de cette équation sur l'intervalle $]-1\,;1[$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque la fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1\,;1[$).

   On cherche alors une série entière $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif, vérifiant la même équation différentielle et la même condition initiale .

   $y(0) = 1$ équivaut à $a_0 = 1$ et, puisque $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ pour $x \in\,]-R\,;R[$, on a

   $$(1+x)y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{\substack{\cancel{n=1}\\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha y(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   soit, après un changement d'indice dans la première somme :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n a_n + (n+1)a_{n+1}\right] x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   On a donc, par unicité du développement en série entière : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Il est facile d'en déduire par récurrence, puisque $a_0 = 1$: $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   Ainsi, $y(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

   Réciproquement, si on considère la fonction $g\colon x \mapsto 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, la règle de d'Alembert permet de prouver facilement que cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

   En reprenant alors les calculs précédents dans l'autre sens, on obtient que g est bien solution de l'équation différentielle sur $]-1\,;1[$. Elle coïncide donc avec f sur $]-1\,;1[$ (par unicité de la solution au problème de Cauchy), ce qui permet de retrouver le développement connu de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

2. *Déterminer le développement en série entière au voisinage de* 0 *de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. *Déterminer le développement en série entière au voisinage de* 0 *de la fonction* f *définie sur* $[-1\,;1]$ *par :* $f(x) = (\operatorname{Arc}\sin x)^2$.

VII. Sommation d'une série entière

Il s'agit ici du problème inverse du précédent : étant donné une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, il s'agit d'exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.
Il n'y a pas de méthode générale pour ce faire, mais on peut essayer d'exploiter les pistes suivantes :

- Faire directement apparaître, dans $\sum a_n x^n$, des développements en série entière connus. Pour cela, on peut (éventuellement) : décomposer a_n comme combinaison linéaire de termes plus simples, utiliser un changement de variable, utiliser dérivation ou intégration, reconnaître un produit de Cauchy...
- À l'aide d'une relation de récurrence entre les a_n, déterminer une équation différentielle dont la fonction somme est solution.

Exemples

1. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
2. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$. *En déduire la valeur de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *et de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.
3. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$.
4. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.
5. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\binom{2n}{n}}$.
6. *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} x^n$.

VIII. Annexe : Développements en série entière usuels

Quelques remarques pour le tableau suivant :

- Les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$ et de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ne sont bien sûr pas à retenir par coeur ; ce sont de simples applications du développement de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$.
- De même, le développements en série entière de Arc sin s'obtient simplement en intégrant le développement de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Fonction	Développement en série entière	RCV
e^x	$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$	$1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$+\infty$
$\cos(x)$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$+\infty$
$\sin(x)$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$	$+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$	1
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\ldots$	1
$\sqrt{1+x}$	$1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}x^n+\cdots$	1
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{8}-\dfrac{5x^3}{16}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}x^n+\cdots$	1
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$	1
$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	1
$\operatorname{Arc}\tan(x)$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	1
$\operatorname{Arc}\sin(x)$	$x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{8}\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	1

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆