EXERCICES : APPLICATIONS LINÉAIRES

Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ (ex. 1 à 5)

Exercice 1: ($\star\star$)

a) Montrer que l'application φ définie par $\varphi(P) = P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

b) En est-il de même de l'application $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter)?

Exercice 2: ($\star\star$)

Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$.

d) En déduire que si $\deg P < n$ alors : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$.

Exercice 3: ($\star$)

Dans $\mathbb{K}_n[X]$, soit u l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $(X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$ (où $a \in \mathbb{K}$ est donné).

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son image et son noyau (*on pensera à utiliser une base convenable de* $\mathbb{K}_n[X]$).

Exercice 4: ($\star\star$)

Dans $\mathbb{K}[X]$, soit φ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $(1-nX)P + X^2P'$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné).

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il injectif? surjectif?

Exercice 5: ($\star\star$)

Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$ et que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire : $\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)} = Q$.

Simplifier alors $Q - Q'$; en déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer φ^{-1}.

Projecteurs (ex. 7 à 17)

Exercice 6: ($\star$)

On considère l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(x+2y+2z, 2x+y-2z, 2x-2y+z) \end{array} \right.$.

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Est-ce un projecteur, une symétrie? Si oui, en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 7: (⋆)

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Exercice 8: (⋆⋆)

Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que, si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

Exercice 9: (⋆⋆)

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.
Montrer que r est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

Exercice 10: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie , et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, et p un projecteur de E tel que $\operatorname{Im} p = F$.
Montrer que : $q = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k \circ p \circ f^{n-k}$ est un projecteur de E, d'image F
(on pourra remarquer que, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $p \circ f^\ell \circ p = f^\ell \circ p$).

Exercice 11: (⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

a) Montrer que $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$.

b) En déduire $u^2 = 0$.

c) Réciproque ?

Exercice 12: (⋆⋆)

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante similaire pour que p et q aient même image.

Exercice 13: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

a) Montrer que u est inversible et exprimer son inverse en fonction de u.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

c) On note p (resp. q) le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ (resp. $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$) parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ (resp. $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$).
Montrer que $u = p + 2q$.

d) Calculer u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de p et q.

Exercice 14: ($\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $u^3 = u^2 + 2u$.
Soient : $E_1 = \mathrm{Ker}(u)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, $E_3 = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

b) On note p_1, p_2, p_3 les projecteurs associés à cette somme directe (p_1 projection sur E_1 de direction $E_2 \oplus E_3$, etc...).
Montrer qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n, que l'on déterminera, tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$

c) Montrer qu'il existe des réels a'_n, b'_n et c'_n, que l'on déterminera, tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u^n = a'_n \mathrm{Id}_E + b'_n u + c'_n u^2.$$

Exercice 15: ($\star$)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant :
$$f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{Id}_E \text{ et } f_i \circ f_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

a) Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.

b) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$.

Exercice 16: ($\star\star\star$)

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.
Comparer $\mathrm{Im}(u \circ v)$ et $\mathrm{Im}\, u$ et en déduire $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17: ($\star\star\star$)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leqslant n$.
Montrer que f et g sont des projecteurs.

Noyau - Image (ex. 18 à 29)

Exercice 18: ($\star$)

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 19: (✍)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u + v)$.
Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 20: ($\star\star$)

Soit $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par :

$$\forall x \in [0;1],\ T(f)(x) = \int_0^x f\big(4(t-t^2)\big)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

c) T est-il surjectif ?

Exercice 21: (✍)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, qui commutent ($u \circ v = v \circ u$).
Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Exercice 22: ($\star\star$)

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 23: ($\star\star\star$)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(E,G)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Démontrer : $\big[\exists w \in \mathscr{L}(E,F) \text{ tq } u = v \circ w\big] \iff \big[\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v\big]$.

2. Soient $u \in \mathscr{L}(E,G)$ et $w \in \mathscr{L}(E,F)$.
Démontrer : $\big[\exists v \in \mathscr{L}(F,G) \text{ tq } u = v \circ w\big] \iff \big[\operatorname{Ker} w \subset \operatorname{Ker} u\big]$.

(*Indication : penser à utiliser le théorème d'isomorphisme*).

Exercice 24: ($\star$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
Montrer que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.

Exercice 25: ($\star$)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

(ii) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$;

(iii) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Contre-exemple si E n'est pas de dimension finie ?

Exercice 26: ($\star\star$)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.
Montrer que : $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$.

Exercice 27: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Montrer que $E = E_1 \oplus E_{\mathrm{j}} \oplus E_{\mathrm{j}^2}$.

Exercice 28: (⋆⋆)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim F + \dim G = n$;

(ii) il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, u = F$ et $\mathrm{Ker}\, u = G$.

Exercice 29: noyaux et images itérés (⋆⋆)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \mathrm{Im} f^p$ et $N_p = \mathrm{Ker}\, f^p$.

a) Montrer que la suite $(I_p)_{p \geqslant 0}$ est décroissante (pour l'inclusion) et que la suite $(N_p)_{p \geqslant 0}$ est croissante.

b) Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.

c) Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés.
Montrer que
$$\forall s \geqslant r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r \ .$$

d) Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.
En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit, par blocs : $A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, où A' est une matrice carrée inversible et N une matrice carrée nilpotente.

Rang (ex. 30 à 34)

Exercice 30: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \frac{n}{2}$ ·

Exercice 31: (⋆⋆)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.
Montrer que $n = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Exercice 32: (⋆⋆⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \iff \begin{cases} \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0\} \\ \qquad \text{et} \\ E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v. \end{cases}$$

Exercice 33: (⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que : $\left|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v\right| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \min(\dim E,\ \dim F,\ \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v)$.

Exercice 34: (⋆⋆)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Établir :

a) $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v) = \operatorname{rg} u - \operatorname{rg}(v \circ u)$.

b) $\dim(\operatorname{Ker}(v \circ u)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$.

c) $\operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

(*Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de* v *à* $\operatorname{Im} u$).

Divers (ex. 35 à 39)

Exercice 35: (⋆⋆)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une famille $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

a) Montrer que : $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(E_i)$.

b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

c) Montrer que : $f^{-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} F_j\right) \supset \sum\limits_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$.

Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 36: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que f et g commutent (*on pourra commencer par démontrer que* f *est bijective*).

Exercice 37: endomorphismes nilpotents (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E.
Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

a) Soit $x \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $f^n = 0$.

c) Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $(u \circ v)^n = 0$.
Montrer que $(v \circ u)^n = 0$.

Exercice 38: (⋆⋆⋆)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si :

$$u \text{ est injective , } v \text{ est surjective et } \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v = F.$$

Exercice 39: centre de $\mathscr{L}(E)$ ($\star\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée.

i) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x . x$.

ii) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$ (*on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.*)

iii) Conclure que u est une homothétie vectorielle.

b) En déduire le *centre* de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\forall\, u \in \mathscr{L}(E), u \circ v = v \circ u$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange (ex. 40 à 44)

Exercice 40: ($\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts. On considère les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\forall\, j \in [\![0\,;n]\!], \quad L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i} \right).$$

Déterminer le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j^k L_j$ lorsque $k \in [\![0\,;n]\!]$, puis pour $k = n+1$.

Exercice 41: ($\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Exercice 42: ($\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, et F le sous-ensemble formé des applications f telles que : $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer un supplémentaire.

Exercice 43: ($\star$)

On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \ldots, y_n, y_n'$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!],\ H(x_k) = y_k \ \text{ et } \ H'(x_k) = y_k'$$

(*c'est le polynôme d'interpolation de Hermite*).

Exercice 44: ($\star\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et r un réel > 0 fixé.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(k) = r^k$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, puis calculer $P(n+1)$ (*Indication : utiliser un résultat de l'exercice 2*).

Formes linéaires (ex. 45 à 48)

Exercice 45: ($\star$)

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (pas nécessairement de dimension finie !).
Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer que $F = H$ ou $F = E$.

Exercice 46: ($\star$)

Montrer que les formes linéaires φ_1, φ_2, φ_3 définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi_1(x,y,z) = 2x - y + 2z\ ,\ \varphi_2(x,y,z) = 3x - 5y + z\ ,\ \varphi_3(x,y,z) = 4x - 7y + z$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^\star$.

Exercice 47: ($\star\star$)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^\star, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0\ .$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Exercice 48: ($\star\star$)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = 0$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans $E^\star$.

$\star\ \star\ \star\ \star$
$\star\ \star\ \star$
$\star\ \star$
$\star$