EXERCICES : APPLICATIONS LINÉAIRES, AVEC CORRIGÉS

Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ (ex. 1 à 5)

Exercice 1: ($\star\star$)

a) Montrer que l'application φ définie par $\varphi(P) = P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

b) En est-il de même de l'application $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter) ?

✎ *Solution:*

a)
- L'application φ est facilement un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Pour tout polynôme P, on a $\deg\varphi(P) = \deg P$ donc $\varphi(P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0$ et φ est injective.
- La conservation du degré montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par φ, donc on peut considérer l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{K}_n[X]$; cet endomorphisme étant injectif et $\mathbb{K}_n[X]$ étant de dimension finie, il s'agit d'un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.1
  Ainsi pour tout P de $\mathbb{K}_n[X]$ il existe un unique Q de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $P = \varphi_n(Q) = \varphi(Q)$.
  Puisque tout polynôme P appartient à un certain $\mathbb{K}_n[X]$, cela prouve la surjectivité de φ, qui est donc un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

b)
- L'application ψ_λ est facilement un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
- Supposons que P soit un polynôme de degré n, de coefficient dominant a_n : $P = a_nX^n + Q$, avec $\deg Q < n$.
  Alors : $\psi_\lambda(P) = \lambda(a_nX^n + Q) - X(na_nX^{n-1} + Q') = (\lambda_n - n)a_nX^n + R$, avec $\deg R < n$.
  - Si λ n'est pas un entier naturel, on a donc toujours $\deg\psi_\lambda(P) = \deg P$.
    Le même raisonnement qu'en **a)** montre alors que ψ_λ est un isomorphisme.
  - On suppose maintenant que $\lambda = n$, avec n dans N.
    Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(X^k) = (n-k)X^k$ donc l'image de la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ par φ (qui engendre $\operatorname{Im}\varphi$) est la famille :
    $$\left\{n, (n-1)X, \dots, X^{n-1}, -X^{n+1}, -2X^{n+2}, \dots\right\}.$$
    Le polynôme X^n ne peut appartenir à $\operatorname{Im}\varphi$ car sinon la famille
    $$\left\{n, (n-1)X, \dots, X^{n-1}, X^n, -X^{n+1}, -2X^{n+2}, \dots\right\}.$$
    serait liée, ce qui n'est pas le cas (polynômes de degrés distincts).
    Il s'ensuit que ψ_n n'est pas surjective : ce n'est pas un isomorphisme.
    On voit aussi que $\psi(X^n) = 0$: l'application ψ_n n'est pas injective. Plus précisément, $\operatorname{Ker}\psi$ est la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(X^n)$.

Exercice 2: ($\star\star$)

Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$ et $\operatorname{Im}\Delta$.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\Delta^n(P) = (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$.

d) En déduire que si $\deg P < n$ alors : $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$.

✎ *Solution:*

a) Δ endomorphisme ne pose pas de problème : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X)\\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q),\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire, et va bien de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Si $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, on peut écrire $P = a_{n+1}X^{n+1} + Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors $\Delta(P) = a_{n+1}[(X+1)^{n+1} - X^{n+1}] + \Delta(Q)$; $\deg \Delta(Q) \leqslant n$ et d'après la formule du binôme, $(X+1)^{n+1} - X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} X^k$, donc $\Delta(P)$ est de degré $\leqslant n$.

De même, $\Delta(Q)$ est de degré $\leqslant n-1$ donc si P est exactement de degré $n+1$, alors $\Delta(P)$ est exactement de degré n.

b) – $P \in \operatorname{Ker} \Delta \iff P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(X+1) = P(X)$. Or si P vérifie $P(X+1) = P(X)$ on aura en particulier, par récurrence immédiate, $P(n) = P(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$; on en déduit que le polynôme $P - P(0)$ possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul et $P = P(0)$ est un polynôme constant. La réciproque est immédiate, donc $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{K}_0[X]$.
Rem : on pouvait aussi utiliser la question précédente, en raisonnant par contraposition : si P non constant, on ne peut pas avoir $\Delta(P) = 0$.

– L'application Δ transforme la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ en une famille qui engendre $\mathbb{K}[X]$ donc Δ est surjective.

c) Notons T l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $T : P \mapsto P(X+1)$. Alors $\Delta = T - \operatorname{Id}_{\mathbb{C}[X]}$ et d'après la formule du binôme (car T et Id commutent !) on a

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T^k$$

ce qui conduit à la formule de l'énoncé puisqu'il est facile de vérifier que $T^k(P) = P(X+k)$.

d) Immédiat avec la question précédente car si $\deg P < n$ on a $\Delta^n(P) = 0$.

Exercice 3: ($\star$)

Dans $\mathbb{K}_n[X]$, soit u l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $(X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$ (où $a \in \mathbb{K}$ est donné).

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son image et son noyau (*on pensera à utiliser une base convenable de* $\mathbb{K}_n[X]$).

✎ *Solution:*

- φ endomorphisme : facile (linéaire et bien à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$).
- On considère la base de $\mathbb{K}_n[X]$ formée des polynômes $(X-a)^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ (c'est bien une base car c'est une famille libre de $n+1$ vecteurs).

  On calcule alors : $\varphi\left((X-a)^k\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{0,1,2\} \\ (k-2)(X-a)^k & \text{sinon} \end{cases}$.

  L'image de φ étant le sous-espace vectoriel engendrée par ces vecteurs, on a :

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Vect}\left\{(X-a)^3, \ldots, (X-a)^n\right\} = \left\{P \in \mathbb{K}_n[X] \;\middle|\; (X-a)^3 \text{ divise } P\right\}.$$

  Donc $\dim \operatorname{Im} \varphi = n-2$ d'où par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = (n+1) - (n-2) = 3$, et puisque les polynômes 1, $X-a$ et $(X-a)^2$ appartiennent à $\operatorname{Ker} \varphi$, on a :

$$\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}\left\{1, X-a, (X-a)^2\right\} = \mathbb{K}_2[X].$$

Exercice 4: ($\star\star$)

Dans $\mathbb{K}[X]$, soit φ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $(1-nX)P + X^2P'$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné).

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

✎ *Solution:*

On calcule l'image de la base canonique.
Pour tout entier k, $\varphi(X^k) = X^k + (k-n)X^{k+1}$. $\varphi(X^k)$ est un polynôme de valuation k. On a donc une famille de polynômes de valuations distinctes donc libre donc φ est injectif.

Mais φ n'est pas surjectif car X^{n+1} ne peut pas être dans l'image de P. En effet, sinon il existerait un entier N et des scalaires λ_k tels que

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \varphi(X^k) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \left(X^k + (k-n)X^{k+1}\right) \qquad \text{avec } \lambda_N \neq 0.$$

Si l'on avait $N > n$, le polynôme $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \varphi(X^k)$ serait de degré $N+1$, c'est impossible.

Donc $N \leqslant n$ mézalor le polynôme $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \varphi(X^k)$ est de degré $\leqslant n$, c'est impossible également.

(*on pouvait aussi raisonner par l'absurde : si* X^{n+1} *était dans* $\operatorname{Im}\varphi$, *la famille formée des* $\left\{\varphi(X^k),\ k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{X^{n+1}\right\}$ *serait liée, ce qui est faux car il s'agit de polynômes de degrés distincts...*).

Exercice 5: (⋆⋆)

Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$ et que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire : $\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)} = Q$.

Simplifier alors $Q - Q'$; en déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer φ^{-1}.

✎ *Solution:*

On peut tout démontrer d'un coup.

- La linéarité de φ ne pose pas de problème !
- Il est clair que, si P est un polynôme de degré n, $\varphi(P)$ est aussi un polynôme de degré n. Ainsi, φ transforme la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout k, $\deg P_k = k$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une base de $\mathbb{R}[X]$ (voir un autre exercice), et φ transformant une base en une base est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ étant stable par φ, l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est aussi un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Si Q est un polynôme quelconque, φ étant bijective, on a alors $\exists! P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)} = Q$. On a alors $Q - Q' = P$, donc φ^{-1} est l'application qui à tout polynôme Q associe $Q - Q'$.

Projecteurs (ex. 7 à 17)

Exercice 6: (⋆)

On considère l'application $u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(x+2y+2z, 2x+y-2z, 2x-2y+z) \end{array}\right.$.

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Est-ce un projecteur, une symétrie ? Si oui, en déterminer les éléments caractéristiques.

✎ *Solution:*

- On écrit la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{M}(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule : $\mathrm{M}(u)^2 = I_3$. Ainsi $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, u est une symétrie.

- La base de la symétrie est l'espace vectoriel formé des vecteurs (x,y,z) tels que $u(x,y,z) = (x,y,z)$. On trouve qu'il s'agit du plan d'équation $-x+y+z = 0$.
- La direction de la symétrie est l'espace vectoriel formé des vecteurs (x,y,z) tels que $u(x,y,z) = -(x,y,z)$. On trouve qu'il s'agit de la droite de base le vecteur $(-1,1,1)$.

Exercice 7: (⋆)

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

✎ *Solution:*

- Si u et p commutent, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u d'après le résultat de l'exercice 21.
- Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ stables par u.
  - Pour tout $x \in \operatorname{Ker} p$, $u \circ p(x) = u(0) = 0$ et $p \circ u(x) = p[u(x)] = 0$ puisque par hypothèse $u(x) \in \operatorname{Ker} p$.
  - En utilisant le fait que les vecteurs de $\operatorname{Im} p$ sont les vecteurs invariants par p, on a, pour tout $x \in \operatorname{Im} p$, $u \circ p(x) = u(x)$ et $p \circ u(x) = p[u(x)] = u(x)$ puisque par hypothèse $u(x) \in \operatorname{Im} p$.

  En conclusion, l'égalité $p \circ u(x) = u \circ p(x)$ est vérifiée sur $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$, et puisque ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, elle l'est pour tout x de E.

Exercice 8: (⋆⋆)

Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que, si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

✎ *Solution:*

- $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.
- Soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$; il existe $(u, v) \in \operatorname{Ker} \times \operatorname{Ker} q$ tels que $x = u + v$ et alors

$$(p \circ q)(x) = (p \circ q)(u) + (p \circ q)(v) = (q \circ p)(u) + (p \circ q)(v) = q[\underbrace{p(u)}_{=0}] + p[\underbrace{q(v)}_{=0}] = 0_E,$$

  donc $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Ainsi, $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$.

  Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker} p \circ q$. Puisque $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v \in \operatorname{Im} p$. Alors :

$$(p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q[\underbrace{p(u)}_{=0}] + q[\underbrace{p(v)}_{=v}] = q(v) = 0_E,$$

  donc $v \in \operatorname{Ker} q$. Par suite $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

  On a donc montré par double inclusion : $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
- Soit $x \in \operatorname{Im} p \circ q$. Puisque $p \circ q$ est un projecteur on a $x = (p \circ q)(x)$. On a alors $x = p(q(x)) \in \operatorname{Im} p$ et $x = q(p(x)) \in \operatorname{Im} q$ donc $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Ainsi $\operatorname{Im} p \circ q \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

  Inversement, soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Puisque p et q sont des projecteurs, on a $x = p(x) = q(x)$ d'où $x = p \circ q(x)$ et $x \in \operatorname{Im}(p \circ q)$.
  Ainsi $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p \circ q$ puis l'égalité.

Exercice 9: (⋆⋆)

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$. Montrer que r est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

✎ *Solution:*

a) On calcule :

$$r^2 = (p + q - q \circ p)^2 = (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p).$$

En développant et en utilisant $p \circ q = 0$ on obtient :

$$r^2 = p^2 + q \circ p + q^2 - q^2 \circ p - q \circ p^2$$

En exploitant $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on obtient $r^2 = r$ donc r est un projecteur.

b)

- Pour tout $x \in E$,

$$r(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$

  donc

$$\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.$$

  Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Im} q$.
  Puisque $p \circ q = 0$, on a $p(b) = 0$; puisque $a \in \operatorname{Im} p$, on a $p(a) = a$; puisque $b \in \operatorname{Im} q$, on a $q(b) = b$.
  Ces relations permettent facilement d'obtenir $r(a) = a$ et $r(b) = b$, d'où $r(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im} r$.
  Ainsi :

$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.$$

- Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, on a $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} r$.

  Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker} r$. On a $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ donc $p(x) = p(p(x)) = p(q(x - p(x))) = 0$ car $p \circ q = 0$.
  Ainsi $x \in \operatorname{Ker} p$. De plus $p(x) + q(x - p(x)) = 0$ avec $p(x) = 0$ donne $q(x) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} q$.
  Finalement $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ puis : $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 10: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie , et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, et p un projecteur de E tel que $\mathrm{Im}\, p = F$.

Montrer que : $q = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k \circ p \circ f^{n-k}$ est un projecteur de E, d'image F

(on pourra remarquer que, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $p \circ f^\ell \circ p = f^\ell \circ p$).

Solution:

- F étant stable par f est stable par tous les f^ℓ avec $\ell \in \mathbb{N}$ (récurrence). De plus $f(F) \subset F$ et f bijectif impliquent $f(F) = F$ (par les dimensions), donc $f^{-1}(F) = F$ donc F est également stable par $f^{-\ell}$ pour $\ell \in \mathbb{N}$.
  Donc, pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$ donc $f^\ell[p(x)] \in F$ donc $p \circ f^\ell \circ p(x) = f^\ell \circ p(x)$, les vecteurs de F étant invariants par p. Cela démontre la remarque de l'énoncé.
- On a alors

$$\begin{aligned}
q^2 &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} f^k \circ p \circ f^{n-k} \circ f^\ell \circ p \circ f^{n-\ell} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} f^k \circ p \circ f^{\ell-k} \circ p \circ f^{n-\ell} \text{ puisque } f^n = \mathrm{Id}_E \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} f^k \circ f^{\ell-k} \circ p \circ f^{n-\ell} \text{ d'après la remarque} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} f^\ell \circ p \circ f^{n-\ell} = \frac{1}{(n+1)^2}(n+1) \sum_{\ell} f^\ell \circ p \circ f^{n-\ell} = q
\end{aligned}$$

- Si $x \in F$, alors $f^{n-k}(x) \in F$ donc $p[f^{n-k}(x)] = f^{n-k}(x)$ et $q(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} f^k \circ f^{n-k}(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x = x$, d'où $x \in \mathrm{Im}\, p$. Donc $F \subset \mathrm{Im}\, p$.
- Pour tout $x \in E$, $p \circ f^{n-k}(x)$ appartient à F donc $f^k \circ p \circ f^{n-k}(x)$ appartient à F puis $q(x) \in F$. On a donc $\mathrm{Im}\, p \subset F$.

Exercice 11: (⋆)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

a) Montrer que $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} p \subset \mathrm{Ker}\, u$.

b) En déduire $u^2 = 0$.

c) Réciproque ?

Solution:

a) Si $x \in \mathrm{Ker}\, p$, alors $u(x) = p(u(x))$ donc $u(x) \in \mathrm{Im}\, p$. Ainsi, $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$.
Si $x \in \mathrm{Im}\, p$ alors $p(x) = x$ donc $u(x) = p(u(x)) - u(p(x)) = p(u(x)) - u(x)$ d'où $2u(x) = p(u(x))$. Par suite $u(x) \in \mathrm{Im}\, p$ donc $p(u(x)) = u(x)$ et enfin la relation précédente donne $u(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}\, u$.

b) Pour $x \in E, u(x) = u(p(x)) + u(x - p(x))$.
Or $u(p(x)) = 0$ car $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$ et $u(x - p(x)) \in u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$ donc

$$u^2(x) = 0.$$

c) Supposons $u^2 = 0$. On a alors $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. Soit p une projection sur $\mathrm{Im}\, u$ (parallèlement à un supplémentaire quelconque).
On a $p \circ u = u$ car les vecteurs de $\mathrm{Im}\, u$ sont invariants par p et on a $u \circ p = 0$ car $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.
Ainsi, il existe une projection p pour laquelle $u = p \circ u - u \circ p$, ce qui démontre la réciproque.

Exercice 12: (⋆⋆)

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante similaire pour que p et q aient même image.

✎ *Solution:*

a) – Supposons $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. On a alors $p \circ q(x) = p(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Ker} q$, et aussi $p \circ q(x) = p(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Im} q$ car alors $q(x) = x$.
L'égalité $p \circ q(x) = p(x)$ étant vraie pour $x \in \operatorname{Ker} q$ et pour $x \in \operatorname{Im} q$, elle l'est pour tout x car ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
Ainsi $p \circ q = p$ et de même on obtient $q \circ p = q$.

– Inversement, si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$ d'où l'égalité $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

b) Supposons $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. On a alors pour tout $x \in \operatorname{Im} q$, $p \circ q(x) = p(x) = x = q(x)$ et pour tout $x \in \operatorname{Ker} q$ on a $p \circ q(x) = q(x) = 0$.
On en déduit comme dans la question précédente : $p \circ q = q$, et de même, $q \circ p = p$.
Inversement, l'égalité $p \circ q = q$ entraîne $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et l'égalité $q \circ p = p$ entraîne $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.
Ainsi, la condition nécessaire et suffisante cherchée est : $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

Remarque : on pouvait aussi directement déduire le résultat de la 2ème question à partir de la 1ère, en introduisant les projections associées $p' = \mathrm{Id}_E - p$ et $q' = \mathrm{Id}_E - q$.

Exercice 13: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

a) Montrer que u est inversible et exprimer son inverse en fonction de u.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

c) On note p (resp. q) le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ (resp. $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$) parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ (resp.$\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$).
Montrer que $u = p + 2q$.

d) Calculer u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de p et q.

✎ *Solution:*

Il faut commencer par remarquer que

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E).$$

a) En procédant par analyse-synthèse, on montre que tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme

$$x = \underbrace{2x - f(x)}_{\in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{f(x) - x}_{\in \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)}$$

et que cette décomposition est unique.

b) D'après la décomposition ci-dessus :

$$\forall\, x \in E,\ p(x) = 2x - f(x) \quad \text{et} \quad q(x) = f(x) - x$$

d'où le résultat (il s'agit de la *décomposition spectrale* de f).

c) Par récurrence, $f^n = p + 2^n q$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis on vérifie que $(p + 2^{-n}q) \circ f^n = \mathrm{Id}_E$ donc f^n est inversible d'inverse $p + 2^{-n}q$, et la relation précédente s'étend donc à $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 14: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que $u^3 = u^2 + 2u$.
Soient : $E_1 = \operatorname{Ker}(u)$, $E_2 = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, $E_3 = \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.

a) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

b) On note p_1, p_2, p_3 les projecteurs associés à cette somme directe (p_1 projection sur E_1 de direction $E_2 \oplus E_3$, etc...).
Montrer qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$

c) Montrer qu'il existe des réels a'_n, b'_n et c'_n, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u^n = a'_n \mathrm{Id}_E + b'_n u + c'_n u^2.$$

✎ *Solution:*

a) Il s'agit de montrer que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

On procède pour cela par analyse-synthèse, ce qui montrera l'unicité, puis l'existence.

– *Analyse*
Si $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_i \in E_i$ alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) = 0 - x_2 + 2x_3$ puis $u^2(x) = x_2 + 4x_3$.
On en déduit ; $x_3 = \dfrac{u(x) + u^2(x)}{6}$ puis $x_2 = \dfrac{u^2(x) - 2u(x)}{3}$ et enfin $x_1 = x + \dfrac{u(x)}{2} - \dfrac{u^2(x)}{2}$.
Les x_i sont donc déterminés de façon unique en fonction de x.

– *Synthèse* Réciproquement, soit $x \in E$. Posons :

$$x_1 = x + \frac{u(x)}{2} - \frac{u^2(x)}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{u^2(x) - 2u(x)}{3} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{u(x) + u^2(x)}{6}.$$

Alors on a bien :

– $x = x_1 + x_2 + x_3$;

– $x_1 \in E_1$: en effet, $u(x_1) = u(x) + \dfrac{u^2(x)}{2} - \dfrac{u^3(x)}{2} = u(x) + \dfrac{u^2(x)}{2} - \dfrac{(u^2 + 2u)(x)}{2} = 0$;

– on vérfie de la même façon que $x_2 \in E_2$ et $x_3 \in E_3$.

b) Avec les notation précédentes, on a vu que $u(x) =) - x_2 + 2x_3 = -p_2(x) + 2p_3(x)$; la relation proposée est donc vraie pour $n = 1$, avec $a_1 = 0$, $b_1 = -1$ et $c_1 = 2$.

Si elle est vérifiée au rang n, alors pour tout x, $u^n(x) = b_n x_2 + c_n x_3$ d'où $u^{n+1}(x) = b_n u(x_2) + c_n u(x_3) = -b_n x_2 + 2c_n x_3$, soit $u_{n+1} = b_{n+1} p_2 + c_{n+1} p_3$.
La relation est donc vérifiée au ra,g $n+1$, avec $a_{n+1} = 0$, $b_{n+1} = -b_n$ et $c_{n+1} = 2c_n$.

On en déduit par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $a_n = 0$, $b_n = (-1)^n$ et $c_n = 2^n$.

c) D'après les calculs du **a)**, on a $p_1 = \mathrm{Id}_E + \frac{1}{2}(u - u^2)$, $p_2 = \frac{1}{3}(u^2 - 2u)$ et $p_3 = \frac{1}{3}(u + u^2)$, et il suffit de remplacer les p_i par ces valeurs dans la relation trouvée en **b)**.

Exercice 15: ($\star$)

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant :

$$f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{Id}_E \text{ et } f_i \circ f_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

a) Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.

b) Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = E$.

✎ *Solution:*

a) $f_i = f_i \circ \mathrm{Id}_E = f_i \circ \sum\limits_{j=1}^{n} f_j = f_i \circ f_i$, donc f_i est une projection vectorielle.

b) Supposons $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0_E$ avec $x_i \in \mathrm{Im}\, f_i$. En appliquant f_i, on obtient $f_i(x_i) = x_i = 0_E$ car $f_i(x_j) = 0_E$ pour $j \neq i$.
Les espaces $\mathrm{Im}\, f_i$ sont donc en somme directe.

Exercice 16: ($\star\star\star$)

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.
Comparer $\mathrm{Im}(u \circ v)$ et $\mathrm{Im}\, u$ et en déduire $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

✎ *Solution:*

• $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\, u$ est bien connu.
• On en déduit : $2 = \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\, u \leqslant 2$ puisque u est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ d'où l'égalité des dimensions et par suite $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}\, u$.
• Puisque $\mathrm{rg}\, u = 2$, u est injective. L'égalité (projecteur) $(u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ v$ implique donc $u \circ (vuv - v) = 0$ d'où $\mathrm{Im}(vuv - v) \subset \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ donc $vuv = v$.
On sait que $2 = \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\, v$ (théorème 15 cours) et aussi $\mathrm{rg}\, v \leqslant 2$ car v est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ donc finalement $\mathrm{rg}\, v = 2$ et v est surjective. La relation précédente $vuv = v$ s'écrit aussi $(vu - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}(vu - \mathrm{Id})$ donc $\mathrm{Ker}(vu - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17: (⋆⋆⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant n$.

Montrer que f et g sont des projecteurs.

✎ *Solution:*

On sait que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et puisque $\operatorname{Im}(f+g) = E$, on a $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. La formule de Grassmann implique alors $n \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$. On a donc $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

On a $g = \mathrm{Id} - f$; le théorème du rang pour g donne alors $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{Ker} g = n - \operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f$.
Or $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Im} f$ (vérification immédiate) ; puisqu'il y a égalité des dimensions, on en déduit $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.
On en déduit donc que $g \circ f = 0$, soit $(\mathrm{Id} - f) \circ f = 0$, soit encore $f \circ f = f$: f est donc un projecteur.
De même pour g.

Noyau - Image (ex. 18 à 29)

Exercice 18: (⋆)

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y - z, z - x, x - y)$.

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

✎ *Solution:*

a) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff x = y = z$. $\operatorname{Ker} f$ est donc la droite vectorielle de base $(1,1,1)$.

D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2 ; or (par exemple) les vecteurs $f(1,0,0) = (0,-1,1)$ et $f(0,1,0) = (1,0,-1)$ sont deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ linéairement indépendants, et ils en forment donc une base.

Autre solution : si l'on pose $(x', y', z') = f(x,y,z)$, on a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $x' + y' + z' = 0$ donc $\operatorname{Im} f$ est incluse dans le plan d'équation $X + Y + Z = 0$ et pour des raisons de dimension, est égale à ce plan.

b) $(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff (x,y,z,t) = (x, y, -2x - y, -x - y) = x(1,0,-2,-1) + y(0,1,-1,-1)$ donc $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les deux vecteurs $(1,0,-2,-1)$ et $(0,1,-1,-1)$; comme ces deux vecteurs ne sont pas liés, $\operatorname{Ker} f$ est un plan.

D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est un plan ; c'est (par exemple) celui engendré par les vecteurs $f(1,0,0,0)$ et $f(0,1,0,0)$ (car ils sont linéairement indépendants).

c) On montre que $\operatorname{Ker} f$ est la droite de base $1 - \mathrm{i}$ et que $\operatorname{Im} f$ est la droite de base $1 + \mathrm{i}$ (il peut être commode d'écrire la matrice de f dans la base $(1, \mathrm{i})$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$).

Exercice 19: (✍)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.

Montrer que $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(u+v)$.

Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 20: (⋆⋆)

Soit $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par :

$$\forall\, x \in [0;1],\ T(f)(x) = \int_0^x f\big(4(t - t^2)\big)\, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

c) T est-il surjectif ?

✎ *Solution:*

a)
- La définition de T a bien un sens (**à ne pas oublier!**) car pour tout $t \in [0;1]$, $4t(1-t) \in [0;1]$ et $t \mapsto f\big(4(t - t^2)\big)$ est continue sur $[0;1]$ donc l'intégrale existe.
- La linéarité de T est immédiate par linéarité de l'intégration.

– T est bien à valeurs dans E car $T(f)$ est une primitive de $t \mapsto f\big(4(t-t^2)\big)$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$ donc est continue c'est-à-dire appartient à E..

b) Si $T(f)=0$ alors en dérivant on a :

$$\forall x \in [0;1],\ f\big(4(x-x^2)\big)=0$$

et puisque $x \mapsto 4x(1-x)$ est surjective de $[0;1]$ dans $[0;1]$ on a $f(y)=0$ pour tout $y \in [0;1]$ soit $f=0$. Ainsi $\operatorname{Ker} T=\{0\}$: T est injective.

c) Mais T n'est pas surjective puisque on a vu que $\operatorname{Im} T \subset \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 21: (✍)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, qui commutent ($u \circ v = v \circ u$).
Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

✎ *Solution:*

• Si $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y=u(x)$ d'où $v(y)=v\circ u(x)=u\circ v(x)$ appartient à $\operatorname{Im} u$: $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

• Si $x \in \operatorname{Ker} u$ alors $u(x)=0$ donc $u\circ v(x)=v\circ u(x)=v(0)=0$ d'où $v(x)\in \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} u$ est bien stable par v.

Exercice 22: (⋆⋆)

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f\circ g\circ f=f$ et $g\circ f\circ g=g$.

a) Montrer que $E=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g=\operatorname{Ker} g\oplus \operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $f(\operatorname{Im} g)=\operatorname{Im} f$.

✎ *Solution:*

a) – *1ère solution : analyse-synthèse.*

- **Analyse**. Soit $x\in E$. On suppose qu'il existe une décomposition $x=y+z$ avec $y\in\operatorname{Ker} g$ et $z\in \operatorname{Im} g$. Alors il existe $t\in E$ tel que $z=g(t)$. Mais alors $f(x)=f(z)=f\circ g(t)$, donc $g\circ f(x)=g\circ f\circ g(t)=g(t)=z$, donc $y=x-g\circ f(t)$.
- **Synthèse**. Soit $x\in E$. On pose $y=x-g\circ f(x)$ et $z=g\circ f(x)$. Alors $x=y+z$, $z\in\operatorname{Im} g$ et $y\in\operatorname{Ker} f$

  Cela montre que la décomposition existe (synthèse), *et qu'elle est unique* (analyse) ; donc $E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} g$.

– *2ème solution :* Les hypothèses impliquent $(g\circ f)^2=g\circ f$. Donc $g\circ f$ est un projecteur, et, en s'inspirant du cours, on peut décomposer tout $x\in E$ comme : $x=\underbrace{x-g\circ f(x)}_{\in\operatorname{Ker} f}+\underbrace{g\circ f(x)}_{\in\operatorname{Im} g}$, ce qui montre $E=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} g$.
On montre ensuite facilement que $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} g=\{0\}$: Soit $x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} g$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=g(y)$ et de plus $f(x)=f\circ g(y)=0$. On compose par f : $0=g\circ f\circ g(y)=g(y)=x$.

b) On a évidemment $f(\operatorname{Im} g)\subset\operatorname{Im} f$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque :
Si $y\in\operatorname{Im} f$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)=f\circ g\circ f(x)$, et $g\circ f(x)\in\operatorname{Im} g$ donc $y\in f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 23: (⋆⋆⋆)

Soient E,F,G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $u\in\mathscr{L}(E,G)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$.
Démontrer : $\big[\exists w\in\mathscr{L}(E,F) \text{ tq } u=v\circ w\big] \iff \big[\operatorname{Im} u\subset\operatorname{Im} v\big]$.

2. Soient $u\in\mathscr{L}(E,G)$ et $w\in\mathscr{L}(E,F)$.
Démontrer : $\big[\exists v\in\mathscr{L}(F,G) \text{ tq } u=v\circ w\big] \iff \big[\operatorname{Ker} w\subset\operatorname{Ker} u\big]$.

(*Indication : penser à utiliser le théorème d'isomorphisme*).

✎ *Solution:*

1. • $\Longrightarrow$ est facile (cf. cours).

• $\Longleftarrow$: Supposons $\operatorname{Im} u\subset\operatorname{Im} v$. On sait que la restriction $\tilde v$ de v à tout supplémentaire S de $\operatorname{Ker} v$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} v$. Pour tout $x\in E$, on posera $w(x)=\tilde v^{-1}[u(x)]$ ce qui a bien un sens puisque $u(x)\in\operatorname{Im} u$ donc $u(x)\in\operatorname{Im} v$ On a bien alors $v\circ w=u$ puisque $v\circ\tilde v^{-1}=\tilde v\circ\tilde v^{-1}=\mathrm{Id}_{\operatorname{Im} v}$.

2. • $\Longrightarrow$ est facile (cf. cours).

• $\Longleftarrow$: Supposons $\operatorname{Ker} w \subset \operatorname{Ker} u$. Soit F_1 un supplémentaire dans F de $\operatorname{Im} w$, et E_1 un supplémentaire dans E de $\operatorname{Ker} w$. On sait que la restriction $\tilde{w}$ de w à E_1 est un isomorphisme de E_1 sur $\operatorname{Im} w$. On peut alors définir une application linéaire v de F dans G par :

$$\begin{cases} v(x) = 0 & \text{si } x \in F_1 \\ v(x) = u[\tilde{w}^{-1}(x)] & \text{si } x \in \operatorname{Im} w \end{cases}$$

– Si $x \in Kerw$, on a aussi $x \in \operatorname{Ker} w$ donc $u(x) = v \circ w(x) = 0$.

– Si $x \in E_1$, on a $v \circ w(x) = u[\tilde{w}^{-1}(w(x))] = u(x)$

Ainsi, u et $v \circ w$ coïncident sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, donc sont égaux.

Exercice 24: ($\star$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
Montrer que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.

✎ *Solution:*

– Montrons que la somme est directe : soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. Alors $u(x) = 0$ et il existe $y \in F$ tel que $x = v(y)$. Alors $0 = u(x) = u \circ v(y) = y$ d'où $y = 0$ puis $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$.

– Tout vecteur x de E peut s'écrire $x = v \circ u(x) + (x - v \circ u(x))$.
On a $v \circ u(x) \in \operatorname{Im} v$ et $u(x - v \circ u(x)) = u(x) - u \circ v \circ u(x) = u(x) - u(x) = 0$, donc $x - v \circ u(x) \in \operatorname{Ker} u$.
On a donc $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} v$.

Exercice 25: ($\star$)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

(ii) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$;

(iii) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Contre-exemple si E n'est pas de dimension finie ?

✎ *Solution:*

1. • On a toujours les inclusions :

$$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \text{ et } \operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u .$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker} u^2 + \dim \operatorname{Im} u^2 = \dim E ,$$

donc l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ implique $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} u^2$ puis $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ compte tenu de l'inclusion rappelée ci-dessus.
On démontre de la même façon que, si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.
Ainsi, $(i) \Longleftrightarrow (ii)$.

• Démontrons $(i) \Longrightarrow (iii)$.
Supposons $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, et montrons $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
Soit donc $x \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$; on a :

$$u(x) = 0 \text{ et } \exists y \in E,\ x = u(y) .$$

On aura alors $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $y \in \operatorname{Ker} u^2$; il en résulte $y \in \operatorname{Ker} u$ d'où $x = u(y) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
La somme $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$ est donc directe, et, compte tenu du théorème du rang, on a bien $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

• Montrons enfin $(iii) \Longrightarrow (i)$.
Supposons $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ supplémentaires. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$; alors

$$u^2(x) = u[u(x)] = 0 ,$$

donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ d'où $u(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} u$. Cela prouve que $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$, d'où l'égalité compte tenu de l'inclusion déjà rappelée.

2. Si on ne suppose plus E de dimension finie, montrons que toutes les implications sauf deux tombent en défaut.

• On n'a plus forcément $(i) \Longrightarrow (ii)$, comme le montre l'exemple de l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right.$;

cette application est injective, donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = \{0\}$ mais $\operatorname{Im} u$ est le sous-espace vectoriel des polynômes divisibles par X et $\operatorname{Im} u^2$ celui formé des polynômes divisibles par X^2.

Le même exemple montre que l'on n'a pas non plus $(i) \Longrightarrow (iii)$.

• On n'a plus forcément $(ii) \Longrightarrow (i)$, comme le montre l'exemple de l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$;

cette application est surjective donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2 = \mathbb{R}[X]$, mais $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}_0[X]$ et $\operatorname{Ker} u^2 = \mathbb{R}_1[X]$.

Le même exemple montre que l'on n'a pas non plus $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

• L'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$ reste vraie, la démonstration que nous avons faite ne faisant pas intervenir la dimension.

• Enfin, montrons que l'implication $(iii) \Longrightarrow (ii)$ reste vraie.

Supposons $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ supplémentaires. Soit $y \in \operatorname{Im} u$; il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. D'après (iii), il existe $(x_K, x_I) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$ tel que $x = x_K + x_I$. On aura alors :

$$y = \underbrace{u(x_K)}_{=0} + u(x_I) = u(x_I)$$

et puisque $x_I \in \operatorname{Im} u$ on en déduit $y \in \operatorname{Im} u^2$.

On a donc l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$, d'où l'égalité compte tenu de l'inclusion déjà rappelée.

Exercice 26: ($\star\star$)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.
Montrer que : $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$.

✎ *Solution:*

• Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
On a $f(x) = x$ et on peut écrire $x = (f - \mathrm{Id}_E)(a) = f(a) - a$. On a alors :

$$f(x) = f^2(a) - f(a),\ f^2(x) = f^3(a) - f^2(a) = a - f^2(a) \text{ puis } x + f(x) + f^2(x) = 0.$$

Or $x + f(x) + f^2(x) = 3x$ donc $x = 0$. La somme $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$ est donc directe.

• Soit $x \in E$. On cherche à décomposer x comme somme de deux vecteurs des sous-espaces vectoriels précédents.

– *Analyse :* Supposons $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $v \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$.
On a $f(u) = u$ et il existe $a \in E$ tel que $v = f(a) - a$. Ainsi $x = u + f(a) - a$, $f(x) = u + f^2(a) - f(a)$, $f^2(x) = u + a - f^2(a)$.
Donc $u = \dfrac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$.

– *Synthèse :* Posons $u = \dfrac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$ et $v = x - u$.
On a $f(u) = u$ car $f^3(x) = x$ et

$$v = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f^2(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f^2(x) + \frac{1}{3}f^3(x)$$

donc

$$v = (f - \mathrm{Id})\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}f^2(x)\right) \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}).$$

Cela prouve que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$ puis le résultat voulu.

Remarques

– Si E avait été de dimension finie, la deuxième partie de la démonstaration ci-dessus était inutile, en utilisant le théorème du rang.
– La première partie de la démonstration (somme directe) est en fait inutile puisque la démonstration par analyse-synthèse prouve directement l'unicité de la décomposition.

Exercice 27: ($\star\star\star$)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Montrer que $E = E_1 \oplus E_{\mathrm{j}} \oplus E_{\mathrm{j}^2}$.

✎ *Solution:*

Soit u un vecteur de E.
On doit montrer que u s'écrit de façon unique sous la forme : $u = u_1 + u_{\mathrm{j}} + u_{\mathrm{j}^2}$, avec $u_1 \in E_1, u_{\mathrm{j}} \in E_{\mathrm{j}}, u_{\mathrm{j}^2} \in E_{\mathrm{j}^2}$.

- *Analyse*
Supposons que cette décomposition existe. Alors $f(u_1) = u_1$, $f(u_{\mathrm{j}}) = \mathrm{j}u_{\mathrm{j}}$ et $f(u_{\mathrm{j}^2}) = \mathrm{j}^2 u_{\mathrm{j}^2}$.
En appliquant f et f^2 à l'égalité $u = u_1 + u_{\mathrm{j}} + u_{\mathrm{j}^2}$, on trouve : $\begin{cases} u = u_1 + u_{\mathrm{j}} + u_{\mathrm{j}^2} \\ f(u) = u_1 + \mathrm{j}u_{\mathrm{j}} + \mathrm{j}^2 u_{\mathrm{j}^2} \\ f^2(u) = u_1 + \mathrm{j}^2 u_{\mathrm{j}} + \mathrm{j}u_{\mathrm{j}^2} \end{cases}$
et on en déduit, par combinaisons linéaires de ces équations : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}(u + f(u) + f^2(u)) \\ u_{\mathrm{j}} = \frac{1}{3}(u + \mathrm{j}^2 f(u) + \mathrm{j}f^2(u)) \\ u_{\mathrm{j}^2} = \frac{1}{3}(u + \mathrm{j}f(u) + \mathrm{j}^2 f^2(u)) \end{cases}$
On a ainsi prouvé l'unicité des vecteurs u_1, u_j, u_{j^2} s'ils existent.
- *Synthèse*
Réciproquement, considérons les trois vecteurs $u_1, u_{\mathrm{j}}, u_{\mathrm{j}^2}$ définis par les égalités précédentes.
On a bien sûr $u_1 + u_{\mathrm{j}} + u_{\mathrm{j}^2} = u$.
D'autre part, compte tenu de $f^3 = \mathrm{Id}$, on trouve :
  - $f(u_1) = \dfrac{1}{3}(f(u) + f^2(u) + f^3(u)) = \dfrac{1}{3}(f(u) + f^2(u) + u) = u_1$, donc $u_1 \in E_1$;
  - $f(u_{\mathrm{j}}) = \dfrac{1}{3}(f(u) + \mathrm{j}^2 f^2(u) + \mathrm{j}u) = \dfrac{\mathrm{j}}{3}(\mathrm{j}^2 f(u) + \mathrm{j}f^2(u) + u) = \mathrm{j}u_{\mathrm{j}}$, donc $u_{\mathrm{j}} \in E_{\mathrm{j}}$;
  - $f(u_{\mathrm{j}^2}) = \dfrac{1}{3}(f(u) + \mathrm{j}f^2(u) + \mathrm{j}^2 u) = \dfrac{\mathrm{j}^2}{3}(\mathrm{j}f(u) + \mathrm{j}^2 f^2(u) + u) = \mathrm{j}^2 u_{\mathrm{j}^2}$, donc $u_{\mathrm{j}^2} \in E_{\mathrm{j}^2}$.

  On a ainsi établit l'existence des vecteurs $u_1, u_{\mathrm{j}}, u_{\mathrm{j}^2}$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 28: (⋆⋆)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim F + \dim G = n$;

(ii) il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$.

✎ *Solution:*

- $(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiat par le th. du rang.
- Réciproquement soient F et G tels que $\dim F + \dim G = n$.

On a vu dans la démo de la formule de Grassmann que, si l'on note G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G alors $F + G = F \oplus G'$. Et si l'on note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F on aura $F + G = F' \oplus F \cap G \oplus G'$.
Soit enfin H un supplémentaire de $F + G$ dans E : $E = F' \oplus F \cap G \oplus G' \oplus H$.
On a alors $n = \dim F + \dim G' + \dim H = \dim F + (\dim G - \dim(F \cap G)) + \dim H = n - \dim(F \cap G) + \dim H$ donc $\dim H = \dim(F \cap G)$.
Il est donc possible de trouver une application linéaire u telle que :

$$u(H) = F \cap G \quad , \quad u(F \cap G) = \{0\} \quad , \quad u(G') = \{0\} \quad \text{et} \quad u(F') = F'$$

(rappelons qu'une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires).
On vérifie facilement que u convient.

Exercice 29: noyaux et images itérés ($\star\star$)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \mathrm{Im} f^p$ et $N_p = \mathrm{Ker}\, f^p$.

a) Montrer que la suite $(I_p)_{p \geqslant 0}$ est décroissante (pour l'inclusion) et que la suite $(N_p)_{p \geqslant 0}$ est croissante.

b) Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.

c) Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés. Montrer que :

$$\forall s \geqslant r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r \,.$$

d) Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.
En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit, par blocs : $A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, où A' est une matrice carrée inversible et N une matrice carrée nilpotente.

Solution:

a)
- Soit $y \in \mathrm{Im}\, f^{p+1}$; $\exists x \in E$, $y = f^{p+1}(x = f^p(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\, f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^p$; on a $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(0) = 0$ d'où $x \in \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$. Ainsi, $N_p \subset N_{p+1}$.

b) La suite $\left(\dim I_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers naturels; elle ne peut don être strictement décroissante, c'est-à-dire qu'il il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dim I_s = \dim I_{s+1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $I_s = I_{s+1}$.
De plus, par le théorème du rang :

$$\dim N_s = \dim E - \dim I_s = \dim E - \dim I_{s+1} = \dim N_{s+1}.$$

Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $N_s = N_{s+1}$.

c) Montrons par récurrence sur $s \geqslant r$ que $I_s = I_r$.
- La propriété est vraie au rang r.
- Supposons la propriété vraie au rang s.
  On sait déjà que $I_{s+1} \subset I_s$. Pour tout $y \in I_s$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^s(x) = f^{s-r}(f^r(x))$.
  Or $f^r(x) \in I_r = I_{r+1}$ donc il existe $u \in E$ tel que $f^r(x) = f^{r+1}u()$ d'où $y = f^{s+1}(u) \in I_{s+1}$.
  Ainsi $I_{s+1} = I_s$ puis, par hypothèse de récurrence : $I_{s+1} = I_r$.

Par le théorème du rang : $\dim N_r + \dim I_r = \dim E = \dim N_s + \dim I_s$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\forall s \geqslant r, N_s = N_r$.

d)
- Soit $x \in I_r \cap N_r$. Il existe $u \in E$ tel que $x = f^r(u)$ et on a $f^r(x) = 0$.
  Par suite, $f^{2r}(u) = 0$ c'est-à-dire $u \in N_{2r}$. Or $N_{2r} = N_r$ car $2r \geqslant r$ donc $x = f^r(u) = 0$. Ainsi, $I_r \cap N_r = \{0\}$.
  De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E.
- On peut alors considérer une base $\mathscr{B}$ de E formée de la réunion d'une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}\, f^r$ et d'une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\, f^r$. Ces sous-espaces vectoriels étant stables par f (car, par exemple, f et f^r commutent, voir un précédent exercice), la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs : $A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, où A' est la matrice dans $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme f_1 induit par f sur I_r et N la matrice dans $\mathscr{B}_2$ de l'endomorphisme f_2 induit par f sur N_r.
  Puisque $f_2^r = 0$, on a $N^r = 0$: N est nilpotente.
  Puisque $f_1(I_r) = I_{r+1} = I_r$, f_1 est surjective, donc bijective, et A' est inversible.

Rang (ex. 30 à 34)

Exercice 30: ($\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \frac{n}{2}$.

Solution:

$f^3 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$. Or $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ donc $\dim \mathrm{Im}\, f^2 \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f^2$ puis le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}\, f^2 + \dim \mathrm{Ker}\, f^2 = n$ puis le résultat.

Exercice 31: (⋆⋆)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.
Montrer que $n = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

✎ *Solution:*

- Une remarque utile : on a toujours $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(u+v)$, il existe x tel que $y = (u+v)(x)$ d'où $y = u(x) + v(x) \in \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$.
- Ici, $u + v$ est inversible donc $\mathrm{Im}(u+v) = E$ donc $E \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$ ce qui implique $E = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$. Donc $n = \dim E = \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v - \dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v)$ d'après la formule de Grassmann, d'où $n \leqslant \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v$.
- Enfin, $u \circ v = 0$ implique $\mathrm{Im}\,v \subset \mathrm{Ker}\,u$ donc $\mathrm{rg}\,v \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u)$ soit $\mathrm{rg}\,v \leqslant n - \mathrm{rg}\,u$ ce qui donne l'autre inégalité $\mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v \leqslant n$.

Exercice 32: (⋆⋆⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \{0\} \\ \qquad\text{et} \\ E = \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v. \end{cases}$$

✎ *Solution:*

- Supposons $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v$.
  On a toujours l'inclusion (bien connue !) : $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$.
  Donc $\mathrm{rg}(u+v) = \dim \mathrm{Im}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v) = \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v - \dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v)$ en utilisant la formule de Grassmann.
  L'hypothèse implique donc, en particulier, $\dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v) = 0$ donc $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \{0\}$.
  D'après la formule de Grassmann et le théorème du rang :
  $$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v) &= \dim \mathrm{Ker}\,u + \dim \mathrm{Ker}\,v - \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) = 2n - \mathrm{rg}\,u - \mathrm{rg}\,v - \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) \\ &= 2n - \mathrm{rg}(u+v) - \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) = n + \dim \mathrm{Ker}(u+v) - \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v).\end{aligned}$$
  Or il est clair que $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(u+v) - \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) \geqslant 0$ d'où l'on tire $\dim(\mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v) \geqslant n = \dim E$. Il en résulte $\mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v = E$.
- Supposons maintenant $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \{0\}$ et $E = \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v$.
  Montrons que $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$:
  - on a déjà $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$;
  - soit $x \in \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$: il existe $y, z \in E$ tels que $x = u(y) + v(z)$; puisque $E = \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{Ker}\,v$ on peut écrire $y = y_1 + y_2$ et $z = z_1 + z_2$ avec $y_1, z_1 \in \mathrm{Ker}\,u$ et $y_2, z_2 \in \mathrm{Ker}\,v$.
    On aura alors $x = u(y_2) + v(z_1) = (u+v)(y_2 + z_1)$ d'où $x \in \mathrm{Im}(u+v)$ ce qui prouve l'inclusion réciproque.

  Finalement $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = \mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Im}\,v$ car $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \{0\}$. On en déduit l'égalité demandée.

Exercice 33: (⋆)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.
Montrer que : $\left|\mathrm{rg}\,u - \mathrm{rg}\,v\right| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \min(\dim E,\ \dim F,\ \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v)$.

✎ *Solution:*

- Le rang d'une application linéaire est toujours inférieurs aux dimensions des espaces de départ et d'arrivée (cours) donc $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
- On a facilement l'inclusion $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v$ donc

$$\mathrm{rg}(u+v) = \dim \mathrm{Im}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v) = \dim \mathrm{Im}\,u + \dim \mathrm{Im}\,v - \dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v) \leqslant \mathrm{rg}\,u + \mathrm{rg}\,v$$

d'après Grassmann.

- En utilisant l'inégalité précédente :

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v-v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$$

et puisque $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg} v$, on en déduit $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.
En échangeant les rôles de u et v, on a aussi : $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leqslant \operatorname{rg}(v-u) = \operatorname{rg}(u-v)$, et en rassemblant les deux résultats précédents on obtient :

$$\left|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v\right| \leqslant \operatorname{rg}(u+v).$$

Exercice 34: ($\star\star$)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Établir :

a) $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v) = \operatorname{rg} u - \operatorname{rg}(v \circ u)$.

b) $\dim(\operatorname{Ker}(v \circ u)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$.

c) $\operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

(*Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de* v *à* $\operatorname{Im} u$).

✎ *Solution:*

On applique le théorème du rang à la restriction de v à $\operatorname{Im} u$ ce qui donne

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im}(v|_{\operatorname{Im} u}) + \dim(\operatorname{Ker} v|_{\operatorname{Im} u}).$$

Mais $\operatorname{Im}(v|_{\operatorname{Im} u}) = \operatorname{Im}(v \circ u)$ et $\operatorname{Ker} v|_{\operatorname{Im} u} = \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u$ d'où l'égalité

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(v \circ u) - \dim(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u)$$

qui permet de démontrer aisément les inégalités proposées.

<u>Divers</u> (ex. 35 à 39)

Exercice 35: ($\star\star$)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une famille $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

a) Montrer que : $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} E_i)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(E_i)$.

b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

c) Montrer que : $f^{-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} F_j\right) \supset \sum\limits_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$.

Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

✎ *Solution:*

a) Il suffit d'écrire les définitions :

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;\middle|\; x_i \in E_i \text{ pour tout } i \right\}$$

donc, en utilisant la linéarité de f :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \;\middle|\; x_i \in E_i \text{ pour tout } i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \;\middle|\; y_i \in f(E_i) \text{ pour tout } i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(E_i). \end{aligned}$$

b) Supposons f injective et la somme des E_i directe.
Montrons que la somme des $f(E_i)$ est directe, en utilisant la caractérisation d'une somme directe vue en cours.
Supposons que l'on ait $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$ avec $y_i \in f(E_i)$ pour tout i. On a $y_i = f(x_i)$ avec $x_i \in E_i$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) = 0$,
et par linéarité, on obtient $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) =)0$.

f étant injective, on en tire $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et puisque la somme des E_i est directe, on en déduit que tous les x_i sont nuls, donc ensuite tous les y_i sont nuls, cqfd.

c) – Soit $x \in \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$: x s'écrit donc $x = \sum_{j=1}^{p} x_j$ avec $x_j \in f^{-1}(F_j)$ c'est-à-dire $f(x_j) \in F_j$ donc $f(x) = \sum_{j=1}^{p} f(x_j)$ appartient à $\sum_{j=1}^{p} F_j$ c'est-à-dire x appartient à $f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} F_j\right)$.
Cela prouve l'inclusion demandée.

– Si f est surjective, on a l'inclusion réciproque (laissé en exercice).

Exercice 36: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que f et g commutent (*on pourra commencer par démontrer que f est bijective*).

✎ *Solution:*

On a $f \circ (f+g) = \mathrm{Id}_E$ donc f est inversible à droite, et comme E est de dimension finie, f est inversible, d'inverse $f^{-1} = f + g$.
On a donc aussi $(f+g) \circ f = \mathrm{Id}_E$ d'où $\mathrm{Id}_E = f^2 + fg = f^2 + gf$ puis le résultat.

Exercice 37: endomorphismes nilpotents (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E.
Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

a) Soit $x \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $f^n = 0$.

c) Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $(u \circ v)^n = 0$.
Montrer que $(v \circ u)^n = 0$.

✎ *Solution:*

a) Si l'on a des scalaires λ_i tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1}(x) = 0,$$

alors en appliquant f^{p-1} à cette égalité, puisque $f^k = 0$ dès que $k \geqslant p$ on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$ et puisque $x \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$, on en tire $\lambda_0 = 0$.
Il reste alors : $\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1}(x) = 0$ puis en appliquant f^{p-2} on en tire $\lambda_1 = 0$ etc...
finalement tous les λ_i sont nuls, ce qui prouve que a famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) Puisqu'il s'agit d'une famille libre de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, on a $p \leqslant n$. Par suite $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$.
Le résultat est important : l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est inférieur à la dimension de l'espace.

c) On a $(v \circ u)^{n+1} = v \circ (u \circ v)^n \circ u = 0$, donc $v \circ u$ est nilpotent et on applique le résultat précédent.

Exercice 38: (⋆⋆⋆)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si :

$$u \text{ est injective , } v \text{ est surjective et } \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v = F.$$

✎ *Solution:*

- Supposons que w est un isomorphisme.
  – Puisque l'application $w = v \circ u$ est injective, l'application u est injective.
  – Puisque l'application $w = v \circ u$ est surjective, l'application v est surjective.
  – Soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et on a $v(y) = 0$ donc $w(x) = 0$. Or $\operatorname{Ker} w = \{0\}$ donc $x = 0_E$ puis $y = 0_F$. Ainsi :
  $$\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}.$$

– Soit $y \in F$ Alors $v(y) \in G$ et donc il existe $x \in E$ tel que $w(x) = v(y)$.
Posons alors $a = u(x)$ et $b = y - a$. On a immédiatement $y = a + b$ et $a \in \operatorname{Im} u$. De plus $v(b) = v(y) - v(a) = v(y) - w(x) = 0$ donc $b \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi :

$$\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} v = F$$

- Inversement, supposons u injective, v surjective et $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v$ supplémentaires dans F.
  – Soit $x \in \operatorname{Ker} w$. On a $v(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$. Or $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(x) = 0_F$ car $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_F\}$. Puisque u est injective, $x = 0_E$ et ainsi $\operatorname{Ker} w = \{0_E\}$: w est injective.
  – Soit $z \in G$. Il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$ car v est surjective. On peut écrire $y = u(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \operatorname{Ker} v$ car $\operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} v = F$. On a alors $z = v(u(a)) = w(a)$ et donc $\operatorname{Im} w = G$: w est surjective.

Finalement w est un isomorphisme.

Exercice 39: centre de $\mathscr{L}(E)$ (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée.

i) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x.x$.

ii) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$ (*on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.*)

iii) Conclure que u est une homothétie vectorielle.

b) En déduire le *centre* de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $\forall\, u \in \mathscr{L}(E), u \circ v = v \circ u$.

✎ *Solution:*

a) Lorsque $x \neq 0$, le fait que la famille $\{x, u(x)\}$ est liée se traduit par :

$$\text{il existe } \lambda_x \in \mathbb{K} \text{ tq } u(x) = \lambda_x.x\,.$$

Pour démontrer que u est une homothétie, il suffit donc de montrer que λ_x ne dépend pas de x.
Soient donc x et y non nuls. Deux cas sont possibles :

– Si le système x, y est lié : il existe α tel que $y = \alpha x$ et on a alors :

$$\lambda_y y = u(y) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$$

d'où $\lambda_x = \lambda_y$.

– sinon, on a aussi $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ d'où $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y)$, ce qui donne, la famille $\{x, y\}$ étant libre, $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

On a donc bien montré l'existence d'un scalaire λ tel que, pour tout $x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$, et cette égalité reste évidemment vraie pour $x = 0$. u est donc une homothétie.

b) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec tous les endomorphismes de E, et soit $x \neq 0$ dans E. Soit H un hyperplan supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$, et s la symétrie par rapport à $\mathbb{K}.x$ parallèlement à H.
Par hypothèse, $u \circ s = s \circ u$ donc $u \circ s(x) = s \circ u(x)$ soit $u(x) = s[u(x)]$. Le vecteur $u(x)$ est donc invariant par s ; d'après les propriétés des symétries, on en déduit qu'il appartient à $\mathbb{K}.x$, c'est-à-dire que $\{x, u(x)\}$ est lié. Il suffit alors d'appliquer les résultats de la première question : u est une homothétie.

Réciproquement il est clair que toute homothétie commute avec tous les endomorphismes. Donc le centre de $\mathscr{L}(E)$ est formé des homothéties.

Polynômes d'interpolation de Lagrange (ex. 40 à 44)

Exercice 40: ($\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts. On considère les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!], \quad L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i} \right).$$

Déterminer le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j^k L_j$ lorsque $k \in [\![0\,;n]\!]$, puis pour $k = n+1$.

Solution:

Le polynôme cherché vaut X^k, car ils sont tous deux de degrés $\leqslant n$ et coïncident en $n+1$ points distincts, les a_i.

Pour $k = n+1$, le polynôme $X^{n+1} - \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ est de degré $\leqslant n$ et coïncide avec $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j^k L_j$ en $n+1$ points distincts, les a_i, donc ils sont égaux.

Exercice 41: ($\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Solution:

C'est évidemment $\sum P(a_j) L_j$.

Exercice 42: ($\star\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, et F le sous-ensemble formé des applications f telles que : $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer un supplémentaire.

Solution:

Soient $a_0, \dots, a_n$ $(n+1)$ scalaires distincts deux à deux, et F le sous-ensemble de E formé des applications f telles que $f(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$. Alors :

- F est un sous-espace vectoriel de E : il est en effet facile d'utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel, ou bien on peut remarquer que F est l'intersection de $n+1$ hyperplans de E.
- $E = F \oplus \mathbb{K}_n[x]$, où $\mathbb{K}_n[x]$ désigne le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$. En effet :
  - $F \cap \mathbb{K}_n[x] = \{0\}$ car si un polynôme de degré $\leqslant n$ s'annule pour $n+1$ valeurs distinctes, c'est le polynôme nul.
  - Soit $f \in E$, et P l'unique polynôme de degré $\leqslant n$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ (cf. polynômes d'interpolation de Lagrange). On a alors $f = (f - P) + P$ avec $f - P \in F$, ce qui prouve que $E = F + \mathbb{K}_n[x]$.

Exercice 43: ($\star$)

On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \dots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \dots, y_n, y_n'$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ H(x_k) = y_k \ \text{ et } \ H'(x_k) = y_k'$$

(*c'est le polynôme d'interpolation de Hermite*).

Solution:

L'application
$$\Phi\colon P \in \mathbb{C}_{2n+1}[X] \mapsto (P(x_0),\dots,P(x_n),P'(x_0),\dots,P'(x_n)) \in \mathbb{C}^{2n+2}$$
est linéaire et injective car si $\Phi(P) = (0,\dots,0)$ alors pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, le nombre x_k est racine au moins double de P et comme $x_0,\dots,x_n$ sont distincts, le polynôme $Q = \prod_{k=0}^{n}(X-x_k)^2$ divise P. Or $\deg Q = 2n+2 > \deg P$ donc $P = 0$. Comme $\dim \mathbb{C}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{C}^{2n+2}$, l'application est Φ un isomorphisme, d'où le résultat.

Exercice 44: (⋆⋆⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et r un réel > 0 fixé.
Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(k) = r^k$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, puis calculer $P(n+1)$ (*Indication : utiliser un résultat de l'exercice* 2).

✎ *Solution:*

Existence et l'unicité de P : cf. interpolation de Lagrange!
Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(X+1)-P(X)$. Puisque $\deg(P(X+1)-P(X)) < \deg(P)$, on a, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\Delta^n(P) = 0$.
D'autre part, si T est l'endomorphisme qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$, on a $\Delta = T - Id$.
La formule du binôme donne alors $\Delta^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}T^k$. On aura donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}T^k(P) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$, d'où $P(X+n) = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$.
Pour le polynôme de l'énoncé, avec $X=1$ on obtient :
$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}r^{k+1} = r\left(r^n - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}r^{k+1}\right) = r\left(r^n - (r-1)^n\right).$$

Formes linéaires (ex. 45 à 48)

Exercice 45: (⋆)

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (pas nécessairement de dimension finie!).
Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer que $F = H$ ou $F = E$.

✎ *Solution:*

Si $F \neq H$ il existe $a \in F$ tel que $a \notin H$. D'après le cours $E = H \oplus \mathbb{K}a$ donc F contient E.

Exercice 46: (⋆)

Montrer que les formes linéaires $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ définies sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$\varphi_1(x,y,z) = 2x - y + 2z\ ,\ \varphi_2(x,y,z) = 3x - 5y + z\ ,\ \varphi_3(x,y,z) = 4x - 7y + z$$
forment une base de $(\mathbb{R}^3)^\star$.

✎ *Solution:*

On sait d'après le cours que $\dim(\mathbb{R}^3)^\star = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc il suffit de montrer que la famille $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est libre.
Or si l'on a $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\varphi_i = 0_{(\mathbb{R}^3)^\star}$ alors, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on aura
$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\varphi_i(x,y,z) = \lambda_1(2x-y+2z) + \lambda_2(3x-5y+z) + \lambda_3(4x-7y+z) = 0$$
et en appliquant cette égalité successivement aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on obtient un système linéaire homogène qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercice 47: (⋆⋆)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^\star, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0 \ .$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

✎ *Solution:*

Par l'absurde : si $\mathscr{B}$ n'est pas une base de E alors $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \neq E$ et l'on peut donc trouver un hyperplan H tel que $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \subset H$ puis une forme linéaire φ non nulle de noyau H.

On aura alors $\varphi(e_i) = 0$ pour tout i avec $\varphi \neq 0$ d'où contradiction.

Exercice 48: (⋆⋆)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E.

On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = 0$.

Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans $E^\star$.

✎ *Solution:*

Par l'absurde : si la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ était libre, ce serait une base de $E^\star$ (car même nombre d'éléments que la dimension) donc toute forme linéaire serait combinaison linéaire des f_i.
Par suite toute forme linéaire s'annulerait en x ; or il est facile de construire une forme linéaire φ telle que $\varphi(x) = 1$ (le faire !), d'où la contradiction.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆