EXERCICES : DÉTERMINANTS

Calculs de déterminants (ex. 1 à 10)

Exercice 1: (**)

Calculer les déterminants des matrices suivantes (on les mettra sous forme factorisée si possible) :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

Réponses : a) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

b) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

c) $-3abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ (utiliser un produit de matrices)

Exercice 2: (*)

$$\text{Calculer le déterminant d'ordre } n : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4\dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 3: (*)

$$\text{Calculer le déterminant d'ordre } n+1 : \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4: (*)

$$\text{Calculer le déterminant d'ordre } n+1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 5: (*)

$$\text{Calculer le déterminant d'ordre } n : D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 6: déterminant de Zorro ()**

Calculer le déterminant de Zorro :

$$Z_4 = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}, \quad Z_5 = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}, \quad Z_n = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

(les termes non écrits valent 0).

Exercice 7: déterminant d'une matrice compagnon ()**

Calculer le déterminant d'ordre $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 8: Utilisation de la factorisation de polynômes (*)

1. En le considérant comme un polynôme en a , calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}$. Déterminer les cas d'annulation du déterminant suivant, puis le calculer, en fonction de x :

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-x \end{vmatrix}.$$

3. Même question avec :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 9: Généralisation de Vandermonde (*)**

- a) Les $F_k (1 \leq k \leq n-1)$ étant des polynômes normalisés de degrés respectifs k , calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1(x_1) & \dots & F_{n-1}(x_1) \\ 1 & F_1(x_2) & \dots & F_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_1(x_n) & \dots & F_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

- b) *Application 1* : calculer le déterminant :
- $$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix}$$

- c) *Application 2* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n$ n nombres entiers. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on ait : $a_{ij} = C_{x_j}^{i-1}$.

Calculer $\det A$, et en déduire que le nombre $\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)}$ est un nombre entier.

Exercice 10: Déterminant de Cauchy (*)**

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de scalaires vérifiant : $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, avec $a_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}$.

Calculer $\det A$ (retrancher la première ligne toutes les autres, puis la première colonne à toutes les autres).

En déduire le *déterminant de Hilbert*, c'est-à-dire celui de A avec $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$

Déterminants : questions diverses (ex. 11 à 15)**Exercice 11: (♣)**

- | Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 12: (*)**

- a) Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ complexes deux deux distincts. Montrer que la famille des polynômes $(X - a_0)^n, (X - a_1)^n, \dots, (X - a_n)^n$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (utiliser le déterminant de Vandermonde; une autre démonstration de ce résultat a été proposée dans la feuille n°1)
- b) Plus généralement, montrer que, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, avec $\deg P = n$, la famille des polynômes $P(X - a_i)$, $0 \leq i \leq n$, forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (on pourra utiliser la formule de Taylor).

Exercice 13: ()**

Soient $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que, si $p \neq n$, $\det AB = 0$ ou $\det BA = 0$.
2. Montrer que : $\det(I_n - AB) = \det(I_p - BA)$ (on pourra utiliser un produit par blocs judicieux).

Exercice 14: ()**

1. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre $2n$:

$$\begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix}.$$

2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B)\det(A - B).$$

3. Soient $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

(commencer par examiner le cas où D est inversible, en utilisant un produit par blocs).

Donner un contre-exemple si on ne suppose plus $CD = DC$.

Exercice 15: (*)**

Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente.

Montrer que $\det(A + B) = \det A$ (on pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$, puis le cas où A est inversible).