EXERCICES : CALCUL MATRICIEL, AVEC CORRIGÉS

Ensembles de matrices remarquables (ex. 1 à 8)

Exercice 1: ($\star$)

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant J et stable par multiplication ; en préciser une base.

Solution:

On a $J^3 = I_3$ donc le sous-espace vectoriel cherché est $\mathrm{Vect}(I_3, J, J^2)$ (par double inclusion). La famille (I_3, J, J^2) étant libre, c'en est une base.

Exercice 2: ($\star$)

On considère dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

a) Comparer A^2, B^2, C^2 et I, puis AB, BA et C ; BC, CB et A ; CA, AC et B.

b) Montrer que (I, A, B, C) est un système libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On note $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre matrices.

c) Montrer que la multiplication est une loi interne non commutative dans $\mathbb{H}$.

d) Soit $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, qui à $M = xI + yA + zB + tC$ associe $\phi(M) = xI - yA - zB - tC$.
Montrer que ϕ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$. Est-ce un morphisme pour la loi $\times$?

e) Pour $M \in \mathbb{H}$, calculer $\phi(M)M$ et $M\phi(M)$. En déduire que toute matrice non nulle de $\mathbb{H}$ est inversible et préciser son inverse.
($\mathbb{H}$ s'appelle le *corps des quaternions)*).

Solution:

a) $A^2 = B^2 = C^2 = -I$.
$AB = -BA = C$, $BC = -CB = A$, $CA = -AC = B$.

b) $xI + yA + zB + tC = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$ est immédiat. On en déduit $\dim \mathbb{H} = 4$.

c) Il suffit de calculer, en utilisant les relations du **a)** :

$$(xI + yA + zB + tC)(x'I + y'A + z'B + t'C) = ...$$

d) ϕ linéaire est immédiat, et $\phi^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$ aussi.
On a en fait :

$$\forall\, M,\, M' \in \mathbb{H},\ \phi(MM') = \phi(M')\phi(M)$$

donc ϕ n'est pas un morphisme pour la loi $\times$, celle-ci n'étant pas commutative.

e) Si $M = xI + yA + zB + tC$ on trouve que

$$\phi(M)M = M\phi(M) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)I$$

donc si $M \neq 0$, M est inversible d'inverse $\frac{1}{x^2+y^2+z^2+t^2}\,\phi(M)$.

Exercice 3: ($\star$)

Notons $\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \quad\text{et}\quad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$ l'ensemble des matrices dites stochastiques.

Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.

✎ *Solution:*

Soient A et B deux matrices stochastiques et $C = AB$. Avec les notations habituelles :

$$\forall (i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

donc les coefficients de C sont positifs car ceux de A et de B le sont et :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} c_{ik} = \sum_{k,j} a_{ik} b_{kj} = \sum_{j} \underbrace{\left(\sum_{k} a_{ik}\right)}_{=1 \text{ car } A\in\mathcal{S}} b_{kj} = \sum_{j} b_{kj} \underbrace{=1}_{\text{car } B\in\mathcal{S}}$$

donc $C \in \mathcal{S}$.

Exercice 4: **($\star\star$)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1.
Puis on considère l'ensemble $F = \left\{ M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en préciser la dimension.

b) Calculer le produit de deux éléments de F à l'aide de J.

c) Calculer $M(a,b)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

d) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit inversible et préciser alors son inverse.

✎ *Solution:*

a) $M(a,b) = (a-b)I_n + bJ$ donc $F = \mathrm{Vect}(\{I_n, J\})$.

b) Puisque $J^2 = nJ$ (utiliser par exemple la formule du produit matriciel, ou un endomorphisme associé...) on a

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(a',b') &= \big((a-b)I_n + bJ\big)\big((a'-b')I_n + b'J\big) \\ &= (a-b)(a'-b')I_n + \big((a-b)b' + (a'-b')b + nbb'\big)J \\ &= (a-b)(a'-b')I_n + \big(ab' + a'b + (n-2)nbb'\big)J \end{aligned}$$

Cela montre en particulier que F est stable par multiplication.

c) On montre facilement que $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc, d'après la formule du binôme (puisque I_n et J commutent),

$$M(a,b)^p = (a-b)^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} b^k J^k = (a-b)^p I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} b^k n^{k-1} \right) J$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} b^k n^{k-1} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} b^k n^k \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} (bn)^k - (a-b)^p \right) = \frac{1}{n} \big((a+(n-1)b)^p - (a-b)^p \big) \end{aligned}$$

donc $M(a,b)^p = (a-b)^p I_n + \dfrac{1}{n}\big((a+(n-1)b)^p - (a-b)^p\big) J \quad (*)$.

Rem : il faut toujours penser à vérifier ses calculs ; ici on peut vérifier facilement que la formule $(*)$ est bien vraie pour $p = 0, 1$.)

d) Pour $A = (a-b)I_n + bJ$, on cherche s'il existe un inverse éventuel sous la forme $A' = a'I_n + b'J$. La relation $AA' = I_n$ conduit au système :

$$\begin{cases} (a-b)a' = 1 \\ a'b + (a-b)b' + nbb' = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution (a', b') si et seulement si $a - b \neq 0$ et $a + (n-1)b \neq 0$, et elle est donnée par $a' = \frac{1}{a-b}$ et $b' = \frac{-b}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)}$.

Ainsi, si $a-b\neq 0$ et $a+(n-1)b\neq 0$, la matrice A est inversible et a pour inverse la matrice A' ci-dessus ; réciproquement, si $a-b=0$, il est clair que A n'est pas inversible (2 colonnes identiques), et si $a+(n-1)b=0$ alors on a la relation $\sum_{i=1}^{n} C_i = 0$ sur les colonnes de A donc A n'est pas inversible.

La CNS cherchée est donc : $a-b\neq 0$ et $a+(n-1)b\neq 0$.

Exercice 5: ***Matrices centrosymétriques*** **($\star\star\star$)**

On dit qu'une matrice $A=\left(a_{i,j}\right)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est centro-symétrique si

$$\forall\,(i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2, a_{n+1-i,n+1-j}=a_{i,j}\,.$$

a) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices centro-symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Préciser sa dimension.

b) Montrer que le produit de deux matrices centro-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi centro-symétrique.

c) Soit A centro-symétrique et inversible.
En considérant l'application $X\mapsto AX$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$, montrer que A^{-1} est centro-symétrique.

✎ *Solution:*

a) • C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: les propriétés se vérifient trivialement.
• Si n est pair, alors la dimension est $n^2/2$.
En effet, toute matrice centrosymétrique s'écrit dans ce cas :

$$A=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}=\sum_{i=1}^{n/2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)+\underbrace{\sum_{i=n/2+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)}_{\text{chgt d'indices } i'=n+1-i,\ j'=n+1-j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n/2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{n/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\underbrace{a_{n+1-i,n+1-j}}_{=a_{ij}}E_{n+1-i,n+1-j}\right)=\sum_{i=1}^{n/2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(E_{ij}+E_{n+1-i,n+1-j}\right)\right).$$

Cela prouve que la famille formée des $n^2/2$ matrices $E_{ij}+E_{n+1-i,n+1-j}$ pour $1\leqslant i\leqslant n/2$ et $1\leqslant j\leqslant n$ engendre $\mathcal{C}$. Cette famille est trivialement libre car, en remontant les calculs précédents, si une combinaison linéaire de ces matrices est nulle, les coefficients sont forcément nuls. C'est donc une base de $\mathcal{C}$, d'où $\dim\mathcal{C}=n^2/2$.

• Si n est impair, on trouve par une méthode similaire que la dimension de $\mathcal{C}$ vaut $(n^2+1)/2$.

b) Soient A,B deux matrices centrosymétriques et $C=AB$. Avec les notations habituelles :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2,\ c_{n+1-i,n+1-j}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-i,k}b_{k,n+1-j}}_{\text{chgt d'indice } k'=n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-i,n+1-k}b_{n+1-k,n+1-j}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}\,,$$

donc C est encore centrosymétrique.

c) Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{C}&\longrightarrow&\mathcal{C}\\ X&\longmapsto&AX\end{array}\right.$. Cette définition a bien un sens car $A,X\in\mathcal{C}\Longrightarrow AX\in\mathcal{C}$.
Il est facile de vérifier que f est linéaire. De plus $\operatorname{Ker} f=\{0\}$ puisque A est inversible.
f étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective. En particulier, il existe une et une seule matrice $M\in\mathcal{C}$ telle que $AM=I_n$ (on a bien $I_n\in\mathcal{C}$). Ainsi, $M=A^{-1}$ appartient bien à $\mathcal{C}$.

Exercice 6: **($\star\star$)**

Soit $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.
Montrer que $(I_n,D,D^2,\ldots,D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.

✎ *Solution:*

On sait (cours) que $\mathbb{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n (une base en est la famille $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$). Il suffit donc de montrer que la famille $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est libre.

Supposons que l'on ait $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i D^i = 0$. En considérant les termes diagonaux, on obtient alors le système :

$$(S)\quad \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 d_1 + \ldots + \lambda_{n-1} d_1^{n-1} & = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 d_2 + \ldots + \lambda_{n-1} d_2^{n-1} & = 0 \\ \ldots & = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 d_n + \ldots + \lambda_{n-1} d_n^{n-1} & = 0 \end{cases}$$

Soit alors $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Le système (S) équivaut à dire que ce polynôme s'annule en $d_1, \dots, d_n$. Les d_i étant distincts, il possède donc n racines distinctes; étant de degré $\leqslant n-1$, il s'agit du polynôme nul, d'où $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ (on pouvait aussi remarquer que la matrice du système est une matrice de Vandermonde, inversible).

Exercice 7: (⋆⋆)

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que T commute avec sa transposée si et seulement si la matrice T est diagonale.

Indication : procéder par récurrence sur n, et utiliser un produit par blocs.

✎ *Solution:*

On fait comme dit l'énoncé !

- Le résultat est trivialement vrai pour $n = 1$.
- Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n-1$, et soit T une matrice triangulaire d'ordre n qui commute avec sa transposée.
  On peut écrire par blocs :

$$T = \begin{bmatrix} a & L \\ 0 & T' \end{bmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R},\ L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } T' \in \mathcal{T}_{n-1}^{+}(\mathbb{R}).$$

  Alors ${}^tT = \begin{bmatrix} a & 0 \\ {}^tL & {}^tT' \end{bmatrix}$ puis en faisant un produit par blocs :

$$T\,{}^tT = \begin{bmatrix} a^2 + L\,{}^tL & L\,{}^tT' \\ T'\,{}^tL & T'\,{}^tT' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tT\,T = \begin{bmatrix} a^2 & aL \\ a\,{}^tL & {}^tLL + {}^tT'T' \end{bmatrix}$$

  L'égalité ${}^tTT = T\,{}^tT$ implique en particulier : $L\,{}^tL = 0$. Mais si $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ldots & \ell_{n-1} \end{pmatrix}$ on a $L\,{}^tL = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \ell_i^2$ donc les ℓ_i étant *réels*, la relation $L\,{}^tL = 0$ implique $\ell_i = 0$ pour tout i soit $L = 0$.
  On en déduit ensuite $T'\,{}^tT' = {}^tT'T'$ donc d'après l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, T' est diagonale donc T aussi, ce qui démontre le résultat au rang n et achève la récurrence.

Exercice 8: (⋆⋆)

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

✎ *Solution:*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices symétriques.
Soient $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ avec $i < j$. La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,j} + E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire :

$$A(E_{i,j} + E_{j,i}) = (E_{i,j} + E_{j,i})A$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne : $a_{i,i} = a_{j,j}$.
La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,i}$ ce qui permet d'écrire :

$$AE_{i,i} = E_{i,i}A.$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne alors : $a_{i,j} = 0$.
On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathrm{K}$. La réciproque est immédiate.

Puissances et inverse d'une matrice (ex. 9 à 19)

Exercice 9: (✍)

Soit $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$. Calculer $(A+I_3)^3$; en déduire que A est inversible et préciser son inverse.

Solution:

On calcule simplement et on trouve $(A+I_3)^3=O_3$.
Ainsi $A^3+3A^2+3A+I_3=0$ donc $A(-A^2-3A-3I_3)=I_3$ ce qui prouve que A est inversible (a priori à droite, donc aussi à gauche) d'inverse :

$$A^{-1}=-A^2-3A-3I_3=\begin{pmatrix}-6&2&-3\\-7&2&-4\\3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 10: (⋆⋆)

Résoudre l'équation $X^2=A$ où $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&2\\0&0&16\end{pmatrix}$ (on remarquera que, si X est solution, alors A et X commutent).

Solution:

Si X est solution, alors A et X commutent puisqu'alors $XA=AX=X^3$. On cherche donc les $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ telles que $AX=XA$, puis parmi celles-ci, on cherche celles telles que $X^2=A$.

$$AX=XA\iff\left\{\begin{array}{lcl}g&=&0\\-3b+h&=&0\\-15c+i-a-2b&=&0\\3d+2g&=&0\\2h&=&0\\-12f+2i-d-2e&=&0\\15g&=&0\\12h&=&0\\-g-2h&=&0\end{array}\right.\iff X=\begin{pmatrix}-15c+i&0&c\\0&-6f+i&f\\0&0&i\end{pmatrix}.$$

L'équation $X^2=A$ équivaut alors à :

$$(-15c+i)^2=1\ ,\ (-15c+i)c+ci=1\ ,\ (-6f+i)^2=4\ ,\ (-6f+i)f+if=2\ \text{ et }\ i^2=16.$$

On résout patiemment et on trouve 8 solutions :

$$(c,f,i)\in\left\{(\tfrac13,1,4),(\tfrac13,\tfrac13,4),(\tfrac15,1,4),(\tfrac15,\tfrac13,4),(-\tfrac13,-1,-4),(-\tfrac13,-\tfrac13,-4),(-\tfrac15,-1,-4),(-\tfrac15,-\tfrac13,-4)\right\},$$

et il ne reste plus qu'à écrire les 8 matrices X correspondantes.
Rem : on verra plus tard une méthode plus rapide !

Exercice 11: (⋆⋆)

Soit $A=\begin{pmatrix}1&a&0&\dots&0\\0&1&a&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\dots&\ddots&a\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^p pour $p\in\mathbb{N}$, A^{-1} et A^p pour $p\in\mathbb{Z}$.

Solution:

On a $A=I_n+aN$ avec $N=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$.

N est la matrice, dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$, d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1)=0$ et $u(e_i)=e_{i-1}$ pour $i\geqslant 2$. On a alors $u^2(e_1)=u^2(e_2)=0$ et $u^2(e_i)=e_{i-2}$ pour $i\geqslant 3$.

Donc $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ etc...

On aura donc, d'après la formule du binôme : $A^p=\begin{pmatrix} 1 & \binom{p}{1}a & \binom{p}{2}a^2 & \dots & \dots & \binom{p}{n-1}a^{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{p}{1}a & \ddots & & \binom{p}{n-2}a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{p}{2}a^2 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{p}{1}a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cette formule étant vraie pour tout entier $p\in\mathbb{N}$ avec la convention $\binom{p}{k}=0$ si $k>p$.

On peut alors étendre la définition des coefficients binomiaux en posant, si $p<0$: $\binom{p}{k}=\dfrac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$ si $k\in\mathbb{N}$ et $\binom{p}{0}=1$, et, si $k<0$, $\binom{p}{k}=0$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$. On vérifie alors que la formule dite ≪du triangle de Pascal≫ : $\binom{p}{k}=\binom{p-1}{k}+\binom{p-1}{k-1}$ reste valable pour tout $(p,k)\in\mathbb{Z}^2$. Il en résulte que, en notant $M_p=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{p}{k}(aN)^k$, on a la relation : $M_p\times(I+aN)=M_{p+1}$; cela permet de montrer par récurrence (descendante) sur p que la relation $(I+aN)^p=M_p$ reste vraie pour tout entier $p<0$.

Exercice 12: ($\star$)

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dire pourquoi A est inversible et calculer A^{-1}.

✎ *Solution:*

Avec les mêmes notations que dans l'exercice précédent, on a $A=I_n+\sum_{k=1}^{n-1}N^k$. Puisque $N^n=0$, on en déduit (faire simplement le produit), $A^{-1}=I_n-N$.

Exercice 13: ($\star$)

Justifier que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

✎ *Solution:*

Il suffit de résoudre le système $AX=Y$, qui est un système triangulaire donc qui se résout ≪ de proche en proche ≫.

On trouve : $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14: ($\star\star$)

Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$, A^{-1} et A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Indication : Considérer A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.

✎ *Solution:*

Dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, A est la matrice de la famille $(1, X+1, (X+1)^2, \ldots, (X+1)^n)$.
C'est donc aussi la matrice dans la base canonique de l'automorphisme $u : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{cases}$.
A^p (pour tout $p \in \mathbb{Z}$) sera donc la matrice dans la base canonique de l'automorphisme $u^p : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+p) \end{cases}$,
donc aussi la matrice de la famille de vecteurs $(1, X+p, (X+p)^2, \ldots, (X+p)^n)$. Il suffit donc d'écrire cette matrice en développant chaque $(X+p)^k$ à l'aide de la formule du binôme.

Exercice 15: ($\star\star$)

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose :

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer le produit $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

✎ *Solution:*

$\forall (k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $(A\overline{A})_{k\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \overline{\omega}^{(m-1)(\ell-1)}$. Or $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ donc :

$$(A\overline{A})_{k\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(m-1)(k-\ell)} = \sum_{m=1}^{n} \left(\omega^{k-\ell}\right)^{m-1}.$$

On reconnaît là la somme des n prmiers termes d'une suite géométrique de raison $\omega^{k-\ell}$. Or $\omega^{k-\ell} = 1 \iff (k-\ell)$ multiple de n, ce qui n'est possible que si $k = \ell$ puisque $-(n-1) \leqslant k - \ell \leqslant n-1$.
Finalement :

$$(A\overline{A})_{k\ell} = \begin{cases} n & \text{si } k = \ell \\ \dfrac{1 - \omega^{(k-\ell)n}}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0 & \text{sinon (car } \omega^n = 1). \end{cases}$$

Donc $A\overline{A} = nI_n$, ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Exercice 16: ($\star$)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = A + B$.
Montrer que $(A - I_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et calculer $(A - I_n)^{-1}$.

✎ *Solution:*

On calcule $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$.

Exercice 17: ($\star\star$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
On pose $B = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$, et on note u, v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, v$, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, v$, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{tr}\, B = k \,\mathrm{rg}\, B$.

✎ *Solution:*

- On a $u^k - \mathrm{Id} = (u - \mathrm{Id})(\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}) = (u - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ et donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$. Donc $v(x) = (\mathrm{Id} + u + \cdots + u^{k-1})(x) = kx$ d'où $x = v\left(\frac{x}{k}\right)$ ce qui montre que $x \in \mathrm{Im}\, v$.
- Comme $v \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$, on en déduit $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\, v$, on conclut alors avec les dimensions, puisque d'après le résultat précédent, $\dim \mathrm{Ker}\, v = n - \mathrm{rg}\, v = n - \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, v$. Alors $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ donc $u(x) = x$. De $x \in \mathrm{Ker}\, v$ on tire $kx = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, v = \{0\}$ et, d'après le th. du rang, ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- On écrit alors la matrice de v dans une base adaptée à cette décomposition. Puisque la restriction de v à $\mathrm{Im}\, v$ est l'homothétie de rapport k, on obtient l'égalité voulue.

Exercice 18: (⋆⋆)

a) On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.
Montrer que les matrices A^{-1} et B commutent.

b) Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors la matrice $I_n + N$ est inversible.

c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que :

$$A \text{ inversible} \iff A + B \text{ inversible.}$$

✎ *Solution:*

a) Il suffit d'écrire
$$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}.$$

b) Si N est nilpotente d'indice p alors :
$$(I_n + N)(I_n - N + N^2 - \cdots + (-1)^{p-1}N^{p-1}) = I_n + (-1)^{p-1}N^p = I_n$$
donc $I + N$ inversible d'inverse $I -_n N + N^2 - \cdots + (-1)^{p-1}N^{p-1}$.

c)
- Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $A^{-1}B$ l'est aussi. Ainsi, d'après **b)**, $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi.
- Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B, A = A + B - B$ est inversible en utilisant ce qui précède.

Exercice 19: ***Théorème de Hadamard*** **(⋆⋆)**

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que :
$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ < \ |a_{ii}|$$
(une telle matrice est dite *à diagonale strictement dominante*).

Montrer que A est inversible (*on pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe $X \neq 0$ tel que* $AX = 0$).

✎ *Solution:*

Si A n'est pas inversible, l'endomorphisme canoniquement associé à A n'est pas bijectif donc pas injectif donc $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$.
Il existe donc alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$ et $X \neq 0$.
En notant $X = {}^t(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, le système $AX = 0$ s'écrit :
$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0\,.$$

Soit i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Puisque $X \neq 0$, x_{i_0} est non nul, et la i_0-ième ligne du système précédent peut s'écrire :
$$a_{i_0,i_0} = -\sum_{i \neq i_0} a_{i_0,j}\frac{x_i}{x_{i_0}}\,.$$
Donc par l'inégalité triangulaire :
$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{i \neq i_0} \left|a_{i_0,j}\right| \underbrace{\frac{|x_i|}{|x_{i_0}|}}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{i \neq i_0} \left|a_{i_0,j}\right|\,,$$
ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration.

Matrice d'une application linéaire (ex. 20 à 25)

Exercice 20: ($\star$)

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à A est un projecteur, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 21: ($\star$)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Calculer le rang de f. Former un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ et en donner une base.

b) Former un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base.

c) Déterminer l'image et l'image réciproque par f du sous-espace d'équation $x - y + z - 2t = 0$.

✎ *Solution:*

a) Par la méthode du pivot (par exemple, je ne détaille pas), on trouve $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = 2$.
Les deux premières colonnes de A (par exemple) n'étant pas colinéaires, on a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(2,3,1,4),(1,-1,3,-3)\}.$$

Donc

$$(x,y,z,t) \in \operatorname{Im} f \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = 3\lambda - \mu \\ z = \lambda + 3\mu \\ t = 4\lambda - 3\mu \end{cases} \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \begin{cases} \lambda = \dfrac{x+y}{5} \\ \mu = \dfrac{3x-2y}{5} \\ z = \lambda + 3\mu = 2x - y \\ t = 4\lambda - 3\mu = -x + 2y \end{cases}$$

Un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ est donc :

$$2x - y - z = 0 \quad , \quad x - 2y + t = 0.$$

(après tous ces calculs passionnants, une vérification s'impose : les vecteurs $(2,3,1,4)$ et $(1,-1,3,-3)$ vérifient bien ces deux équations !)

b)

$$(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z,t) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 3z - t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z - 2t = 0 \\ 4x - 3y + z + t = 0 \end{cases}$$

Puisque l'on sait (th. du rang) que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 2 et que les deux premières équations (par exemple) du système ci-dessus sont indépendantes, on peut écrire, sans calcul, qu'un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$ est :

$$2x + y + 3z - t = 0 \quad , \quad 3x - y + 2z = 0.$$

On peut alors chercher une base de $\operatorname{Ker} f$ par les méthodes habituelles, ou bien remarquer que, si l'on note C_i les colonnes de la matrice A :
- $C_3 = C_1 + C_2$ donc le vecteur $(1,1,-1,0)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$;
- $C_1 + 3C_2 = -5C_4$ donc le vecteur $(1,3,0,5)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

Les deux vecteurs ci-dessus étant non colinéaires ils forment bien une base de $\operatorname{Ker} f$.
(là aussi, on pense à vérifier qu'ils vérifient bien le système d'équations trouvé auparavant).

c) • Le sous-espace vectoriel H d'équation $x - y + z - 2t = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ (cours). Une base en est, par exemple, formée des trois vecteurs :

$$a = (1,1,0,0) \quad , \quad b = (0,0,2,1) \quad \text{et} \quad c = (1,0,-1,0).$$

D'après le cours son image par f est alors engendrée par les trois vecteurs :

$$f(a) = (3,2,4,1) \quad , \quad f(b) = (5,4,6,3) \quad \text{et} \quad f(c) = (-1,1,-3,3).$$

On « remarque » alors que $-9f(a) + 5f(b) = 2f(c)$ donc le rang du système précédent est égal à 2 (ou méthode du pivot) et finalement l'image de H par f est égale à $\operatorname{Vect}\{f(a), f(b)\}$.

Enfin, puisque $f(H) \subset \operatorname{Im} f$ et que ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension 2, ils sont égaux.

- Enfin, si $u = (x, y, z, t)$ et $f(u) = (x', y', z', t')$ on a :

$$u \in f^{-1}(H) \Longleftrightarrow f(u) \in H \Longleftrightarrow x' - y' + z' - 2t' = 0$$

ce qui équivaut à :

$$(2x + y + 3z - t) - (3x - y + 2z) + (x + 3y + 4z - 2t) - 2(4x - 3y + z + t) = 0$$

soit à : $-8x + 11y + 3z - 5t = 0$. C'est l'équation d'un hyperplan.

Exercice 22: ($\star$)

On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\} \text{ et } D = \operatorname{Vect}(w) \text{ où } w = (1, 0, -1).$$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

a) Former la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

b) En déduire les matrices dans $\mathscr{B}$ de q et de s.

✎ *Solution:*

a) *1ère solution, préférable*

Pour $u = (x, y, z)$ calculons $p(u) = (x', y', z')$.

Comme $p(u) - u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(u) = u + \lambda w$ soit $\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y \\ z' = z - \lambda \end{cases}$.

Comme $p(u) \in P$ on a $x' + 2y' - z' = 0$ ce qui donne finalement :

$$\lambda = -\frac{x + 2y - z}{2},$$

et donc

$$p(u) = \left(\frac{x - 2y + z}{2},\ y,\ \frac{x + 2y + z}{2}\right).$$

Par suite :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2ème solution

Notons $\mathscr{B}'$ une base formée de la réunion d'une base de P et d'une base de D. Comme base de P on peut choisir les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 2)$ donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est égale à :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$ est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (puisque $D = \operatorname{Ker} p$ et que $P = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p)$).

D'après le cous la matrice A de p dans $\mathscr{B}$ est telle que $A' = P^{-1}AP$ d'où $A = PA'P^{-1}$.

Pour finir l'exercice avec cette méthode, il ne reste « plus qu'à » calculer P^{-1} et faire le produit des 3 matrices...

b) Comme $q = I - p$ et $s = 2p - I$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23: (⋆⋆)

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'application $u\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA \end{array}$.

Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$, trouver son image et son noyau, préciser sa matrice dans la base canonique de E.

✎ *Solution:*

- u endomorphisme de E est immédiat.
- $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} u \iff MA = 0 \iff a = -2b$ et $c = -2d$ (après quelques calculs).
  On en déduit $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(A_1, A_2)$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- L'image est engendrée par les images par u de la base canonique, donc par exemple par les matrices $E_{11}A$ et $E_{21}A$ (on les calcule et vérifie qu'elles sont bien indépendantes).
- Enfin, pour obtenir la matrice de u dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ il suffit de calculer les images de ces vecteurs. On trouve qu'il s'agit de la matrice (par blocs) $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

Exercice 24: (⋆⋆⋆)

Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$.

Calculer $f \circ g$ (*Indication : utiliser la matrice de f dans une « bonne » base*).

✎ *Solution:*

On peut bien sûr supposer $f \neq 0$ et $g \neq 0$ sinon le résultat est immédiat.
Il existe donc un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \neq 0$. S'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors en appliquant f on aurait $0 = f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ d'où $\lambda x = 0$ puis $f(x) = 0$, ce qui est exclu.

La famille $\mathscr{B} = (x, f(x))$ est donc libre, et c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notons alors $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de g dans cette même base.
La relation $f \circ g = g \circ f$ donne $AB = BA$ soit après calculs : $b = 0$ et $a = d$.
On a donc $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$. La relation $g^2 = 0$ donne alors $B^2 = 0$ soit $a^2 = ac = 0$ d'où $a = 0$. Il en résulte $B = c.A$ soit $g = c.f$ puis $f \circ g = c.f^2 = 0$.

Exercice 25: (⋆⋆)

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3 + f = 0$.

a) Montrer que :
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}).$$

b) Prouver que : $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \geqslant 1$. Montrer que, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

c) Que vaut $\det(-\mathrm{Id}_E)$? En déduire $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = 2$.

d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ *Solution:*

a) Par hypothèse $f(y) = 0$ et $f^2(z) = -z$. En appliquant f^2 à l'égalité $x = y + z$, on obtient :
$$f^2(x) = 0 + f^2(z) = -z$$
d'où :
$$y = x - z = x + f^2(x).$$

b) Ce qui précède assure l'unicité de la décomposition d'un vecteur x de E et donc le caractère direct de la somme.
De plus, pour $x \in E$, en posant $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on vérifie $x = y + z$ et :
$$f(y) = f(x) + f^3(x) = (f^3 + f)(x) = 0, \text{ donc } x \in \operatorname{Ker} f\,;$$
$$(f^2 + \mathrm{Id})(z) = -f^4(x) - f^2(x) = -(f^3 + f)(f(x)) = 0, \text{ donc } z \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}).$$
On en déduit E est la somme directe de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

c) On a $(f^2+\mathrm{Id})\circ f = 0$ donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id})$. Or $f \neq 0$ donc $\dim \mathrm{Im} f \geqslant 1$ puis $\dim \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id}) \geqslant 1$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id})$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors en appliquant f : $f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ d'où $-x = \lambda^2 x$ puis $\lambda^2 = -1$ puisque $x \neq 0$.
Cela est impossible dans $\mathbb{R}$ donc la famille $(x, f(x))$ est libre.

d) En dimension impaire, n $\det(-I_n) = (-1)^n = -1$.
Si l'endomorphisme f est inversible, la relation $f^3 + f = 0$ peut être simplifiée en $f^2 + \mathrm{Id} = 0$ (en composant par f^{-1}). Cela donne $\det(f^2) = \det(-\mathrm{Id}) = -1$ ce qui est incompatible avec $\det(f^2) = (\det f)^2 \geqslant 0$. On en déduit que f n'est pas inversible : $\dim \mathrm{Ker} f \geqslant 1$.
La conjonction des résultats qui précèdent donne alors : $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id}) = 2$.

e) Soit u un vecteur non nul de $\mathrm{Ker} f$ et v un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id})$. La famille (u) est une base de $\mathrm{Ker} f$ et la famille $(v, f(v))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id})$. Ces deux espaces étant supplémentaires dans E, la famille $(u, v, f(v))$ est une base de E, dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue.

<u>Matrices semblables</u> (ex. 26 à 29)

Exercice 26: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ *Solution:*

a) Le vecteur ε_1 a pour coordonnées $(1,0,1)$ dans $\mathscr{B}$ donc $f(\varepsilon_1)$ a pour coordonnées $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$.
De même : $f(\varepsilon_2)$ a pour coordonnées dans $\mathscr{B}$: $(2,1,1)$ donc $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
Enfin, $f(\varepsilon_3$ a pour coordonnées dans $\mathscr{B}$: $(3,2,2)$ donc $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Il en résulte que la matrice A' de f dans $\mathscr{B}'$ est : $A' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) On a $A' = P^{-1}AP$ ou $A = PA'P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

On aura alors pour tout entier n : $A^n = PA'^n P^{-1}$.

On calcule facilement (voir un autre exercice de cette feuille) : $A'^n = \begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\0 & 1 & n\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Il ne reste « plus qu'à » calculer P^{-1} pour finir de répondre à la question...

Exercice 27: (⋆)

Les matrices $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\4 & 0 & -3\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Si oui, déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

✎ *Solution:*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. A est la matrice dans cette base d'un certain endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit donc tout simplement de trouver une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que B soit la matrice de u dans $\mathscr{B}'$ (et P sera la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$).
Il suffit donc de trouver e'_1, e'_2, e'_3 tels que $u(e'_1) = e'_1$, $u(e'_2) = e'_1 + e'_2$ et $u(e'_3) = e'_2 + e'_3$. En considérant les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathscr{B}$, on est ramené à résoudre 3 systèmes linéaires (voir exercice similaire corrigé en classe)...

Exercice 28: ($\star\star\star$)

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que la matrice produit AB soit semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer BA.

✎ *Solution:*

Considérons A comme la matrice, dans les bases canoniques, d'une application linéaire $a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et B comme la matrice dans ces mêmes bases d'une application linéaire $b : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
On a évidemment $\operatorname{rg} a \leqslant 2$ et $\operatorname{rg} b \leqslant 2$.
D'autre part, $\operatorname{rg}(AB) = 2$, et on *sait* (cf. cours) que $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$. On en déduit $\operatorname{rg} A \geqslant 2$ et $\operatorname{rg} B \geqslant 2$.
Donc $\operatorname{rg} a = \operatorname{rg} b = 2$, ce qui implique a injective et b surjective.
Or on a le résultat suivant (je n'écris pas les espaces de départ et d'arrivée des applications, pour simplifier) :
Lemme : Si f est injective, $f \circ g = f \circ g' \Longrightarrow g = g'$
Si g est surjective, $f \circ g = f' \circ g \Longrightarrow f = f'$

AB est la matrice, dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$, de l'endomorphisme $a \circ b$. On remarque que $(AB)^2 = 9AB$, d'où $a \circ b \circ a \circ b = 9a \circ b = a \circ 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \circ b$.
En utilisant alors le lemme précédent, on obtient $b \circ a = 9\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 29: ($\star\star$)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

a) Montrer que A est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $E = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, A, A^2).

✎ *Solution:*

a) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. La question revient à trouver une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit égale à B.
Pour cela il suffit de choisir $\varepsilon_1 \notin \operatorname{Ker} f^2$ (possible car $A^2 \neq 0$) puis $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$ puis $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2) = f^2(\varepsilon_1)$.
On vérifie facilement que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$, et la matrice de f dans cette base est bien égale à B par construction.

b) Le problème revient à trouver les $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$; pour cela on fait les calculs avec les matrices de f et g dans la base précédente. Ça marche tout seul !

Matrices par blocs (ex. 30 à 33)

Exercice 30: ($\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

On suppose M, A, D inversibles. Exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

✎ *Solution:*

On calcule le produit par blocs : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = I_{2n}$ équivaut à :

$$\begin{cases} AX + BZ & = I_n \\ AY + BT & = 0 \\ CX + DZ & = 0 \\ CY + DT & = I_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Y & = -A^{-1}BT \\ Z & = -D^{-1}CX \\ AX - BD^{-1}CX & = I_n \\ -CA^{-1}BT + DT & = I_n \end{cases}$$

Puisque M est inversible, X, Y, Z, T existent ; donc $A - BD^{-1}C$ est inversible et $X = (A - BD^{-1}C)^{-1}$; de même, $D - CA^{-1}D$ est inversible et $T = (D - CA^{-1}D)^{-1}$, puis on en déduit Y et Z.

Exercice 31: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

✎ *Solution:*

Soit $r = \mathrm{rg}(f)$, et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, f$. Puisque $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, on peut d'après le théorème de la base incomplète, la compléter en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de $\mathrm{Ker}\, f$.
Considérons un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E. D'après le théorème d'isomorphisme, $f|_S$ est un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}\, f$. Il existe donc une *base* $(e'_1, \dots, e'_r)$ de S telle que $f(e'_i) = e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$
Il est alors clair que la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, e'_1, \dots, e'_r)$ obtenue par concaténation des 2 bases précédentes, convient.

Exercice 32: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E - \{0_E\}$, la famille $\{x, u(x)\}$ est libre.

b) Montrer que, pour tout entier p tel que $2 \leqslant 2p \leqslant n$, il existe un p-uplet de vecteurs $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ tel que le système $(a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p))$ soit libre.

c) Montrer que n est pair, et que, si l'on pose $n = 2m$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit (par blocs) : $\begin{bmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}$.

✎ *Solution:*

a) Soit $x \neq 0$. S'il existait un réel λ tel que $u(x) = \lambda x$ alors $u^2(x) = \lambda^2 x$ et comme $u^2 = -\mathrm{Id}_E$ et que x est non nul, on aurait $\lambda^2 = -1$, c'est impossible dans $\mathbb{R}$.

b) On procède par récurrence (finie) sur p.

- on vient de voir que la propriété est vraie pour $p = 1$.
- Supposons là démontrée à un certain rang p tel que $2(p+1) \leqslant n$, et démontrons-là au rang $p+1$.
  Il existe donc un système libre de la forme $(a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p))$. Puisque $2p < n$ l'espace vectoriel engendré par ce système n'est pas égal à E ;
  il existe donc un vecteur a_{p+1} tel que $a_{p+1} \notin \mathrm{Vect}\{a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p)\}$ c'est-à-dire tel que le système $(a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p), a_{p+1})$ soit libre.
  Montrons alors que le système $(a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p), a_{p+1}, u(a_{p+1}))$ est encore libre.
  Par l'absurde, si tel n'était pas le cas, $u(a_{p+1})$ serait combinaison linéaire des autres c'est-à-dire qu'il existerait des scalaires tels que
  $$u(a_{p+1}) = \alpha a_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i u(a_i) \quad (1)$$
  d'où, en appliquant u :
  $$-a_{p+1} = u^2(a_{p+1}) = \alpha u(a_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(a_i) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i \quad (2)$$
  En faisant $(1) + \alpha(2)$, on obtient, puisque la famille $(a_1, \dots, a_p, u(a_1), \dots, u(a_p), a_{p+1})$ est libre, $\alpha^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.
- Cela démontre la propriété à l'ordre $p+1$, et achève la récurrence.

c) L'espace vectoriel étant de dimension finie, il faut bien que le processus précédent s'arrête, donc on peut trouver une base de E de la forme $(a_1, \dots, a_m, u(a_1), \dots, u(a_m))$, et la dimension de E est paire. (*on pouvait aussi remarquer que* $\det(u^2) = \det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^n$ *et* $\det(u^2) = (\det u)^2 > 0$).
Enfin il est facile de vérifier que la matrice de u dans la base précédente est bien de la forme voulue.

Exercice 33: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et u un endomorphisme de E tel que : $\operatorname{rg} u = 2n$ et $u^3 = 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit (par blocs) : $\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{bmatrix}$

✎ *Solution:*

1. De $u \circ u^2 = 0$, on tire $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$, et de $u^2 \circ u = 0$ on tire $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u^2$.
On a aussi, d'après le th. du rang, $\dim Keru = n$.
Considérons alors l'application linéaire $v = u|_{\operatorname{Im} u}$, de $\operatorname{Im} u$ dans E (v est la restriction de u à $\operatorname{Im} u$). On a $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} u^2$ et $_K erv = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, donc le théorème du rang appliqué à v donne

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u).$$

Or $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ donc $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u) \leqslant n$ d'où $\operatorname{rg} u^2 \leqslant \operatorname{rg} u - n = n$.
Puisque $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$, on en déduit $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.

2. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$; $\dim S = n$; et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de S.
Montrons que la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, u(e_1), \dots, u(e_n), u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est libre :
Si on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u(e_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u^2(e_i) = 0$, alors, en appliquant u^2 à cette égalité, on obtient, puisque $u^3 = 0$:

$$u^2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0 \quad \text{i.e} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} u^2$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Im} u$; or $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in S$, donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$ d'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.
On a donc $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u(e_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u^2(e_i) = 0$, puis, en appliquant u, on en déduit de la même façon que les β_i sont nuls, et ensuite que les γ_i sont nuls.
Finalement, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, u(e_1), \dots, u(e_n), u^2(e_1), \dots, u^2(e_n))$ est une base de E, et il est facile de vérifier que la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.

Rang d'une matrice (ex. 34 à 41)

Exercice 34: (⋆)

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Comparer $\operatorname{rg}(AB)$, $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$. Préciser dans le cas A ou B inversible.

b) Existe-il $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$?

✎ *Solution:*

a) C'est du cours, à savoir refaire (considérer les applications linéaires associées).

b) La réponse est NON : en effet, on a $\operatorname{rg} A \leqslant 2$ et $\operatorname{rg} B \leqslant 2$ (le rang d'une matrice étant inférieur au nombre de lignes et de colonnes). Donc $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B) \leqslant 2$. Or, ici, $\operatorname{rg}(AB) = 3$...

Exercice 35: (⋆⋆)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de M.

b) Préciser noyau et image de M.

c) Calculer M^n.

✎ *Solution:*

a) La matrice extraite formée des $n-1$ dernières lignes et colonnes de M est triangulaire supérieure avec de 1 sur la diagonale, donc est inversible. Il en résulte que $\operatorname{rg} M \geqslant n-1$.

- Lorsque n est pair, l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 + C_3 - \cdots - C_n$ fait apparaître une colonne nulle, donc $\operatorname{rg} M \leqslant n-1$ et finalement $\operatorname{rg} M = n-1$ dans ce cas.
- Lorsque n est impair, on fait la même opération, et la 1ère colonne devient ${}^t(0\ 0\ \dots\ 0\ 2)$; puis en développant selon la 1ère colonne, on obtient que $\det M = 2$ donc M est inversible. Dans ce cas $\operatorname{rg} M = n$.

b)
- Dans le cas n impair, $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ et $\operatorname{Im} M = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Dans le cas n pair, $\operatorname{Ker} M$ est la droite vectorielle de base ${}^t(1\ -1\ 1\ -1\ \dots\ 1\ -1)$ et $\operatorname{Im} M$ est l'hyperplan d'équation $x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + x_{n-1} - x_n = 0$ (en effet, on sait déjà qu'il s'agit d'un hyperplan, et les vecteurs colonnes, qui engendrent l'image, vérifient bien l'équation précédente).

c) On écrit $M = I_n + J$ où J est la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

J est la matrice de l'application f qui transforme la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ en la base $(e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ obtenue par permutation circulaire. J^2 est alors la matrice de l'application f^2, qui transforme la base canonique en la base $(e_{n-1}, e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-2})$ c'est-à-dire $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

On peut calculer de même les J^k pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (et on a $J^n = I_n$). Puis comme I et J commutent, on peut utiliser la formule du binôme et on trouve :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 2 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & 2 & \binom{n}{1} & \ddots & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{n}{2} \\ \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 36: (⋆⋆)

a) Soit $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice écrite par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
Montrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & A \end{bmatrix}$, décomposée en p blocs, élément de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.
Comparer $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$.

✎ *Solution:*

1. En notant $A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{Im}(M) = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2$. Or $\operatorname{Im} A_1$ est isomorphe (par l'application $X \longmapsto \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}$) à $\operatorname{Im} A$, donc $\dim \operatorname{Im} A_1 = \operatorname{rg} A$, et, de même, $\dim \operatorname{Im} A_2 = \operatorname{rg} B$, d'où le résultat.

Autre solution : Notons $a = \operatorname{rg} A$, $b = \operatorname{rg} B$. On sait alors qu'il existe des matrices inversibles P, Q d'ordre p, et des matrices inversibles R, S d'ordre q telles que $A = PJ_aQ$ et $B = RJ_bS$.

On a alors : $M = \underbrace{\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_{\text{inversible}} \times \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_b \end{bmatrix} \times \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}}_{\text{inversible}}$

donc M est équivalente à $\begin{bmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_b \end{bmatrix}$ qui est de rang $a+b$.

2. Par récurrence sur p, en utilisant le résultat précédent, on a $\operatorname{rg} B = p \operatorname{rg} A$.

Exercice 37: **(⋆⋆⋆)**

Soit $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

a) Montrer que : $\operatorname{rg}(M) \geqslant \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C)$.

b) Montrer que, si A est inversible, il y a égalité.

c) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telles que, pour toute $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on ait :

$$\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(C).$$

Montrer que A ou C est inversible.

Solution:

a) Soit $a = \operatorname{rg} A$ et $c = \operatorname{rg} C$. On peut extraire de A une matrice A' inversible d'ordre a et de C une matrice inversible C' d'ordre c. On pourra alors extraire de M une matrice d'ordre $a+c$ de la forme $\begin{bmatrix} A' & 0 \\ B' & C' \end{bmatrix}$; cette matrice étant inversible (utiliser soit le cours sur les matrices triangulaires par blocs, soit le calcul du déterminant par blocs), on en déduit que $\operatorname{rg} M \geqslant a + c$.

b) En posant $A_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} A_1 + \operatorname{Im} A_2$. Or, $\dim \operatorname{Im} A_2 = \dim \operatorname{Im} C = \operatorname{rg} C$ et, puisque A est inversible, $\operatorname{rg} A_1 = \operatorname{rg} A$ (car on peut extraire de A_1 la matrice inversible A). D'autre part, d'après la formule de Grassmann, la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels est inférieure à la somme des dimensions de ces sous-espaces.
On obtient donc $\dim \operatorname{Im} M \leqslant \dim \operatorname{Im} A_1 + \dim \operatorname{Im} A_2$ soit $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$, d'où l'égalité.

c) Soit $a = \operatorname{rg} A$ et $c = \operatorname{rg} C$. Notons J_a la matrice d'ordre p $J_a = \begin{bmatrix} I_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et J'_c la matrice d'ordre q $J'_c = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
On sait qu'il existe des matrices carrées inversibles d'ordre p, P et Q, telles que $PAQ = J_a$, et qu'il existe deux matrices inversibles d'ordre q, R et S, telles que $RCS = J'_c$.

On a alors $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ RBQ & J'_c \end{bmatrix}$.

L'hypothèse de l'énoncé implique donc $\operatorname{rg} \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ D & J'_c \end{bmatrix} = a + c$ pour toute matrice $D \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ (puisque le rang est inchangé lorsqu'on multiplie par une matrice inversible). Si on avait $a < p$ et $c < q$, alors en prenant $D = E_{p+c+1,a+1}$ on aurait $\operatorname{rg} \begin{bmatrix} J_a & 0 \\ D & J'_b \end{bmatrix} = a + c + 1$, contradiction. Donc $a = p$ ou $c = q$, i.e A inversible ou C inversible.

Exercice 38: **(⋆⋆)**

Soit M une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{bmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer le rang de M en fonction de celui de A.

Solution:

En effectuant les opérations élémentaires $L_i \longleftarrow L_i - 2L_{i-n}$ pour $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$ (qui ne changent pas le rang), on obtient $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 2A & -2A \end{bmatrix}$.
Puis en effectuant les opérations élémentaires $C_i \longleftarrow C_i - 2C_{i-n}$ pour $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, on obtient $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -2A \end{bmatrix}$. En utilisant alors l'exercice 36, on trouve $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(-2A) = 2 \operatorname{rg} A$.

Exercice 39: **(⋆⋆)**

Soit M une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.
Montrer que : $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B + \operatorname{rg} C + \operatorname{rg} D$.

✎ *Solution:*

Si $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M_1 + \operatorname{Im} M_2$ d'où, d'après la formule de Grassmann, $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg} M_1 + \operatorname{rg} M_2$.
Si $M = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$, on a $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg} L_1 + \operatorname{rg} L_2$ en appliquant le résultat précédent à la transposée de M.
Pour obtenir le résultat voulu, il suffit donc d'appliquer successivement les deux résultats ci-dessus.

Exercice 40: (⋆⋆⋆)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.
Montrer que : $\operatorname{rg}(M) = n + \operatorname{rg}(CA^{-1}B - D)$ (on multipliera M à gauche par une matrice convenable).

✎ *Solution:*

$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix}$.
Puisque $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_p \end{bmatrix}$ est inversible, les matrices $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix}$ ont même rang.
Ensuite, on fait le calcul par blocs : $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix}$, donc pour les mêmes raisons, la matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix}$ a même rang que la matrice $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{bmatrix}$, puis on applique le résultat de l'exercice 36.

Exercice 41: Matrices de rang 1 (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.

a) Établir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X{}^tY$.
Réciproquement, que peut-on dire d'une matrice de cette forme ?

b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

✎ *Solution:*

a) Si A est de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles ; on peut donc écrire par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} a_1C & a_2C & \dots & a_nC \end{bmatrix}$$

où C est une colonne (non nulle car sinon A serait nulle) . En notant L la matrice ligne $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ (qui n'est pas nulle sinon A le serait) on a alors $A = CL$.
La réciproque est immédiate : le même calcul par blocs que ci-dessus montre que si $A = CL$ avec C colonne non nulle et L ligne non nulle, alors $\operatorname{rg} A = 1$.

b) Avec les notations ci-dessus on a :

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \alpha CL = \alpha A$$

en notant α le scalaire LC.
On peut d'ailleurs préciser : si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, alors $LC = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \operatorname{tr}(A)$ (puisque A est la matrice dont le terme d'indice (i, j) vaut $c_i a_j$).

Trace d'une matrice, d'un endomorphisme (ex. 42 à 47)

Exercice 42: (⋆⋆)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, données avec $\operatorname{tr} A \neq 0$. Résoudre l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A = B.$$

✎ *Solution:*

Il s'agit d'une équation linéaire. Réponse :

– Si $\operatorname{tr}(B) \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.

– Lorsque $\operatorname{tr}(B) = 0$, l'ensemble des solutions est l'ensemble des matrices de la forme $M = \dfrac{1}{\operatorname{tr}(A)}B + \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 43: (⋆⋆)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$.
Résoudre l'équation : $X + \operatorname{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution:

Supposons qu'il existe une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, en prenant la trace des deux membres de l'égalité, on obtient (puisque tr est une forme linéaire) : $(1 + \operatorname{tr} A) \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} B$.
Deux cas sont à distinguer :

- Si $1 + \operatorname{tr} A \neq 0$, on a donc nécessairement $\operatorname{tr} X = \dfrac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}$ d'où $X = B - \dfrac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}A$.
  Réciproquement, si $X = B - \dfrac{\operatorname{tr} B}{1 + \operatorname{tr} A}A$, on vérifie aisément que X vérifie bien l'équation proposée. C'en est donc l'unique solution.
- Si $\operatorname{tr} A = -1$, deux autres cas sont à distinguer :
  - Si $\operatorname{tr} B \neq 0$, l'équation proposée n'a pas de solution.
  - Si $\operatorname{tr} B = 0$, on vérifie alors que B est solution. En posant $Y = X - B$, l'équation se ramène à $Y = -\operatorname{tr}(Y)A$. Y est donc de la forme λA avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, on vérifie aisément que toute matrice de ce type convient.
    En conclusion, dans ce cas, l'ensemble des solutions est l'ensemble des matrices de la forme $X = \lambda A + B$.

Exercice 44: (⋆)

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

Solution:

Pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$ on a $\varphi(E_{ij}E_{k\ell}) = \varphi(E_{k\ell}E_{ij})$ d'où $\delta_{jk}\varphi(E_{i\ell}) = \delta_{\ell i}\varphi(E_{kj})$.

- En prenant $k = j$ et $i = \ell$, on obtient $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$ pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Notons alors λ la valeur commune des $\varphi(E_{ii})$.
- En prenant $j = k$ et $i \neq \ell$, on obtient $\varphi(E_{il}) = 0$.

La relation $\varphi(A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$ est donc vérifiée pour toute les matrices A de la base canonique, donc est vraie pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 45: (⋆⋆⋆)

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\operatorname{tr}(UVW) = \operatorname{tr}(VUW)$.
Montrer que U est une matrice scalaire.

Solution:

On a : $E_{ij}UE_{ij} = u_{ji}E_{ij}$ et $UE_{ij}E_{ij} = \delta_{ij}UE_{ij}$
donc, en prenant les traces : $u_{ii}\delta_{ij} = u_{ij}$ ce qui prouve que U est diagonale.
De plus $u_{ii} = \operatorname{tr}(UE_{ij}E_{ji}) = \operatorname{tr}(E_{ij}UE_{ji}) = u_{jj}$, donc U est une matrice scalaire.

Exercice 46: (⋆⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array} \right.$

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et calculer sa trace en fonction de celle de A.

✎ *Solution:*

ϕ endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est immédiat.

On écrit $A = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_{k\ell} E_{k\ell}$; pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a alors :

$$\begin{aligned}\phi(E_{ij}) = AE_{ij} + E_{ij}A &= \sum_{k,\ell} a_{k\ell} E_{kl} E_{ij} + \sum_{k,\ell} a_{k\ell} E_{ij} E_{k\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} \delta_{\ell i} E_{kj} + \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,l} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj} + \sum_{\ell=1}^{n} a_{j\ell} E_{i\ell}\,.\end{aligned}$$

Si on considère alors la matrice de ϕ dans la base canonique $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ses termes diagonaux sont les coordonnées de $\phi(E_{ij})$ sur E_{ij}, c'est-à-dire, d'après le calcul précédent, les $a_{ii} + a_{jj}$.

Donc $\operatorname{tr}(\phi) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} [a_{ii} + a_{jj}] = 2n \operatorname{tr}(A)$.

Exercice 47: *Projecteurs* (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une famille de projecteurs de E . Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) $i \neq j \ \Rightarrow\ p_i \circ p_j = 0$.

b) $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$ est un projecteur.

2. Soit $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une famille d'endomorphismes de E, tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) $i \neq j \ \Rightarrow\ p_i \circ p_j = 0$.

b) pour tout $i \in [\![1\,;k]\!]$, p_i est un projecteur.

✎ *Solution:*

1. a) ⇒ b) Si a) est vérifiée, alors $p^2 = \sum_{i,j} p_i \circ p_j = \sum_i p_i^2 = \sum_i p_i = p$ donc p est un projecteur.

b) ⇒ a) Supposons que p soit un projecteur.

On a $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im}\left(\sum_i p_i\right) \subset \sum_i (\operatorname{Im} p_i)$ donc $\dim \operatorname{Im} p \leqslant \dim\left(\sum_i \operatorname{Im} p_i\right) \leqslant \sum_i \dim(\operatorname{Im} p_i)$, ou encore $\operatorname{rg} p \leqslant \sum_i \operatorname{rg} p_i$. (*)

Mais, puisque p et les p_i sont des projecteurs, on a $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$ et $\operatorname{rg} p_i = \operatorname{tr} p_i$. Or, par linéarité, $\operatorname{tr} p = \sum_i \operatorname{tr} p_i$, soit $\operatorname{rg} p = \sum_i \operatorname{rg} p_i$. Les inégalités dans (*) sont donc des égalités. Il en résulte $\dim\left(\sum_i \operatorname{Im} p_i\right) = \sum_i \dim(\operatorname{Im} p_i)$ et $\operatorname{Im} p = \sum_i (\operatorname{Im} p_i)$ donc $\operatorname{Im} p = \bigoplus_i \operatorname{Im} p_i$.

Pour tout $x \in E$ et tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, $p_j(x) \in \operatorname{Im} p_j \subset \operatorname{Im} p$ donc $p[p_j(x)] = p_j(x)$ (les vecteurs de $\operatorname{Im} p$ sont, je le rappelle encore une fois, invariants par p). Ainsi $\sum_i p_i[p_j(x)] = p_j(x)$ avec $p_i[p_j(x)] \in \operatorname{Im} p_i$ et $p_j(x) \operatorname{Im} p_j$. La somme des $\operatorname{Im} p_i$ étant directe, on en déduit $p_i[p_j(x)] = 0$ si $i \neq j$.

2. a) ⇒ b) est facile : pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, on a $p_j = p_j \circ \mathrm{Id}_E = \sum_i p_j \circ p_i = p_j^2$, donc p_j projecteur.

b) ⇒ a) résulte de la question 1. (car $\mathrm{Id}_E = \sum_i p_i$ est un projecteur).