

EXERCICES : DÉTERMINANTS, AVEC CORRIGÉS

Calculs de déterminants (ex. 1 à 10)

Exercice 1: (★★)

Calculer les déterminants des matrices suivantes (on les mettra sous forme factorisée si possible) :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

Réponses : a) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$
 b) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$
 c) $-3abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ (utiliser un produit de matrices)

Solution:

- a) Faire $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ pour se ramener à un déterminant d'ordre 3, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.
 b) Considérer ce déterminant comme un polynôme en a puis remarquer qu'il est divisible par $a+b+c+d$ en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ etc...
 c) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: (★)

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4\dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Solution:

On soustrait la première ligne toutes les autres, puis on développe selon la dernière colonne.
 Réponse : $(-1)^{n-1}n$

Exercice 3: (★)

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution:

On ajoute toutes les colonnes la première, on factorise par $\sum a_i$, puis on retranche la première ligne toutes les autres.
 Réponse : $(-1)^n \prod a_i \sum a_i$

Exercice 4: (★)

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

 **Solution:**

Si les a_i sont non nuls, on fait $C_0 \leftarrow C_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} C_i$, et on obtient une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant vaut $-\prod a_i \sum 1/a_i = -a_2 \cdots a_n - a_1 a_3 \cdots a_n - \cdots - a_1 \cdots a_{n-1}$, formule qui reste valable même quand l'un des a_i est nul par continuité.

Autre solution : développer directement selon la 1ère ligne.

Exercice 5: (★)

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$

 **Solution:**

C'est une matrice tridiagonale classique : on développe selon la première colonne et on trouve : $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$. L'équation caractéristique de la récurrence est $r^2 - (a+b)r + ab = 0$, de racines a et b .

Si $a \neq b$, on a $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$. Compte tenu de $D_0 = 1$ et $D_1 = a+b$, on trouve : $D_n(a, b) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

Soit encore $D_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$. D_n étant un polynôme en a , la formule reste vraie pour $a = b$, d'où $D_n(a, a) = (n+1)a^n$.

Exercice 6: déterminant de Zorro (★★)

Calculer le déterminant de Zorro :

$$Z_4 = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}, \quad Z_5 = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}, \quad Z_n = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

(les termes non écrits valent 0).

 **Solution:**

On soustrait la première colonne à l'avant-dernière puis la dernière colonne à la deuxième. Il vient

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & 0 & \\ & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & \\ & 1 & & & & \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Développons ensuite successivement par rapport la deuxième colonne puis par rapport l'avant-dernière. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \det Z_n &= (-1)^{n+2} (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^{E(n/2-2)} = (-1)^{E(n/2-1)} \end{aligned}$$

où le calcul du dernier déterminant s'effectue en échangeant les colonnes i et $n-2-i$ pour $i = 2, \dots, E(n/2-1)$.

Exercice 7: déterminant d'une matrice compagnon (★★)

Calculer le déterminant d'ordre $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

 **Solution:**

- 1) On peut développer directement selon la première colonne.
- 2) On peut aussi procéder par récurrence en développant selon la dernière ligne.
- 3) Autre solution : on effectue l'opération $L_n \rightarrow L_n + xL_{n-1} + x^2L_{n-2} + \dots + x^{n-1}L_1 + x^nL_0$, puis on développe le déterminant obtenu selon la dernière ligne.

Réponse : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$.

Exercice 8: Utilisation de la factorisation de polynômes (★)

1. En le considérant comme un polynôme en a , calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}$. Déterminer les cas d'annulation du déterminant suivant, puis le calculer, en fonction de x :

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix}.$$

3. Même question avec :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}.$$

 **Solution:**

1. Considérer ce déterminant comme un polynôme en a puis remarquer qu'il est divisible par $a + b + c + d$ en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ etc...

On trouve comme déterminant : $(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d)$.

2. C'est un polynôme de degré n en x , et qui s'annule pour $x = 0, \dots, n-1$. Donc il est de la forme $\alpha \prod_{p=0}^{n-1} (X - p)$.

Par ailleurs, le coefficient de x^n est manifestement $(-1)^n$, donc $\Delta_n(x) = (-1)^n \prod_{p=0}^{n-1} (X - p)$.

3. C'est un polynôme unitaire de degré $n + 1$ en x , qui s'annule lorsque $x = a_i$ (car deux lignes égales) et aussi divisible par $x + \sum a_i$ (additionner aussi toutes les colonnes la première). Réponse : $(x - a_1) \dots (x - a_n)(x + a_1 + \dots + a_n)$.

Exercice 9 : Généralisation de Vandermonde (★★★)

- a) Les $F_k (1 \leq k \leq n-1)$ étant des polynômes normalisés de degrés respectifs k , calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1(x_1) & \dots & F_{n-1}(x_1) \\ 1 & F_1(x_2) & \dots & F_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_1(x_n) & \dots & F_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

- b) *Application 1* : calculer le déterminant :
- $$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix}.$$

- c) *Application 2* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n$ n nombres entiers. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on ait : $a_{ij} = \binom{x_j}{i-1}$.

Calculer $\det A$, et en déduire que le nombre $\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}$ est un nombre entier.

 Solution:

- a) Pour tout $k \geq 1$ on a $F_k(x) = x^k + G_k(x)$ où G_k est un polynôme de degré $\leq k-1$. Or la famille $(1, F_1, \dots, F_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (en effet la famille est libre car constituée de polynômes de degrés distincts, et elle comporte $k = \dim(\mathbb{R}_{k-1}[X])$ éléments).

Il existe donc des coefficients λ_i tels que $F_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i F_i(x)$ donc après l'opération $C_k \leftarrow C_k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i C_i$

(en notant C_0 la 1ère colonne), la colonne C_k devient $\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$ et au final, après avoir fait ces opérations sur les

colonnes C_n à C_1 , le déterminant cherché est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{déterminant de Vandermonde}).$$

- b) On « sait » que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ où T_n est le n -ième polynôme de Tchebychev de 1ère espèce. Le déterminant proposé peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & T_2(\cos(a_0)) & \dots & T_n(\cos(a_0)) \\ 1 & \cos(a_1) & T_2(\cos(a_1)) & \dots & T_n(\cos(a_1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & T_2(\cos(a_n)) & \dots & T_n(\cos(a_n)) \end{vmatrix}$$

On sait de plus que chaque polynôme T_k pour $k \geq 1$ est de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} (cela se démontre par exemple à l'aide de la relation de récurrence $T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$). Donc en factorisant par le coefficient dominant chaque colonne et en utilisant la question a), on trouve que le déterminant proposé est égal à

$$2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{n-1} \cdot V(\cos(a_0), \cos(a_1), \dots, \cos(a_n)) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\cos(a_j) - \cos(a_i)).$$

- c) $\binom{x_j}{i-1}$ est un polynôme en x_j de degré $i-1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{(i-1)!}$. La matrice A^T est de la forme de celle à la question a), donc en factorisant chaque ligne par le coefficient dominant on trouve $\det A = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} V(x_1, \dots, x_n)$. Et $\det A$ est entier puisque la matrice A est à coefficients entiers.

Exercice 10: Déterminant de Cauchy (★★★)

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de scalaires vérifiant : $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, avec $a_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}$.

Calculer $\det A$ (retrancher la première ligne toutes les autres, puis la première colonne à toutes les autres).

En déduire le *déterminant de Hilbert*, c'est-à-dire celui de A avec $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$.

 **Solution:**

C'est un peu trop affreux à taper.. Faire ce qui est dit, en factorisant à chaque fois des termes convenables sur chaque ligne/colonne...

On trouve :

$$\det A = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j).$$

Dans le cas de la matrice de Hilbert ($a_i = i$ et $b_j = j$) on trouve :

$$\det A = \frac{(1! 2! \dots (n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)! \dots (2n)!}.$$

Déterminants : questions diverses (ex. 11 à 15)**Exercice 11: (★)**

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

 **Solution:**

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A \text{ car } n \text{ est impair.}$$

Exercice 12: (★★★)

- a) Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ complexes deux deux distincts. Montrer que la famille des polynômes $(X - a_0)^n, (X - a_1)^n, \dots, (X - a_n)^n$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (utiliser le déterminant de Vandermonde; une autre démonstration de ce résultat a été proposée dans la feuille n°1)
- b) Plus généralement, montrer que, si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, avec $\deg P = n$, la famille des polynômes $P(X - a_i)$, $0 \leq i \leq n$, forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (on pourra utiliser la formule de Taylor).

 **Solution:**

Démontrons directement le cas général.

La formule de Taylor pour les polynômes donne, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P(X - a_j) = \sum_{i=0}^n \frac{(-a_j)^i}{i!} P^{(i)}(X)$$

Or la famille $\mathcal{B} = (P, P', \dots, P^{(n)})$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (famille de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés de 0 à n). La matrice $M = (m_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ de la famille des polynômes $(P(X - a_j))_{0 \leq j \leq n}$ dans cette base est donc telle que $m_{i,j} = \frac{(-a_j)^i}{i!}$. Le déterminant de cette matrice est donc égal $\left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) V(-a_0, -a_1, \dots, -a_n)$, et il est donc non nul puisque les a_j sont distincts.

Exercice 13: (★★)

Soient $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que, si $p \neq n$, $\det AB = 0$ ou $\det BA = 0$.
2. Montrer que : $\det(I_n - AB) = \det(I_p - BA)$ (on pourra utiliser un produit par blocs judicieux).

 **Solution:**

- On sait que $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$. On sait aussi que le rang d'une matrice est inférieur au nombre de ses lignes et au nombre de ses colonnes. Donc $\text{rg}(AB) \leq \min(n, p)$, et, de même, $\text{rg}(BA) \leq \min(n, p)$.
Si $p < n$ (par exemple), on a alors $\text{rg}(AB) < n$, donc AB n'est pas inversible et son déterminant est nul.
- On prend les déterminants dans les produits par blocs :

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -B & -I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - AB & A \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ B & I_p - BA \end{bmatrix}$$

Exercice 14: (★★)

- Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre $2n$:

$$\begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix}.$$

- Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

- Soient $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

(commencer par examiner le cas où D est inversible, en utilisant un produit par blocs).

Donner un contre-exemple si on ne suppose plus $CD = DC$.

 **Solution:**

- Supposons d'abord $d \neq 0$. Les opérations $C_i \leftarrow C_i - \frac{c}{d}C_{i+n}$ pour $1 \leq i \leq n$ donnent

$$\begin{vmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(a - \frac{bc}{d}\right)A & bA \\ 0 & dA \end{vmatrix} = \det\left(a - \frac{bc}{d}\right)A \times \det dA = \left(a - \frac{bc}{d}\right)^n d^n (\det A)^2 = (ad - bc)^n (\det A)^2$$

et l'égalité reste vraie pour $d = 0$ puisqu'il s'agit de deux polynômes en d .

- Les opérations $C_i \leftarrow C_i + C_{i+n}$ pour $1 \leq i \leq n$ donnent

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix}$$

puis les opérations $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - L_i$ pour $1 \leq i \leq n$ donnent

$$\begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

et le résultat découle alors du calcul du dernier déterminant par blocs.

- Supposons d'abord D inversible. On a le produit par blocs :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD - BC & BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

et il suffit de prendre les déterminants dans cette égalité.

- Dans le cas général, soit $D_t = D + tI_n$ pour $t \in \mathbb{R}$. $\det(D_t)$ est un polynôme en t , de degré n , qui n'a donc qu'un nombre fini de racines. Ainsi, pour une infinité de valeurs de t , la matrice D_t est inversible, et elle commute avec C .

D'après le résultat précédent, on a donc, pour une infinité de valeurs de t :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D_t \end{vmatrix} = \det(AD_t - BC)$$

Les deux membres de cette égalité tant des polynômes en t égaux pour une infinité de valeurs sont aussi égaux pour $t = 0$, ce qui donne le résultat.

Exercice 15: (★★★)

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente.

Montrer que $\det(A + B) = \det A$ (on pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$, puis le cas où A est inversible).

 *Solution:*

- B étant nilpotente est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux nuls. On a alors $I_n + B$ semblable à $I_n + T$. Or $I_n + T$ est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1, donc $\det(I_n + B) = \det(I_n + T) = 1$.
- Supposons maintenant A inversible. Alors $A + B = A(I_n + A^{-1}B)$. Puisque A et B commutent, il en est de même de A^{-1} et de B , donc $(A^{-1}B)^n = A^{-n}B^n = 0$. Ainsi, $A^{-1}B$ est nilpotente, donc, d'après le résultat précédent, $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$ d'où $\det(A + B) = \det A \times \det(I_n + A^{-1}B) = \det A$.
- Dans le cas général, soit $A_t = A + tI_n$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. $\det(A_t)$ est un polynôme en t , donc n'a qu'un nombre fini de racines, donc A_t est inversible pour une infinité de valeurs de t . D'autre part, il est facile de vérifier que A_t et B commutent, donc, d'après le résultat précédent, on a $\det(A_t + B) = \det(A_t)$ pour une infinité de valeurs de t . Comme les deux membres de cette égalité sont deux polynômes en t , l'égalité reste vraie pour $t = 0$, ce qui donne le résultat demandé.