

EXERCICES : SÉRIES NUMÉRIQUES

Séries à termes réels positifs (ex. 1 à 11)

Exercice 1: (*) - (**)

Démontrer que chacune des séries $\sum u_n$ converge, et calculer leur somme :

$$1. u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n \geq 2)$$

$$2. u_n = \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) \quad (n \geq 1)$$

$$3. u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 1)$$

$$4. u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} \quad (n, p \geq 1)$$

$$5. u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + 1}{2^{n+1}}$$

$$6. u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right), \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}[$$

$$7. u_n = \frac{1}{2^n} \tan \left(\frac{x}{2^n} \right), \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}[$$

$$8. u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} \cos^3(3^n \theta)$$

$$9. u_n = \frac{1}{n^3 + 8n^2 + 17n + 10}$$

$$10. u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$$

$$11. u_n = \frac{4n-3}{n(n^2-4)} \quad (n \geq 3)$$

$$12. u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \quad (n \geq 1)$$

$$13. u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \quad (n \geq 1)$$

$$14. u_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$$

$$15. u_n = \frac{[\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]}{n} \quad (n \geq 1)$$

$$16. u_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \quad (x \neq \pm 1, n \geq 1)$$

(considérer $(1-x)u_n$)

$$17. u_n = 2^{n/2} \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) x^n \quad (\text{discuter selon } x \in \mathbb{R})$$

Exercice 2: (*) - (**)

Étudier la nature des séries de terme général :

$$1. \ln \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \ln \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$2. \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e$$

$$3. 2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$$

$$4. (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$$

$$5. \frac{1}{n^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}$$

$$6. n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

$$7. \frac{(\sqrt{n})^{\ln n}}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$$

$$8. \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$9. \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$$

$$10. \frac{2.4.6 \dots (2n)}{n^n}$$

$$11. \frac{n!}{\ln(n)e^{2n}}$$

$$12. \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+2)!}$$

$$13. \frac{1}{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}$$

$$14. \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$$

$$15. \frac{\ln(1 + a^n n^\alpha)}{n^\beta} \quad (a > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2)$$

$$16. n^\alpha e^{\beta \sqrt{n}} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$17. (n^\alpha + 1)^{1/\alpha} - (n^\beta + 1)^{1/\beta} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

$$18. \arccos \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \right)$$

$$19. \cos \left(\arctan n + \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad (\alpha > 0)$$

$$20. \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha}$$

$$21. \ln \left(3 \tan^2 \frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha + 1} \right) \quad (\alpha > 0)$$

$$22. \frac{a^n}{1 + a^{2n}}$$

Exercice 3: (*)

En admettant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries ci-dessous (après avoir prouvé leur convergence) :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 4: ()**

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4 + n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme.

A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 5: (*)

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ est-elle convergente ?

Calculer alors sa somme.

Exercice 6: ()**

a) Établir, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $ab \neq 1$,

$$\text{Arc tan } a + \text{Arc tan } b = \text{Arc tan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right) + k\pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k=0 & \text{si } ab < 1 \\ k=1 & \text{si } ab > 1 \text{ et } a, b > 0 \\ k=-1 & \text{si } ab > 1 \text{ et } a, b < 0. \end{cases}$$

b) En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc tan} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 7: ()**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \cdots (1+\sqrt{n})}.$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \sqrt{n} u_n.$

En déduire que la série de terme général u_n converge.

b) Étudier la nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ et en déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n.$

Exercice 8: ()**

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge.

Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Exercice 9: () - (***)**

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n}.$

a) Donner un équivalent de u_n en $+\infty.$

b) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.

Exercice 10: (★)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.
 Montrer que : la suite (u_n) converge $\iff$ la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 11: Utilisation de séries pour l'étude de suites (★★)

- Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
 - On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)
 - En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$.
- On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
 - Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
 - Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.
 - Montrer que les séries de termes généraux $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et u_n divergent.
 - Montrer que $u_n < \frac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.
 - On pose $u_n = \frac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
 - En déduire que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$.

Séries à termes quelconques. (ex. 12 à 16)**Exercice 12: (★) - (★★) - (★★★)**

Étudier la nature des séries de terme général :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $(-1)^n \tan \left(\frac{1}{n} \right)$ | 7. $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$ | 12. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$
($\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\beta \neq \alpha$) |
| 2. $\frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$ | 8. $\frac{1! - 2! + \dots + (-1)^{n+1} n!}{(n+1)!}$ | 13. $\frac{(-1)^n n}{(2n+1)(3n+1)}$
(et calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) |
| 3. $\frac{(-1)^n}{n + \sin(n)}$ | 9. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad (\alpha > 0)$ | 14. $\frac{\sin(\ln n)}{n}$ |
| 4. $\frac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$ | 10. $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$ | 15. $(-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$ |
| 5. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ | 11. $\cos \left(\pi n^2 \ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right)$ | |
| 6. $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ | | |

Exercice 13: Série des restes de la série harmonique alternée (★★)

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier l'existence de R_n .

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

c) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$R_n = A \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right).$$

En déduire la convergence de $\sum R_n$.

d) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.

Exercice 14: (★★)

Notons $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

a) Étudier la nature de $\sum f(n)$ et $\sum (-1)^n f(n)$.

b) Notons $w_n = f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge absolument.

c) Calculer la différence :

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k).$$

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$ en fonction de la constante d'Euler.

Exercice 15: Permutations de termes (★★)

On considère la série $\sum v_n$ déduite de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en écrivant dans l'ordre un terme positif, puis deux termes négatifs; ainsi :

$$v_0 = 1, v_1 = \frac{-1}{2}, v_2 = \frac{-1}{4}, v_3 = \frac{1}{3}, v_4 = \frac{-1}{6}, v_5 = \frac{-1}{8}, v_6 = \frac{1}{5} \text{ etc...}$$

Montrer que la série de terme général v_n est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 16: Produit de séries (★★★)

1. Montrer que, si α et β sont deux réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta \leq 1$, la série produit

de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta}$ est divergente.

2. Montrer que la série produit de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ par elle-même est une série convergente.