EXERCICES : SÉRIES NUMÉRIQUES, AVEC CORRIGÉS

Séries à termes réels positifs (ex. 1 à 11)

Exercice 1: ($\star$) - ($\star\star$)

Démontrer que chacune des séries $\sum u_n$ converge, et calculer leur somme :

1. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$
2. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$ $(n \geqslant 1)$
3. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geqslant 1)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$ $(n, p \geqslant 1)$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + 1}{2^{n+1}}$
6. $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$, $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$
7. $u_n = \dfrac{1}{2^n}\tan\left(\dfrac{x}{2^n}\right))$, $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$
8. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}\cos^3(3^n\theta)$
9. $u_n = \dfrac{1}{n^3 + 8n^2 + 17n + 10}$
10. $u_n = \dfrac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$
11. $u_n = \dfrac{4n-3}{n(n^2-4)}$ $(n \geqslant 3)$
12. $u_n = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ $(n \geqslant 1)$
13. $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$ $(n \geqslant 1)$
14. $u_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$
15. $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ $(n \geqslant 1)$
16. $u_n = \dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ $(x \neq \pm 1,\ n \geqslant 1)$
    (considérer $(1-x)u_n$)
17. $u_n = 2^{n/2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)x^n$ (discuter selon $x \in \mathbb{R}$)

✎ *Solution:*

1. Téléscopage : pour tout $N \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N}\big(\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n\big)\\
&= \sum_{n=2}^{N}\big(\ln(n-1) - \ln n\big) + \sum_{n=2}^{N}\big(\ln(n+1) - \ln n\big)\\
&= (\ln 1 - \ln N) + (\ln(N+1) - \ln 2) = \ln\frac{N+1}{N} - \ln 2
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=2}^{N} u_n\right) = -\ln 2$: la série converge et sa somme vaut $-\ln 2$.

2. On écrit :

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = (\ln(n+1) - \ln n) - (\ln(n+3) - \ln(n+2))$$

ce qui permet de montrer, après télescopage, que la série converge et que sa somme vaut $\ln 3$.

3. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ est :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}$$

(calcul que je ne détaille pas, à savoir faire). On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} \quad \text{(chgt d'indices)}\\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)
\end{aligned}$$

donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que la série converge et a pour somme $\dfrac{1}{4}\cdot$

4. La convergence ne pose pas de problème : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{p+1}}$, donc comparaison à une série de Riemann convergente (puisque $p+1>1$).
Notons alors S_p la somme de la série. On a :

$$\begin{aligned} pS_p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n(n+1)\dots(n+p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+p)-n}{n(n+1)\dots(n+p)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} = \frac{1}{p!}, \end{aligned}$$

donc $S_p = \dfrac{1}{p.p!}\cdot$

5. $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}\right) + \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Donc $\sum u_n$ est la somme d'une série télescopique et d'une série géométrique.
On obtient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

6. On calcule les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right).$$

Posons $v_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$. Alors par application de la formule $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ on obtient :

$$\begin{aligned} v_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} v_{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

donc $v_n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_0 \sin(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \cos(x)\sin(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2x)$.

On en déduit, pour $x \neq 0$, $v_n = \dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ d'où, en utilisant $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{\sin 2x}{2x}$ puis $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)$, cette égalité se prolongeant pour $x = 0$.

7. La somme vaut $\dfrac{1}{x} - 2\cot 2x$ (on utilise l'identité $\tan X = \cot X - 2\cot 2X$ (à démontrer !), puis télescopage)

8. La somme vaut $\dfrac{3}{4}\cos(\theta)$ (on utilise l'identité $\cos 3X = 4\cos^3 X - 3\cos X$ d'où $\cos^3 X = \dots$, puis télescopage)

9. La somme vaut $\dfrac{23}{144}$. Factoriser le dénominateur :

$$n^3 + 8n^2 + 17n + 10 = (n+1)(n+2)(n+5)$$

puis décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)(X+5)} = \frac{1/12}{X+5} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{1/3}{X+2}$$

et ensuite télescopage...

10. On fait encore une décomposition en éléments simples :

$$\frac{4X}{X^4+2X^2+9} = \frac{1}{X^2-2X+3} - \frac{1}{X^2+2X+3}$$

d'où (toutes les séries écrites ci-dessous convergent par comparaison à une série de Riemann) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2-2n+3} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}}_{\text{chgt indices } n=n'-2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2-2n+3} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-2n+3} \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

11. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{4X-3}{X(X^2-4)} = \frac{4X-3}{X(X-2)(X+2))} = \frac{3/4}{X} + \frac{5/8}{X-2} - \frac{11/8}{X+2}$$

d'où pour $N \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N} u_n &= \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{5}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{11}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{N+2} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{5}{8}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} - \frac{11}{8}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \text{ termes qui tendent vers 0 quand } N \to +\infty.\end{aligned}$$

Donc la série converge et sa somme vaut $\dfrac{167}{96}$.

12. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

On aura alors, puisque toutes les séries écrites ci-dessous convergent (attention à ne pas couper en deux la série de terme général $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$!) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} - 2\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{\text{série télescopique}} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 1 - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 3.\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ d'où après une décomposition en éléments simples : $u_n = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$.
Puis

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n &= 6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - 24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1} \\ &= 12\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 6 - 24\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n} - 1 - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la relation « bien connue » :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1) \quad \text{(où } \gamma \text{ est la cste d'Euler)}$$

on obtient

$$S_N = 12(\ln N+\gamma) - 6 - 24(\ln(2N+1)+\gamma) + 24 + 12(\ln N+\gamma) + o(1)$$

et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = 18 - 24\ln 2$.

14. La division euclidienne du polynôme $2X^3-3X^2+1$ par $X+3$ s'écrit :

$$2X^3-3X^2+1 = (X+3)(2X^2-9X+27) - 80$$

puis celle de $2X^2-9X+27$ par $X+2$ s'écrit :

$$2X^2-9X+27 = (X+2)(2X-13) + 53$$

donc

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} = \frac{(n+3)(2n^2-9n+27)-80}{(n+3)!} = \frac{2n^2-9n+27}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \\ &= \frac{2n-13}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} = \frac{2(n+1)-15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!} \\ &= \frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!}\,.\end{aligned}$$

On aura donc (toutes les séries écrites convergent, d'après le développement en série de la fonction exponentielle) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 15\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} + 53\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!} - 80\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)!} \\ &= 2\mathrm{e} - 15(e-1) + 53(e-2) - 80(e-\frac{5}{2}) = 109 - 40\mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

15. Si $n+1$ n'est pas un carré alors $u_n = 0$ donc les sommes partielles de ma série $\sum u_n$ seront toutes majorées par $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2-1}$ (série convergente !), ce qui prouve la convergence de la série (car à termes positifs), et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=2}^{+\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}\,.$$

16. On suit l'indication :

$$(1-x)u_n = \frac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{(1-x^{n+1})-(1-x^n)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}\,.$$

Il y a télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N}(1-x)u_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}$$

donc :
- Si $|x|<1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} x^{N+1} = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et a pour somme $\frac{x}{(1-x)^2}$.
- Si $|x|>1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} x^{N+1} = +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et a pour somme $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Exercice 2: (⋆) - (⋆⋆)

Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$

3. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$

4. $(\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$

5. $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

6. $n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

7. $\frac{(\sqrt{n})^{\ln n}}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$

8. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

9. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$

10. $\frac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$

11. $\frac{n!}{\ln(n)\mathrm{e}^{2n}}$

12. $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$

13. $\frac{1}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$

14. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$

15. $\frac{\ln(1+a^n n^\alpha)}{n^\beta}$ $(a>0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^2)$

16. $n^\alpha e^{\beta\sqrt{n}}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

17. $(n^\alpha+1)^{1/\alpha} - (n^\beta+1)^{1/\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$

18. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$

19. $\cos\left(\arctan n + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$

20. $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$

21. $\ln\left(3\tan^2\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1}\right)$ $(\alpha>0)$

22. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$

✎ *Solution:*

1. Pour $n \geqslant 1$: $u_n = -\ln\left(\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Or $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$, et par comparaison à une série de Riemann divergente à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

2. Faire un développement limité : $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$ donc la série diverge.

3. Faire un développement limité : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série converge.

4. On fait un développement limité : $u_n \sim \dfrac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\mathrm{e}^{n(\alpha-2)}$, donc :

- Si $\alpha \geqslant 2$, (u_n) ne converge pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ donc par le critère de Riemann, la série converge.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = 1$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et la série diverge.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: la série converge.

7. $u_n = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln n)^2 - \sqrt{n}\ln(\ln n)\right)$ donc $n^2u_n = \mathrm{e}^{2\ln n}u_n = \exp\left(2\ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \sqrt{n}\ln(\ln n)\right)$.
Or par croissances comparées, $2\ln n + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \sqrt{n}\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n}\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ et par application du critère de Riemann la série converge.

8. $u_n = \mathrm{e}^{-\ln n\ln(\ln n)} = \left(\mathrm{e}^{-\ln n}\right)^{\ln(\ln n)} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}}\cdot$ Pour n assez grand on a $\ln(\ln n) \geqslant 2$ d'où $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$: la série converge.

9. On cherche un équivalent de u_n :

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln n} - 1\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln n} = 1$, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln n = 0$ et que $\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}\cdot$
On reconnaît une série de Bertrand ; plus précisément, l'équivalent ci-dessus montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}u_n = 0$, et par application du critère de Riemann, la série converge.

10. On utilise la règle de d'Alembert. La série étant à termes > 0 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$$

donc la série converge.

11. Utiliser la formule de Stirling ou la règle de d'Alembert.

12. $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

13.
- Si $\alpha \leqslant 0$ tous les termes de la somme au dénominateur sont $\leqslant 1$ donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la série diverge.
- Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\forall k \geqslant 1,\ \int_{k-1}^{k} t^\alpha\,\mathrm{d}t \leqslant k^\alpha \leqslant \int_{k}^{k+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t,$$

d'où en sommant :

$$\int_0^n t^\alpha\,\mathrm{d}t \leqslant 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t.$$

En calculant les intégrales, il est facile d'en déduire : $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$, et par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum u_n$ converge.

14. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ donc par application du théorème de Cesàro :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1,$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et la série diverge.

15. – Si $a > 1$, $1 + a^n n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n n^\alpha$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(a^n n^\alpha)}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n \ln a}{n^\beta} = \dfrac{\ln a}{n^{\beta-1}}$ donc par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 2$.

– si $a < 1$, $\lim^n a^n n^\alpha = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a^n n^\alpha}{n^\beta}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ et la série converge par le critère de Riemann.

– Si $a = 1$, il faut alors distinguer selon que $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$ (à finir).

16. On utilise les résultats sur les croissances comparées des suites usuelles vus en Sup.

– Si $\beta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

– Si $\beta < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donc la série converge par le critère de Riemann.

– Si $\beta = 0$, $u_n = \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$, c'est une série de Riemann...

17. . Si $\alpha = \beta$, $u_n = 0$, cela n'a pas d'intérêt.

. Si $\alpha > \beta$, on fait un développement limité, compte tenu du fait que $1/n^\alpha$ et $1/n^\beta$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ (car $\alpha, \beta > 0$) :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^{1/\alpha} - \left(n^\beta \left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)\right)^{1/\beta} \\ &= n \left(\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)\right) = n \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{\beta n^\beta} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

donc puisque $\alpha > \beta$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha n^{\alpha-1}}$, et par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.

. Si $\alpha < \beta$, le même développement limité conduit à : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\beta n^{\beta-1}}$, et par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 2$.

18. On commence par chercher un équivalent de $\operatorname{Arc}\cos x$ lorsque $x \to 1^-$.

En posant $x = \cos h$ avec h au voisinage de $0+$ on a $\operatorname{Arc}\cos x = h$ et $1 - x = 1 - \cos h \sim \dfrac{h^2}{2}$ d'où $h \sim \sqrt{2(1-x)}$ (car $h \geqslant 0$) donc

$$\operatorname{Arc}\cos x \underset{x\to1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}.$$

On en déduit facilement $u_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n^3}}$ donc la série converge.

15) On connaît la relation :

$$\forall x > 0,\ \operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Donc :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{n} + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \sin\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

On peut alors conclure :

– Si $\alpha > 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et la série diverge (par comparaison à la série harmonique).

– Si $\alpha < 1$, $u_n \sim -\dfrac{1}{n^\alpha}$ et la série diverge (par comparaison à une série de Riemann).

– Si $\alpha = 1$, puisqu'on connaît le développement limité $\operatorname{Arc}\tan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, on a $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, donc la série converge (absolument).

19. $u_n = \exp\left(n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$. Or puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{1}{n} = 1$ on a $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim \cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

On en déduit : $n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{\alpha-2}}$ puis :

– Si $\alpha \geqslant 2$, u_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et la série diverge grossièrement.

– Si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2\ln n} u_n = 0$ puisque $2\ln n$ est négligeable devant $n^{2-\alpha}$, donc d'après le critère de Riemann la série de terme général u_n converge.

20. Puisque $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} = \dfrac{\pi}{6}$ et $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donc l'intérieur du ln tend vers 1, ce qui permet d'écrire :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\tan^2\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - 1.$$

Or :

$$\begin{aligned}3\tan^2\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - 1 &= 3\left(\tan^2\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - \tan^2\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 3\left(\tan\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} + \tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\tan\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - \tan\frac{\pi}{6}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 6\tan\frac{\pi}{6}\left(\tan\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - \tan\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Or par simple définition de la dérivée on a :

$$\tan x - \tan\frac{\pi}{6} \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\sim} \left(1+\tan^2\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\tan^2\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 8\tan\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi n^\alpha}{6n^\alpha+1} - \frac{\pi}{6}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{cste}{n^\alpha},$$

et par comparaison à une série de Riemann à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

21.
- Si $|a| > 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n$ donc par comparaison à une série géométrique, la série de terme général u_n est absolument convergente (donc convergente) ;
- Si $|a| < 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$ donc par comparaison à une série géométrique, la série de terme général u_n est absolument convergente (donc convergente) ;
- Si $|a| = 1$, u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$: la série diverge grossièrement.

Conclusion : la série converge si et seulement si $|a| \neq 1$.

Exercice 3: ($\star$)

En admettant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer les sommes des séries ci-dessous (après avoir prouvé leur convergence) :

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

✎ *Solution:*

Toutes les séries écrites ci-dessous convergent, cela justifie les calculs.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$

Exercice 4: ($\star\star$)

Soit la suite de terme général : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ où P est un polynôme.
A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

✎ *Solution:*

Déjà, si l'on veut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il faut nécessairement que P soit de degré 3 et unitaire. Ensuite, on pose $P(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ et on fait un développement limité. Réponse : $P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + c$.

Exercice 5: ($\star$)

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est-elle convergente ?

Calculer alors sa somme.

✎ *Solution:*

$u_n = \ln n + a\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + b\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = (a+b)\ln n + \dfrac{a+2b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ étant absolument convergente, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases}$ c'est-à-dire $a=-2,\ b=1$.

Ensuite, $u_n = \ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)$ et par télescopage on trouve $S = -\ln 2$.

Exercice 6: ($\star\star$)

a) Établir, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $ab \neq 1$,

$$\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi \quad \text{avec} \begin{cases} k=0 & \text{si } ab<1 \\ k=1 & \text{si } ab>1 \text{ et } a,b>0 \\ k=-1 & \text{si } ab>1 \text{ et } a,b<0\,. \end{cases}$$

b) En déduire : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

✎ *Solution:*

a) A l'aide de la formule d'addition pour tan on a

$$\tan\big(\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b\big) = \frac{a+b}{1-ab} = \tan\left(\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\right)$$

et deux réels ont même tangente si et seulement si ils sont égaux modulo π d'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi\,.$$

Ensuite, si par exemple $ab < 1$ on distingue deux cas :

– soit a, b sont tous deux positifs, dans ce cas, $\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b$ appartient à $[0\,;\pi[$ et $\operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$ appartient à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ puisque $\dfrac{a+b}{1-ab} > 0$ donc forcément $k=0$;

soit a, b sont tous deux négatifs , dans ce cas, $\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b$ appartient à $]-\pi\,;0]$ et $\operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ puisque $\dfrac{a+b}{1-ab} < 0$ donc forcément $k=0$;

– soit l'un est positif et l'autre négatif, et dans ce cas $\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan} b$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;pisd\right[$ ainsi que $\operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$ donc on a encore $k=0$.

On raisonne de façon similaire pour les deux autres cas.

b) En prenant $a = n+1$ et $b = -n$ on obtient :

$$\operatorname{Arc\,tan}(n+1) - \operatorname{Arc\,tan} n = \operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right),$$

donc les sommes partielles de la série proposée sont égales à :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Arc\,tan}(k+1) - \operatorname{Arc\,tan} k\right] = \operatorname{Arc\,tan}(n+1) - \operatorname{Arc\,tan} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}\,.$$

Exercice 7: (⋆⋆)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \sqrt{n}u_n$.

En déduire que la série de terme général u_n converge.

b) Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et en déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

✎ *Solution:*

a) L'égalité demandée se prouve facilement par récurrence sur n, ou bien en écrivant astucieusement :

$$u_n\sqrt{n} = u_n\left((\sqrt{n}+1)-1\right) = \sqrt{n-1}u_{n-1} - u_n$$

et en additionnant ces relations.

Les sommes partielles de la série à termes positifs Σu_n étant majorées par 1, cette série converge.

b) $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc la série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge par comparaison à une série de Riemann. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles, que l'on notera S_n, tend vers $+\infty$

Or :

$$\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+\sqrt{k})} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{n}u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \mathrm{e}^{S_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+:\infty} u_n = 1$.

Exercice 8: (⋆⋆)

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge.

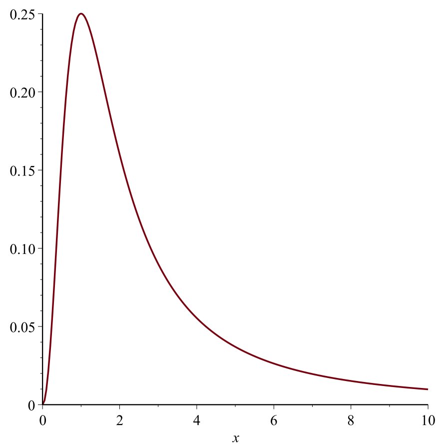
Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

✎ *Solution:*

La convergence de la série ne pose pas de problème puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

On approche alors sa somme totale par une somme partielle S_N, où N est choisi de façon que le reste R_N soit inférieur en valeur absolue à 10^{-4}.

On vérifie alors (calcul de la dérivée) que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ est décroissante pour $x \geqslant 1$:



On aura alors, par la méthode de comparaison série-intégrale (je ne détaille pas les calculs, et l'intégrale écrite ci-dessous converge) :

$$0 \leqslant R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul de cette intégrale peut se faire à l'aide d'une intégration par parties (poser $u' = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ et $v = x$..), mais plus simplement on a :

$$0 \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} N = \operatorname{Arctan} \frac{1}{N} \leqslant \frac{1}{N}$$

Il « suffit » donc de calculer S_{10^4} pour obtenir la précision demandée.

Exercice 9: (⋆⋆) - (⋆⋆⋆)

Soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \cdots + \dfrac{\ln n}{n}$ ·

a) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

b) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$ est convergente.

✎ *Solution:*

a) Comparaison série-intégrale, que l'on applique à la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$, décroissante sur $[3\,;+\infty[$: $u_n \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$.

b) • *1ère méthode :*

Cette méthode est dans la continuité de la comparaison série-intégrale faite avant.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2 n\right) = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Or pour $n \geqslant 3$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[n\,;n+1]$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$. Il en résulte que la suite v est décroissante.

On a $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} - \int_1^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ donc, à l'aide de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} v_n - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln n}{n} + \int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k} - \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=3}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} \left(\frac{\ln k}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Puisque $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ pour $k \geqslant 3$ on a $\dfrac{\ln k}{k} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc (v_n) est minorée, et par suite, elle converge.

• *2ème méthode :*

On utilise le *lien suites-séries* : la suite (v_n) converge si et seulement si la série de terme général $v_n - v_{n-1}$ converge.

Or $v_n - v_{n-1} = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{2}\ln^2 n + \dfrac{1}{2}\ln^2(n-1)$, et on fait un petit développement limité :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{1}{2}\left(\ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{1}{2}\left(\ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - 2\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $v_n - v_{n-1} = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$; puisque la série à terme positifs de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$ converge (série de Bertrand, à savoir redémontrer, ici on multiplie par $n^{3/2}$ et on utilise le critère de Rieman), par comparaison la série de terme général $v_n - v_{n-1}$ est absolument convergente, donc convergente, cqfd.

Exercice 10: ($\star$)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

Montrer que : la suite (u_n) converge $\Longleftrightarrow$ la série $\sum a_n$ converge.

Solution:

(u_n) est croissante. Si la suite (u_n) converge alors elle est bornée et $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$ donc les sommes partielles de $\sum a_n$ sont bornées. Donc cette série (à termes positifs) converge.

Si $\sum a_n$ converge, alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n}{u_n} \leqslant \dfrac{a_n}{u_0}$ donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 11: Utilisation de séries pour l'étude de suites ($\star\star$)

1. Soit (x_n) une suite définie par : $x_0 > 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) On pose $u_n = 2^{-n}\ln x_n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On étudiera la série $\sum u_{n+1} - u_n$)

c) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha^{2^n}$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

b) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

c) Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.

d) Montrer que $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et que la suite (nu_n) est croissante. On note ℓ sa limite.

e) On pose $u_n = \dfrac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

f) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

Solution:

1. a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant u_0 > 0$ et $\ell = \ell + \ell^2$, ce qui est impossible.
Étant croissante non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

b) $u_{n+1} - u_n = 2^{-n-1}\ln(x_{n+1}) - 2^{-n}\ln x_n = 2^{-n-1}\left(\ln(x_n + x_n^2) - 2\ln x_n\right) = 2^{-n-1}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right) = 0$ donc $u_{n+1} - u_n = o\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ et puisque la série $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique convergente à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc convergente.
D'après un résultat bien connu, il s'ensuit que la suite u est convergente.

c) Le problème ici est que, si l'on a un équivalent de $\ln x_n$ on ne peut pas en déduire directement un équivalent de x_n. Il faut aller plus loin dans le calcul précédent : si l'on note α la limite de la suite (u_n), on a, pour tout n , $u_n - \alpha = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k - u_{k+1} = -\sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^{-k-1}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)$ donc, la suite (x_n) étant croissante, on en tire $|u_n - \alpha| \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)\sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^{-k-1} = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)$.

Ainsi, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right) = 0$, $u_n = \alpha + o(2^{-n})$ donc $\ln x_n = 2^n\alpha + o(1)$ puis $x_n = \mathrm{e}^{2^n\alpha}\mathrm{e}^{o(1)} \sim \beta^{2^n}$ avec $\beta = \mathrm{e}^{\alpha}$.

2. a) La suite (u_n) est évidemment décroissante. De plus, pour tout $x \in [0\,;1]$, $x - x^2 = x(1-x) \in [0\,;1]$ donc par récurrence, $u_n \in [0\,;1]$ pour tout n.
(u_n) est donc une suite monotone bornée, elle converge. Sa limite ℓ vérifie alors $\ell = \ell - \ell^2$ donc $\ell = 0$.

b) $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ donc par télescopage $\sum u_n^2$ converge.

c) $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$; par conséquent, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

On a $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1-u_n)$ donc puisque $u_n \to 0$, $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$.. Par comparaison de séries de termes généraux de signes constants, les deux séries sont de même nature donc $\sum u_n$ diverge.

d) • – La propriété $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ est vraie pour $n = 0$.

– On « sait » que : $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ (sinon, faire une étude de fonction rapide...). Donc par récurrence $u_n \in \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ pour tout $n \geqslant 1$, et puisque la fonction $x \mapsto x - x^2$ est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a :

$$u_n < \frac{1}{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$$

ce qui établit l'hérédité, et démontre l'inégalité demandée par récurrence sur n.

• $(n+1)u_{n+1} - nu_n = u_n - (n+1)u_n^2 > 0$ d'après le résultat précédent, donc la suite (nu_n) est croissante. Toujours d'après le résultat précédent, elle est majorée par 1, donc elle converge vers un certain réel ℓ. On remarque que $l > 0$ puisque $\ell \geqslant nu_n$ pour tout n (remarque utile pour la suite).

e) $v_n = \ell - nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; puisque la *suite* (v_n) converge, on a immédiatement que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge !

f) On calcule : $v_{n+1} - v_n = -u_n + (n+1)u_n^2$. Or puisque $v_n \to 0$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$ (cela a un sens puisque $\ell > 0$) donc $(n+1)u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell^2}{n}$. Si ℓ était différent de 1 on aurait alors $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$ où $C = \ell^2 - \ell \neq 0$, et la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ serait divergente, contradiction.

Ainsi $\ell = 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Séries à termes quelconques. (ex. 12 à 16)

Exercice 12: (⋆) - (⋆⋆) - (⋆⋆⋆)

Étudier la nature des séries de terme général :

1. $(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$
3. $\dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$
4. $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$
5. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
6. $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
7. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$
8. $\dfrac{1!-2!+\cdots+(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!}$
9. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$ $(\alpha > 0)$
10. $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$
11. $\cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$
12. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\beta \neq \alpha$)
13. $\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)(3n+1)}$ (et calculer alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$)
14. $\dfrac{\sin(\ln n)}{n}$
15. $(-1)^n \sqrt[n]{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

✎ *Solution:*

1. Le CSSA s'applique.
2. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ donc la série est la somme de la série harmonique, divergente, et d'une série de Riemann alternée, convergente, et par suite elle diverge.

   Remarque : on peut cependant noter que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *terme général d'une série convergente : la règle de comparaison avec les équivalents ne s'applique pas ici car le terme général n'est pas de signe constant !*

3. On fait un développement limité minimaliste :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{n(1+O\left(\frac{1}{n}\right))} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et la série converge comme somme de deux séries convergentes.
On pouvait aussi utiliser le CSSA en remarquant que la fonction $x \mapsto x+\sin(x)$ est croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{3n} = \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad , \quad u_{3n+1} = \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad , \quad u_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{\ln n - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

donc par application du CSSA, les trois séries $\sum u_{3n}$, $\sum u_{3n+1}$ et $\sum u_{3n+2}$ convergent.
On écrit alors les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{\lfloor N/3 \rfloor} u_{3n} + \sum_{n=0}^{\lfloor (N-1)/3 \rfloor} u_{3n+1} + \sum_{n=0}^{\lfloor (N-2)/3 \rfloor} u_{3n+2}$$

et puisque les trois sommes à droite ont une limite quand $N \to +\infty$, il en est de même de la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ c'est-à-dire que la série de terme général u_n converge.

5. On fait un développement limité : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série diverge : somme de deux séries convergentes (celle de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est une série de Riemann alternée vérifiant le CSSA, et celle de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ qui est absolument convergente par comparaison à une série de Riemann) et d'une série divergente, celle de terme général $\dfrac{1}{n}$.

6. On fait un développement limité : $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1 = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$
donc la série diverge : somme de deux séries convergentes et d'une série divergente.

7. On fait un développement limité :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n})}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc la série de terme général u_n converge comme somme de deux séries convergentes.

8. Soit $u_n = \dfrac{1!-2!+\cdots+(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!}$ · On écrit $u_n = v_n + w_n + x_n$ avec

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad , \quad w_n = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \quad \text{et}$$

$$x_n = \frac{1!-2!+\cdots+(-1)^{n-1}(n-2)!}{(n+1)!}.$$

Il est clair que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent (méthodes habituelles, non détaillées). De plus, on a

$$|x_n| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-2} k!}{(n+1)!} \leqslant \frac{(n-2)(n-2)!}{(n+1)!} \leqslant \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge, on déduit des règles de comparaison pour les séries à termes positifs que la série de terme général x_n est absolument convergente donc convergente.
Finalement, la série proposée converge, comme somme de trois séries convergentes.

9. On fait un développement limité :

10. On fait un développement limité ($\alpha > 0$) :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}_{w_n}.$$

La série de terme général v_n converge d'après le CSSA (série de Riemann alternée) ; et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général w_n converge si et seulement si celle de terme général $\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge c'est-à-dire $2\alpha > 1$.

En conclusion, la série proposée converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

11. On fait un développement limité :

12. On fait un développement limité en distinguant les cas $\alpha > \beta$ et $\alpha < \beta$.

13. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)(3n+1)}\cdot$ Par une décomposition en éléments simples rapide on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

La série de terme général u_n est donc convergente comme somme de 2 séries alternée vérifiant le CSSA donc convergentes.

Pour calculer la somme de la série, on va plutôt calculer, plus généralement, la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$$

où a est un entier naturel non nul. Pour cela on suit exactement la même méthode que celle vue en cours pour la série harmonique alternée. On considère les sommes partielles ;

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}$$

et en remarquent que $\dfrac{1}{ak+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{ak}\,\mathrm{d}t$ on obtient, par linéarité de l'intégration :

$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} - r_n$$

où $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$. Puis la majoration

$$|r_n| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{an+a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{an+a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{an+a+1}$$

montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$.

Ainsi ; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Il est facile d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\operatorname{Arc}\tan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$; la seconde intégrale est un peu plus compliquée à calculer, voir le prochain chapitre sur l'intégration....

14. Soit $u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}\cdot$

Puisque $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+k\pi\,;\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{2n}$ pour tout n tel que $\ln(n) \in \left[-\frac{\pi}{6}+k\pi\,;\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$, soit $n \in [a_k\,;b_k]$ où $a_k = \left\lfloor \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}+k\pi}\right\rfloor + 1$ et $b_k = \left\lfloor \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}+k\pi}\right\rfloor$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a alors $\displaystyle\sum_{n=a_k}^{b_k} u_n \geqslant \frac{b_k - a_k + 1}{2b_k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_k}{b_k} + \frac{1}{b_k}\right)\cdot$

Mais $\dfrac{a_k}{b_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}+k\pi}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}+k\pi}} = e^{-\frac{\pi}{3}}$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=a_k}^{b_k} u_n\right) \geqslant \frac{1-e^{-\frac{\pi}{3}}}{2} \approx 0.324\ldots$ Or si par l'absurde la série de terme général u_n étant convergente de somme S, en notant S_n les sommes partielles, on devrait avoir $\displaystyle\sum_{n=a_k}^{b_k} = S_{b_k} - S_{a_k-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$, contradiction.

En conclusion, la série proposée diverge.

Exercice 13: Série des restes de la série harmonique alternée ($\star\star$)

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier l'existence de R_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

c) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$R_n = A\, \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right).$$

En déduire la convergence de $\sum R_n$.

d) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.

✎ *Solution:*

a) Critère de Leibniz.

b) Intégrons sur $[0,1]$ la relation

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x},$$

on obtient

$$-S_n = \ln(2) + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

Le dernier terme est majoré par $\int_0^1 x^n\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} S_n = -\ln(2)$, résultat que l'on connaissait depuis longtemps. On en déduit par ailleurs que

$$R_n = S - S_n = -\ln(2) - S_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

c) On effectue une intégration par parties, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale est clairement majorée par $\frac{1}{n+2}$, donc

$$\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit la convergence de la série $\sum R_n$ comme somme de deux séries convergentes.

d) Enfin, si on remplace R_n par son expression intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} R_n &= -\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-x)^n}{1+x}\, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x}_{\leqslant 1/(N+2)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 14: (⋆⋆)

Notons $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Étudier la nature de $\sum f(n)$ et $\sum (-1)^n f(n)$.

b) Notons $w_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ $(n \geqslant 2)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge absolument.

c) Calculer la différence :

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k).$$

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$ en fonction de la constante d'Euler.

✎ *Solution:*

a) $f(n) \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$ donc par comparaison à la série harmonique, la série $\sum f(n)$ diverge.

La fonction f est décroissante pour $x \geqslant \mathrm{e}$ donc la suite $\big((-1)^n f(n)\big)$ vérifie le CSSA pour $n \geqslant 3$ et la seconde série converge donc.

b) Minorer $f(n)$ par $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et sommer, on trouve que $w_n \leqslant 0$ et donc $|w_n| \leqslant$ la différence de deux intégrales. En sommant, ça se télescope, la suite des sommes partielles de $\sum |w_n|$ est donc majorée par une constante.

c) Cela vaut $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k)$.

La série de terme général w_n converge donc on peut écrire que, si L est sa somme : $\sum_{k=2}^{n} w_k = L + o(1)$, donc :

$$\sum_{k=1}^{2n} f(k) = \sum_{k=2}^{2n} f(k) = \sum_{k=2}^{2n} w_k + \int_1^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t = L + \frac{\ln^2(2n)}{2} + o(1).$$

On remarque alors que :

$$f(2k) = \frac{\ln 2 + \ln k}{2k},$$

soit

$$2f(2k) = \frac{\ln 2}{k} + f(k),$$

d'où :

$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} f(k) = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + L + \frac{\ln^2 n}{2} + o(1).$$

On utilise alors :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = 2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

pour trouver finalement :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(k) = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + o(1).$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}.}$$

Exercice 15: Permutations de termes (⋆⋆)

On considère la série $\sum v_n$ déduite de la série harmonique alternée $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ en écrivant dans l'ordre un terme positif, puis deux termes négatifs ; ainsi :

$v_0 = 1$, $v_1 = \dfrac{-1}{2}$, $v_2 = \dfrac{-1}{4}$, $v_3 = \dfrac{1}{3}$, $v_4 = \dfrac{-1}{6}$, $v_5 = \dfrac{-1}{8}$, $v_6 = \dfrac{1}{5}$ etc...

Montrer que la série de terme général v_n est convergente, et calculer sa somme.

✎ *Solution:*

On calcule les sommes partielles $V_{3n-1} = \sum_{k=0}^{3n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k}$.

Puis on utilise le développement asymptotique $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ qui conduit à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1))$$

et

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}(\ln(2n) + \gamma + o(1))$$

donc

$$V_{3n-1} = \frac{1}{2}\ln 2 + o(1)$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} V_{3n-1} = \frac{1}{2}\ln 2$ et puisque $V_{3n} = V_{3n-1} + \frac{1}{2n+1}$ on a aussi $\lim_{n\to+\infty} V_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$ et de la même façon $\lim_{n\to+\infty} V_{2n+1} = \frac{1}{2}\ln 2$.

Il en résulte que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum v_n$ converge, et elle a pour somme $\frac{1}{2}\ln 2$.

Morale de cet exercice : on peut modifier la somme d'une série si l'on change l'ordre de ses termes ! ! !

Exercice 16: Produit de séries (⋆⋆⋆)

1. Montrer que, si α et β sont deux réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta \leqslant 1$, la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\beta}$ est divergente.

2. Montrer que la série produit de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ par elle-même est une série convergente.

✎ *Solution:*

1. La série proposée est celle de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+1)^\beta} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha (n-k+1)^\beta}$$

Pour $x \in [0\,;n]$ posons $f(x) = (x+1)^\alpha (n-x+1)^\beta$. On calcule

$f'(x) = \alpha(x+1)^{\alpha-1}(n-x+1)^\beta - \beta(x+1)^\alpha(n-x+1)^{\beta-1} = (x+1)^{\alpha-1}(n-x+1)^{\beta-1}(\alpha n + \alpha - \beta - (\alpha+\beta)x)$

ce qui montre que f est d'abord croissante puis décroissante, son maximum étant atteint en $x = \frac{\alpha n + \alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

Un petit calcul montre ensuite que ce maximum est égal à $\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{\alpha+\beta}(n+2)^{\alpha+\beta}$.

On aura donc : $\forall k \in [\![0\,;n]\!]$, $(k+1)^\alpha(n-k+1)^\beta \leqslant \frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{\alpha+\beta}(n+2)^{\alpha+\beta}$ d'où $|u_n| \geqslant \frac{n+1}{(n+2)^{\alpha+\beta}} \frac{\alpha+\beta}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$ et finalement, lorsque $\alpha + beta \leqslant 1$, cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui montre que la série de terme général u_n diverge grossièrement.

2. Ici la série proposée est celle de terme général $u_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)}$. Or $\frac{1}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{1}{2n+2}\Big(\frac{1}{2k}$

d'où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n-2k+1}\right)}_{\text{sommes égales (changement d'indices } k'=n-k)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

– On remarque déjà que la suite (u_n) est alternée. Nous allons montrer qu'elle vérifie les hypothèses du CSSA.

– $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} = (\ln(2n+2) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \gamma + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln n$ donc $|u_n| \sim \frac{\ln n}{2n}$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

– Démontrons enfin que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

$$
\begin{aligned}
|u_n| - |u_{n+1}| &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+2) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left([(n+2)-(n+1)] \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}}_{\substack{n+1 \text{ termes tous} \\ \text{supérieurs à } \frac{1}{2n+1}}} - \frac{n+1}{2n+3} \Big) \\
&\geqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Big(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} \Big) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

En conclusion la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du CSSA, elle converge.