EXERCICES : INTÉGRALES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

Exercice 1: (⋆)- (⋆⋆)

Étudier l'existence des intégrales suivantes (que l'on ne demande pas de calculer) :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \ln x \, dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+e^x+\cos x} \, dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(x^\alpha-1)(x+1)^3} \, dx$

4. $\displaystyle\int_0^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \, dt$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}} \, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{1} (-\ln x)^\alpha \, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{x}}{\sqrt{\sinh \alpha x}} \, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x) \, dx$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t} \, dt$

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) dx \ (\alpha > 0)$

Exercice 2: (⋆)- (⋆⋆)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x \, dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} \, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \, dt$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$
(poser $t = \frac{1}{x}$))

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$

9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^n-1}{\ln t} \, dt$
(couper en deux...)

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt\right) dx$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\lfloor x \rfloor}{x^2} \, dx$

Exercice 3: (⋆⋆)

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

b) Calculer $I+J$ et en déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4: (⋆⋆)

a) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \, dt$.

b) Pour $x > 0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} \, dt$. Établir que $I(x) = \displaystyle\frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$.

(on rappelle : $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ *.)*

c) En déduire la valeur de I.

Exercice 5: (⋆⋆)

Justifier l'existence et calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$.

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de $f_a : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^a}$ sur $]0;+\infty[$ dans le cas $a \geqslant 3$ et dans le cas $1 < a < 3$.
On suppose $a \leqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de f_a en utilisant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7: (⋆⋆⋆)

a) À l'aide d'un changement de variable bien choisi, montrer que, pour $a > -1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

b) En discutant selon les valeurs de $\alpha > 0$, étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$

(*Indication : utiliser la série de terme général* $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$).

Exercice 8: *Intégrale de Dirichlet* (⋆⋆)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de I_n et calculer, par récurrence, I_{2p} et I_{2p+1}.

b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (I_{2p+1} - I_{2p}) = 0$. Qu'en déduit-on ?

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (on utilisera la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$).

Exercice 9: (⋆⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lambda$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mu$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe, et vaut $(\mu - \lambda)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

b) En déduire l'existence et la valeur des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha > -1)$$

Exercice 10: (⋆⋆⋆)

Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.