EXERCICES : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Suites de fonctions (ex. 1 à 10)

Exercice 1: ($\star$)

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0\,;1]$ on pose : $g_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$.
Montrer que cette définition a bien un sens, et que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers une fonction à préciser.

Exercice 2: ($\star\star$)

Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 3: ($\star\star$)

On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a\,;b]$ convergeant vers x. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)\,.$$

Indication : revenir aux définitions « avec des ε ».

Exercice 4: ($\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2nx}{n^2x^4+1}$.
Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5: ($\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall\, x \geqslant 0$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$.
Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 6: ($\star\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0\ ,\ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}\,.$$

Exercice 7: ($\star\star\star$)

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

Exercice 8: (⋆)

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0\,;1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

Étudier sa convergence simple sur $[0\,;1]$. La convergence est-elle uniforme sur $[0\,;1]$? sur $[\alpha\,;1]$ $(0<\alpha<1)$?

Comparer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Exercice 9: (⋆) - (⋆⋆)

Déterminer les limites éventuelles, quand n tend vers $+\infty$, de :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+...+x^n}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{n(x^3+x)\mathrm{e}^{-nx}}{nx+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10: Approximation polynomiale de $\sqrt{x}$ (⋆⋆)

On définit la suite (P_n) de polynômes par $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(X - P_n^2)$.

a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(P_n(x)+\sqrt{x}\right)\right)$.

b) Exprimer de même $P_{n+1}(x) + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n(x) + \sqrt{x}$.

c) Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x) \leqslant 1$.

d) Montrer que (P_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers $f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{cases}$

e) Donner le sens de variation de $x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et celui de $x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0\,;1]$.

f) Montrer que (P_n) converge uniformément vers f.

Séries de fonctions (ex. 11 à 18)

Exercice 11: (⋆⋆)- (⋆⋆⋆)

Étudier la convergence et calculer les sommes des séries de fonctions :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\operatorname{ch} nx.\operatorname{ch}(n+1)x}$ (utiliser la formule « bien connue » : $\operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \ldots$).

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n2^n}$ (penser à la dérivation).

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (utiliser des primitives).

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}$ (utiliser $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$).

Exercice 12: (⋆⋆)

Sur $I =]-1\,;+\infty[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

a) Montrer que S est définie et continue sur I.

b) Étudier la monotonie de S.

c) Calculer $S(x+1) - S(x)$.

d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

e) Établir : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 13:

Pour $x > 0$, on pose : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

b) Montrer que S est continue.

c) Étudier la monotonie de S.

d) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.

e) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 14: (⋆⋆)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$.

a) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la continuité de sa somme S.

c) Montrer que S est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

d) Que vaut $S(0)$? Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} S(x)$.

e) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

f) S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 15: (⋆⋆)

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Quel est le domaine de définition de f ? Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$, puis déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 16:

Pour $t > 0$, on pose :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}.$$

a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Étudier la limite de S en $+\infty$.

c) Étudier la limite de S en 0^+.

d) Établir que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 17: (⋆⋆)

a) Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ converge normalement sur $[0\,;1]$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Exercice 18: (⋆)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1]$:

$$u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x \text{ pour } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

c) En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$