EXERCICES : INTÉGRALES SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE, AVEC CORRIGÉS

Exercice 1: (⋆)- (⋆⋆)

Étudier l'existence des intégrales suivantes (que l'on ne demande pas de calculer) :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\ln x\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+e^x+\cos x}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(x^\alpha-1)(x+1)^3}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x\ln(1+x)}}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{1} (-\ln x)^\alpha\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{\sinh \alpha x}}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\,dx$

9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\,dt$

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)\,dx \ (\alpha > 0)$

✎ *Solution:*

Tous ces exercices ont été corrigés en classe.

Exercice 2: (⋆)- (⋆⋆)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ (poser $t=\frac{1}{x}$))

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$

9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^n-1}{\ln t}\,dt$ (couper en deux...)

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)dx$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,dx$

✎ *Solution:*

Dans le corrigé, les intégrales à calculer seront notées I_x où x est le numéro de l'exercice.

1. Fait en classe.
2. La fonction $f: x\mapsto xe^{-x}\sin x$ est continue sur $[0;+\infty[$; de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x)=0$ par croissances comparées (la fonction sin étant bornée), donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ étant intégrable au voisinage de $+\infty$, il en est de même de f.
   Pour le calcul, on remarque que, pour les mêmes raisons que ci-dessus, la fonction $x\mapsto xe^{-x}e^{ix}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $I_2=\mathcal{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{(-1+i)x}\,dx\right)$.
   En posant $u(x)=x$ et $v'(x)=e^{(-1+i)x}$, c'est-à-dire $v(x)=\dfrac{1}{-1+i}e^{(-1+i)x}$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)=0$ (la fonction $x\mapsto e^{ix}$ étant bornée), on peut faire une intégration par parties :
   $$\int_0^{+\infty} xe^{(-1+i)x}\,dx = \underbrace{\left[\frac{1}{-1+i}xe^{(-1+i)x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{-1+i}\int_0^{+\infty} e^{(-1+i)x}\,dx$$
   $$= -\frac{1}{(-1+i)^2}\left[e^{-x}e^{ix}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(-1+i)^2} = \frac{i}{2}$$
   et finalement : $I_2=\dfrac{1}{2}$ ·

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0\,;1[$; et en écrivant $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ on obtient $f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}\cdot$ La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ étant une fonction de Riemann intégrable au voisinage de 1, il en est de même de f.

Pour le calcul, on pose $x=\sin(t)$ avec $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ (ce changement de variable est licite puisque $t\mapsto\sin(t)$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\,;1[$). On obtient :

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$$

puis en posant $u=\tan\frac{t}{2}$:

$$I_3=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)}=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u)^2}=\left[\frac{-2}{1+u}\right]_0^1=1.$$

4. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ est continue sur $]2\,;+\infty[$. On a les équivalents :

$$f(x)\underset{x\to2^+}{\sim}\frac{1}{8\sqrt{x-2}}\quad\text{ et }\quad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{5/2}}$$

donc f est intégrable en 2 et en $+\infty$ par comparaison à chaque fois à une fonction de Riemann.

Pour le calcul, on fait le changement de variable $x=2\operatorname{ch}t$, qui réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $]2\,;+\infty[$:

$$I_4=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{4\operatorname{ch}^2t}=\frac14\left[\operatorname{th}t\right]_0^{+\infty}=\frac14\cdot$$

5. La fonction $x\mapsto\sqrt{\tan x}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et réalise une bijection strictement croissante de cet intervalle sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale proposée est donc de même nature et a même valeur que celle obtenue par le changement de variable $t=\sqrt{\tan x}$, soit $x=\operatorname{Arc}\tan(t^2)$ d'où $I_5=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. Il est alors facile de vérifier que cette intgérale est bien convergente (puisque $\dfrac{2t^2}{1+t^4}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2}{t^2}$ ...)

Pour le calcul, on effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{2t^2}{1+t^4}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{t}{t^2-\sqrt2t+1}-\frac{t}{t^2+\sqrt2t+1}\right)$$

Attention, les deux fonctions obtenues ne sont pas séparément intégrables sur $[0\,;+\infty[$! On calcule donc, par les méthodes habituelles (voir cours chapitre précédent) :

$$\int_0^x\frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac12\ln\left(\frac{x^2-\sqrt2x+1}{x^2+\sqrt2x+1}\right)+\operatorname{Arc}\tan(\sqrt2x+1)+\operatorname{Arc}\tan(\sqrt2x-1)\right)$$

puis quand $x\to+\infty$;on trouve $I_5=\dfrac{\pi\sqrt2}{2}\cdot$

6. (changeons un peu de méthode !).

La fonction $t\mapsto\dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0\,;1[$. Elle y possède donc une primitive F que l'on peut calculer par intégration par parties :

$$\begin{aligned}F(t)&=\int\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1-t^2)}{t}-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}\\&=-\frac{\ln(1-t^2)}{t}-\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1-t^2)}{t}-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\cdot\end{aligned}$$

Puisque $\ln(1-t^2)\underset{t\to0^+}{\sim}-t^2$, on a $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=0$.

En écrivant, pour $t\in]0\,;1[$: $F(t)=-\dfrac{\ln(1+t)}{t}-\ln(1+t)-\dfrac{(1-t)\ln(1-t)}{t}$, on obtient $\lim\limits_{t\to1^-}F(t)=-2\ln2$.

Finalement, $I_6=\lim\limits_{t\to1^-}F(t)-\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=-2\ln2$.

7. Puisque $x\mapsto\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^{2+\max(\alpha,0)}}$ (+le cas $\alpha=0$..), l'intégrale proposée existe pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ par comparaison à une fonction de Riemann.

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donne :

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^\alpha+1)}$$

donc $2I_7 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ et finalement : $I_7 = \dfrac{\pi}{4}$.

8. L'intégrabilité ne pose pas de problème (comparaison à une fonction de Riemann en $\pm\infty$).

Pour le calcul, poser $x = 2\operatorname{sh} t$ puis $u = \mathrm{e}^{2t}$. On trouve : $I_8 = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

9. On supposera $n \in \mathbb{N}^*$ pour la suite (le cas $n = 0$ étant immédiat).

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0\,;1[$, tend vers 0 lorsque $t \to 0^+$ et tend vers n lorsque $t \to 1^-$ (car $\ln t \underset{1}{\sim} t-1$), donc la fonction se prolonge par continuité sur $[0\,;1]$ et l'intégrale existe.

Par définition d'une intégrale convergente, on a donc $I_9 = \lim\limits_{x\to 1^-} I(x)$ où $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.
Or on peut écrire (les intégrales sont bien convergentes) :

$$I(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \,.$$

Le changement de variable $u = t^{n+1}$ donne :

$$\int_0^x \frac{t^n}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\int_0^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\ln\left(u^{1/n+1}\right)} = \int_0^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$$

donc :

$$I(x) = \int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \,.$$

Or le développement limité au voisinage de 1 : $\ln t \underset{t\to 1}{=} (t-1) + O((t-1)^2)$ permet d'obtenir

$$\frac{1}{\ln t} \underset{t\to 1}{=} \frac{1}{(t-1)\left(1+O(t-1)\right)} = \frac{1}{t-1} + O(1) = \frac{1}{t-1} + \varphi(t)$$

où φ est une fonction bornée dans un voisinage V de 1. On en tire :

$$I(x) = \int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^{n+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right| + \int_x^{x^{n+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\lim\limits_{x\to 1^-} \displaystyle\int_x^{x^{n+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (majorer $|\varphi(t)|$ par $\|\varphi\|_\infty^V$, classique), et $\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \underset{x\to 1}{\longrightarrow} n+1$ donc finalement : $I_9 = \ln(n+1)$.

10. Déjà, l'existence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est classique et a été faite en classe (à revoir).

En notant, pour $x \geqslant 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}$, F est la primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ s'annulant en 0 (existe car...), puis en notant $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ on a $G(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} - F(x)$ donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $G'(x) = -F'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \geqslant 0$.
Pour $X \geqslant 0$, une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}\int_0^X G(x)\,\mathrm{d}x &= \left[xG(x)\right]_0^X - \int_0^X xG'(x)\,\mathrm{d}x = XG(X) + \int_0^X x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= XG(X) - \left[\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^X = XG(X) + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-X^2}}{2} \,.\end{aligned}$$

Or pour $X \geqslant 1$, $0 \leqslant G(X) = \displaystyle\int_X^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_X^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-X}$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} XG(X) = 0$. Il en résulte que l'intégrale proposée existe et vaut :

$$I_{10} = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X G(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \,.$$

11. La fonction $x \mapsto \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}$ est continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$, est positive et majorée par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ donc est intégrable.

Par définition d'une intégrale convergente on peut écrire :

$$I_{11} = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{x-k}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x} + \sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \ln n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \ln - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+1.\end{aligned}$$

En faisant $n\to+\infty$, on en déduit $I_{11} = 1-\gamma$, où γ est la célébrissime constante d'Euler.

Exercice 3: ($\star\star$)

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

b) Calculer $I+J$ et en déduire les valeurs de I et J.

✎ *Solution:*

a) La fonction $t\mapsto\ln(\sin t)$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, et équivalente en 0^+ à $t\mapsto\ln t$ qui est intégrable au voisinage de 0 (intégrale de référence du cours), donc est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $t\mapsto\ln(\cos t)$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, et le changement de variable affine $t\mapsto\frac{\pi}{2}-t$, qui réalise une bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ montre directement que l'intégrale J existe et est égale à I.

b) $I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t$ (cette intégrale existe puisque I et J existent !).

Or : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t \underset{(u=2t)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ (l'intégrale obtenue est bien convergente puisque le changement de variable $t\mapsto 2t$ est $\mathscr{C}^1$-bijectif de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;\pi[$).

Et par le changement de variable $u\mapsto\pi-u$, on voit que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = I$. Donc finalement $I+J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$ d'où $I = J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 4: ($\star\star$)

a) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Pour $x>0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Établir que $I(x) = \displaystyle\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(on rappelle : $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.*)*

c) En déduire la valeur de I.

✎ *Solution:*

a) La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

En 0, elle peut se prolonger par continuité (puisque $\sin^3 t \underset{0}{\sim} t^3$), donc y est intégrable.

Au voisinage de $+\infty$, on a $|f(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, donc f y est ' par comparaison à une fonction de Riemann.

b) On a $I(x) = \displaystyle\frac{1}{4}\int_x^{+\infty}\frac{3\sin t - \sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Les fonctions $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{\sin(3t}{t^2}$ étant continues sur $[0;x[+\infty$ et intégrables au voisinage de $+\infty$ pour les mêmes raisons que ci-dessus, on peut écrire :

$$I(x) = \frac{1}{4}\int_x^{+\infty}\frac{3\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la seconde intégrale on pose $u = 3t$ (changement de variable affine donc licite) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

et le résultat demandé s'ensuit grâce à la relation de Chasles.

c) Déjà, puisque l'intégrale I est convergente, on a $I = \lim\limits_{x\to 0^+} I(x)$, par définition d'une intégrale impropre convergente.

Puis on écrit au voisinage de 0 : $\sin t = t + O(t^3) = t + t^3\varphi(t)$ où φ est une fonction bornée. On en déduit :

$$I(x) = \frac{3}{4}\left(\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{3x} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{4}\int_x^{3x} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

φ étant bornée dans un voisinage V de 0, on a, pour $x \in V$: $\left|\int_x^{3x} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty^V \int_x^{3x} t\,\mathrm{d}t$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{3x} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et finalement : $I = \dfrac{3}{4}\ln 3$.

Exercice 5: (⋆⋆)

Justifier l'existence et calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

Déjà, pour $t > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor = 0$ donc l'intégrale proposée est égale à $\displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t$.

Ensuite, la fonction $t \mapsto t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0;1]$ et bornée (car $\frac{1}{t} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{t}$) donc est intégrable.

Par définition d'une intégrale convergente, on a donc $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t$.

Or pour $n \geqslant 2$, par la relation de Chasles :

$$\int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n}\int_{1/k}^{1/(k-1)} t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n}(k-1)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1/k}^{1/(k-1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{k^2(k-1)}\,.$$

car pour $t \in \left[\frac{1}{k}\,;\frac{1}{k-1}\right[$ on a $\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor = k-1$.

Or on a la décomposition en éléments simples (je ne détaille pas les calculs, à savoir faire) :

$$\frac{2X-1}{X^2(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}$$

donc

$$\int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}$$

et en faisant $n \to +\infty$ on trouve : $I = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\right) = \dfrac{\pi^2}{12}\,.$

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de $f_a : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^a}$ sur $]0;+\infty[$ dans le cas $a \geqslant 3$ et dans le cas $1 < a < 3$.

On suppose $a \leqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de f_a en utilisant la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

✎ *Solution:*

- f_a est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient, composée de telles fonctions, et $f_a(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^a} = \dfrac{1}{x^{a-2}}$, on conclut : si $a \geqslant 3$, f_a est non intégrable sur $]0,1]$ et si $a < 3$, f_a est intégrable sur $]0,1]$.

De plus, $\forall x \in\,]0,+\infty[$, $|f_a(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^a}$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^a}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si $a > 1$, on en déduit que f_a est intégrable sur $[1,+\infty[$ lorsque $a > 1$.

Finalement : $\boxed{\text{si } 1 < a < 3,\ f_a \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[, \text{ et si } a \geqslant 3,\ f_a \text{ n'est pas intégrable sur }]0,+\infty[.}$

• On suppose $a \leqslant 1$, et on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_a(x)\,\mathrm{d}x$. Par relation de Chasles, si f_a est intégrable sur $]0,+\infty[$, la série $\sum u_n$ doit être convergente (car $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{(N+1)\pi} f_a$).

Or $u_n \geqslant \dfrac{1}{((n+1)\pi)^a}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (en linéarisant $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$).

Ainsi $u_n \geqslant \dfrac{\pi}{2\pi^a(n+1)^a}$, or $\sum \dfrac{1}{(n+1)^a}$ diverge car $a \leqslant 1$, on conclut : $\boxed{\text{si } a \leqslant 1,\ f_a \text{ n'est pas intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Exercice 7: (⋆⋆⋆)

a) À l'aide d'un changement de variable bien choisi, montrer que, pour $a > -1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

b) En discutant selon les valeurs de $\alpha > 0$, étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$

(*Indication : utiliser la série de terme général* $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$).

✎ *Solution:*

a) Changement de variable $x = \tan t$.
b) On encadre u_n :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leqslant u_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Or par le chgt de variable $t \to t - n\pi$ puis par symétrie :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}}$$

d'où l'on tire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{cste}{n^{\alpha/2}}$.

La série de terme général u_n converge donc si et seulement si $\alpha > 2$.

Enfin puisque la fonction à intégrer est positive, l'intégrale impropre proposée est de même nature que la série (détailler ...).

Exercice 8: *Intégrale de Dirichlet* (⋆⋆)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de I_n et calculer, par récurrence, I_{2p} et I_{2p+1}.

b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(I_{2p+1} - I_{2p}) = 0$. Qu'en déduit-on ?

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (on utilisera la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$).

✎ *Solution:*

a) La fonction $x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin x}$ est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale existe.

Pour $n \geqslant 2$ on calcule, en utilisant la formule « bien connue » $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$:

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(n-1)x = \left[\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Donc :

– si n est impair, $I_n - I_{n-2} = 0$, d'où l'on déduit $I_{2p+1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$ pour tout p.

– si n est pair, on aura $I_{2p} - I_{2p-2} = \dfrac{2(-1)^{p-1}}{2p-1}\cdot$ Puisque $I_0 = 0$ on en déduit

$$I_{2p} = \sum_{k=1}^{p} (I_{2k} - I_{2k-2}) = 2\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\,.$$

b) $I_{2p+1} - I_{2p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{4p+1}{2}\right)}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{4p+1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$, et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, le résultat découle du lemme de Lebesgue.

On en déduit $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_{2p} = \frac{\pi}{2}$ et ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Il est facile de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, donc on peut écrire

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

Or on montre grâce au théorème de prolongement de la dérivée que l'application φ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc par le lemme de Lebesgue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Mais par le changement de variable affine $t = nx$ on obtient $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9: (⋆⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \lambda$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mu$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe, et vaut $(\mu - \lambda)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

b) En déduire l'existence et la valeur des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{x}\,\mathrm{d}x\ ;\ \int_0^{1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha > -1)$$

✎ *Solution:*

a) Soient $X \geqslant \varepsilon > 0$. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^X \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^X \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{aX}^{bX} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Au voisinage de 0, on peut écrire $f(t) = \lambda + \varphi(t)$ où $\displaystyle\lim_{t\to0}\varphi(t) = 0$. On a alors

$$\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\lambda}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lambda\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\left|\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right| \|\varphi\|_\infty^{[a\varepsilon;b\varepsilon]}$ ce qui montre que $\displaystyle\lim_{t\to0}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$ et, finalement, $\displaystyle\lim_{t\to0}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lambda\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

On montre de même que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{aX}^{bX} \frac{f(t)}{t} = \mu\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, d'où le résultat demandé.

b) Les deux premières intégrales se déduisent immédiatement du résultat précédent.

Pour la dernière, faire le changement de variable $t = -\ln x$.

Exercice 10: (⋆⋆⋆)

Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{n}}$.