EXERCICES : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

Suites de fonctions (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆) - (⋆⋆)

Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ des intégrales suivantes (après avoir prouvé leur existence) :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$

Exercice 2: (⋆⋆)

En utilisant un changement de variable bien choisi, déterminer la limite et un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de :

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 3: (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Déterminer $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$, puis un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - \ell$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4: (⋆⋆⋆)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 5: (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, bornée. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$.

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+n}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'existence de I_n, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis déterminer un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Séries de fonctions (ex. 7 à 15)

Exercice 7: (⋆⋆)

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 8: (⋆⋆)

Montrer que, pour $x > 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt}-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Exercice 9: (⋆⋆)

Établir, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

Exercice 10: (⋆⋆)

Établir : $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 11: (⋆⋆)

Existence et calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12: (⋆⋆)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13: (⋆⋆)

Démontrer que, pour $a > 0$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$.

Exercice 14: (⋆⋆⋆)

a) Montrer que la série de terme général : $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ $\quad (n \geqslant 1)$ est convergente et calculer sa somme.

b) Montrer que la série de terme général $|u_n|$ est divergente.

Exercice 15: (⋆⋆)

Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆