EXERCICES : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES, AVEC CORRIGÉS

Suites de fonctions (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆) - (⋆⋆)

Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ des intégrales suivantes (après avoir prouvé leur existence) :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} \,\mathrm{d}t$

7. $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} x \,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$

✎ *Solution:*

Dans tous les exercices, les fonctions concernées sont toutes continues par morceaux, je ne le redirai pas à chaque fois...

1. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, la suite de fonctions $(x \mapsto \tan^n x)$ converge simplement vers la fonction nulle, et on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[,\ |\tan^n x| \leqslant 1 = \varphi(x)$$

avec φ continue et intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x = 0.$$

(on pouvait aussi appliquer le théorème sur l'intervalle fermé $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, la limite simple étant alors la fonction égale à 0 sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ et à 1 en $\frac{\pi}{4}$).

2. Sur $[0\,;+\infty[$ la suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\right)$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in [0\,;1[\\ \frac{1}{1+\mathrm{e}} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

On a la domination :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$$

avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x} = \int_{\mathbb{R}_+} f = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\,\cdot$$

3. Déjà, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{\sin^n x}{x^2}$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ que si $n \geqslant 2$ (utiliser $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et la majoration par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$...).

On ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0\,;+\infty[$ après une majoration brutale de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ ne sera pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour contourner cette difficulté, on coupe l'intégrale en deux (les deux intégrales existent) :

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

- On a, pour $n \geqslant 2$:

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\sin^n x}{x^2}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}$$

car $|\sin x| \leqslant |x|$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

- On a ensuite :

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

et la suite de fonctions $\left(x \mapsto \frac{|\sin x|^n}{x^2}\right)$ converge simplement sur $[1\,;+\infty[$ vers f continue par morceaux où $f(x) = 0$ pour tout $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

De plus on a la domination $\dfrac{|\sin x|^n}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1\,;+\infty[$ donc par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$

4. Là encore on coupe en deux (l'existence des intégrales ne pose pas de problème, avec les méthodes habituelles) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} = \int_0^{1} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\,.$$

On a :

$$\left|\int_0^{1} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et grâce à la domination $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ sur $[1\,;+\infty[$.

En conclusion, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} = 1\,.$

5. L'existence de l'intégrale proposée ne pose pas de problème pour $n \geqslant 2$ car $x \mapsto \frac{x^n}{x^{2n}+1}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $x \mapsto \frac{1}{x^n}$.

On écrit ensuite simplement (nul besoin du théorème de convergence dominée !) :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} &= \int_0^{1} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} \\ &\leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\,, \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} = 0\,.$

6.

7.

8.

9. Déjà, il est clair que l'intégrale proposée existe, puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin^n t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a la majoration $\left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable.

La fonction intégrée ne converge pas simplement aux points $t \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues :

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}|\sin^n t|\,\mathrm{d}t\,.$$

En posant $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}|\sin^n t|$, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon}\,. \end{cases}$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Exercice 2: ($\star\star$)

En utilisant un changement de variable bien choisi, déterminer la limite et un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x\,.$$

✎ *Solution:*

Le changement de variable $u = 1 - \frac{x}{n}$ donne :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x = n \int_0^1 \sqrt{1 - u^n}\,\mathrm{d}u\,.$$

Par le théorème de convergence dominée (détaillez !) :

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^n}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,.$$

Exercice 3: (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$. Déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$, puis un équivalent de $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x - \ell$ quand $n \to +\infty$.

✎ *Solution:*

f est continue sur le segment $[0\,;1]$ donc bornée d'où

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^n\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 x^n dx = \frac{\|f\|_\infty}{n+1}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (nul besoin du théorème de convergence dominée ici !).

Pour obtenir un équivalent on fait le changement de variable $t = x^n$ (ou $x = t^{\frac{1}{n}}$) :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 t f\left(t^{1/n}\right) t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{1/n} f\left(t^{1/n}\right)\mathrm{d}t.$$

Puisque $t^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln t}$ pour $t > 0$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} t^{1/n} = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{sinon}, \end{cases}$$

et en utilisant la domination $\left|t^{1/n} f\left(t^{1/n}\right)\right| \leqslant \|f\|_\infty$ sur $[0\,;1]$, le théorème de convergence dominée ainsi que la continuité de f en 1 donnent :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{1/n} f\left(t^{1/n}\right)\mathrm{d}t = f(1).$$

Ainsi, lorsque $f(1) \neq 0$ on peut écrire : $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$.

Exercice 4: (⋆⋆⋆)

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de I_n quand $n \to +\infty$.

✎ *Solution:*

- Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour $x \in [0\,;1]$. Les f_n sont continues (donc intégrables !) sur $[0\,;1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

qui est continue par morceaux sur $[0\,;1]$. De plus, on a la domination : $\forall x \in [0\,;1],\ |f_n(x)| \leqslant 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0\,;1]$, donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f = 1.$$

- $I_n - 1 = \int_0^1 f_n - 1 = \int_0^1 (f_n - 1) = \int_0^1 -\frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Dans cette intégrale on fait une i.p.p en prenant $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et l'on obtient

$$I_n - 1 = \left[-\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Or $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ donc $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'on a obtenu

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- On peut être plus précis en faisant le changement de variable $t = x^n$:

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t.$$

Il n'est pas bien compliqué d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

(la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est bien intégrable sur $]0\,;1]$ (facile)). En notant I cette intégrale on a donc :

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{I}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Reste à calculer I, ce qui se fait de façon classique en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ et le théorème d'intégration terme à terme. On trouve

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(calcul classique, déjà fait).

Exercice 5: (⋆⋆)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, bornée. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$.

✎ *Solution:*

Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{f(u/n)}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

$$|f_n(u)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}xn \vec{\to} +\infty \int_0^{+\infty}\frac{f(0)}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+n}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'existence de I_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis déterminer un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

✎ *Solution:*

- En posant $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+n}$ pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, et la majoration $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$ permet à la fois de démontrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (pas besoin de CVD ici !).
- Pour l'équivalent, on calcule facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ à l'aide du théorème de CVD, donc $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Séries de fonctions (ex. 7 à 15)

Exercice 7: (⋆⋆)

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 8: (⋆⋆)

Montrer que, pour $x > 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

Exercice 9: (⋆⋆)

Établir, pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

✎ *Solution:*

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale (il suffit de remarquer que $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ pour comparer à une fonction de Riemann), on utilise le développement en série entière :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \quad \text{donc} \quad \forall\, t \in]0\,;1],\ t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+x-1}}{n!}.$$

Pour intervertir série et intégrale, le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue s'applique sans difficulté.

Exercice 10: (⋆⋆)

Établir : $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

✎ *Solution:*

Pour $x > 0$ on a $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}$.
Ce développement en série peut se prolonger en 0 (par la valeur 1), et on obtient ainsi une série de fonctions continues sur $[0\,;1]$ qui converge normalement sur $[0\,;1]$, car $\|x \mapsto x\ln x\|_\infty^{[0;1]} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ (après étude de fonction rapide).
Il y a donc convergence uniforme sur le segment $[0\,;1]$, et le théorème d'interversion série-intégrale sur un segement vu dans le chapitre précédent s'applique. On aura donc :

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

et il ne reste plus qu'à calculer ces intégrales en faisant n intégrations par parties successives.

Exercice 11: (⋆⋆)

Existence et calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \ln t \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

On connaît le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Donc :

$$\forall t \in]0;1[,\ \ln t \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n}.$$

Posons alors $u_n(t) = -\dfrac{t^n \ln t}{n}$ pour $t \in]0;1[$. On a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $]0;1[$;
- la série de fonctions $\sum_n u_n$ converge simplement sur $]0;1[$ vers la fonction $f : t \mapsto \ln t \ln(1-t)$ (c'est le calcul ci-dessus !), qui est une fonction continue sur $]0;1[$;
- nous avons déjà démontré (exemple du cours) que les fonctions $n \mapsto t^n \ln(t)$ sont intégrables sur $[0;1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$ (intégration par parties).

  Donc les u_n sont intégrables sur $]0;1[$ et $\displaystyle\int_0^1 |u_n| = \frac{1}{n(n+1)^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à temre de Lebesgue s'applique donc et donne

$$I = \int_0^1 \ln t \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Reste à calculer la somme de cette série ; pour cela on fait une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

Exercice 12: (⋆⋆)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\,\mathrm{d}t$.

✎ *Solution:*

Utiliser le développement :

$$\forall t \in [0;1[,\ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$$

(série géométrique de raison $-t^2$).

Puisque $\displaystyle\int_0^1 t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2n+1)^2}$ (calcul fait plusieurs fois déjà), terme général d'une série convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique sans problème et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

On ne sait pas calculer explicitement la somme de cette série, appelée *nombre de Catalan* (au signe près). On a la valeur approchée : $I \approx -0,915965594$.

La seconde intégrale se déduit de la 1ère à l'aide d'une banale i.p.p.

Exercice 13: (⋆⋆)

Démontrer que, pour $a > 0$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$.

✎ *Solution:*

On utilise le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

pour écrire :

$$\forall t \in [0;1[,\ \frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{an},$$

puis on applique le théorème de convergence dominée appliqué aux séries sur l'intervalle $[0;1[$ (pas de difficulté pour majorer les sommes partielles, puisqu'il s'agit d'une série géométrique, on peut les calculer).

Notez que l'on retrouve la somme de deux séries célèbres :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14: (⋆⋆⋆)

a) Montrer que la série de terme général : $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ $(n \geqslant 1)$ est convergente et calculer sa somme.

b) Montrer que la série de terme général $|u_n|$ est divergente.

✎ *Solution:*

a) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme, produit, quotient de telles fonctions, et $\dfrac{1}{(1+t^3)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$; or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3n}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc par théorème $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La définition de u_n a donc bien un sens.

• On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{(1+t^3)^n} \end{array}\right.$. Alors :

– $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

– $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$; la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui est une fonction continue (!) ;

– $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| = \dfrac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t^3}$, et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^3}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème de convergence dominée, on conclut : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

• La série de terme général u_n est clairement alternée, son terme général tend vers 0 d'après ce qui précède, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ d'où $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$.

La série de terme général u_n vérifie le CSSA, elle converge.

• On cherche maintenant à calculer sa somme.

Les f_n sont des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n f_n(t)$ est une série géométrique de raison $\dfrac{-1}{1+t^3}$ et de premier terme $\dfrac{-1}{1+t^3}$, donc, pour $t > 0$, elle converge vers $\dfrac{-1}{1+t^3} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+t^3}}$, autrement dit :

> la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \mapsto -\dfrac{1}{2+t^3}$, qui est continue (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+^*$.

On ne peut pas appliquer ici le théorème d'intégration terme à terme, puisque l'on verra à la question **b)** que la série $\sum |u_n|$ diverge !

On va donc utiliser le théorème de convergence dominée, appliquée à la suite des sommes partielles de la série ; la seule hypothèse qui manque ici est celle de domination des sommes partielles de la série.

Notons donc $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(t)$ ces sommes partielles. D'après les formules sur la somme des termes d'une suite géométrique, on a, pour tout $t \geqslant 0$:

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{1+t^3} \right)^k = \frac{-1}{1+t^3} \frac{1 - \left(\frac{-1}{1+t^3} \right)^n}{1 + \frac{1}{1+t^3}} = - \frac{1 - \left(\frac{-1}{1+t^3} \right)^n}{2+t^3}$$

On aura donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|S_n(t)| \leqslant \frac{1}{2+t^3} \left(1 + \left(\frac{1}{1+t^3} \right)^n \right) \leqslant \frac{2}{2+t^3} = \varphi(t)$$

où la fonction φ est bien continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Les hypothèses du théorème sont bien vérifiées, on peut donc intégrer la série terme à terme, ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right) = \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2+t^3} \, \mathrm{d}t \,.$$

(pour le calcul de cette intégrale, un changement de variable permet de se ramener au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$, qui a été fait dans le chapitre d'intégration...)

b) Nous allons démontrer que $\sum |u_n|$ diverge de 3 manières différentes.

- Première méthode : utilisation d'une minoration

  L'idée est ici de minorer f_n par une fonction dont on sait calculer l'intégrale, de façon à avoir une minoration de $|u_n|$ par le terme général d'une série divergente connue. Cette minoration n'est cependant pas immédiate :

  $$|u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}$$

  puisque $t^3 \leqslant t$ sur $[0, 1]$.

  Or, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \left[-\frac{1}{(n-1)(1+t)^{n-1}} \right]_0^1 = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$.

  On a donc obtenu, pour $n \geqslant 2$, $|u_n| \geqslant v_n$ avec $v_n = \dfrac{1}{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \right)$. Puisque $v_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, la série de terme général v_n diverge, et, par comparaison de séries à termes positifs : la série de terme général $|u_n|$ diverge.

- Seconde méthode : par l'absurde

  Supposons donc, par l'absurde, que la série de terme général $|u_n|$ converge. Ses sommes partielles sont alors majorées : il existe un réel M tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant M$.

  Or

  $$\sum_{k=1}^{n} |u_k| = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^k} = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t^3)^k} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+t^3)^n}}{t^3} \, \mathrm{d}t$$

  à l'aide de la formule sur la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, et on a donc

  $$\forall a > 0 \,, \; \forall n \in \mathbb{N}^* \,, \; 0 \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+t^3)^n}}{t^3} \, \mathrm{d}t \leqslant M \quad (1)$$

  Or, sur l'intervalle $[a\,; +\infty[$ avec $a > 0$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1 - \frac{1}{(1+t^3)^n}}{t^3} \leqslant \dfrac{1}{t^3}$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ intégrable sur $[a\,; +\infty[$ (c'est pour cela que nous avons introduit ce réel $a > 0$, tout le monde suit ?).

  Il en résulte que l'on peut passer à la limite sous le signe $\displaystyle\int$ quand $n \to +\infty$ dans (1), ce qui donne

  $$\forall a > 0 \,, \; \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant M$$

  Mais cela signifierait que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc admet une limite en 0^+, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas.

  On a ainsi obtenu la contradiction cherchée.

- Troisième méthode : par l'absurde

  On utilise ici encore un raisonnement par l'absurde, mais l'argument est un peu différent, et bien plus rapide (il s'agit de la méthode à privilégier).

  Si la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n| = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} f_n$ était convergente, il en serait de même de la série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}|f_n|$ puisque les f_n sont à valeurs positives.

  Le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue impliquerait alors que la fonction $S = \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ce qui, on l'a vu, n'est pas le cas. On aboutit donc là encore à une contradiction.

Exercice 15: ($\star\star$)

Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it}-a}\,dt$.

✎ *Solution:*

Notons déjà que l'intégrale de l'énoncé a bien un sens puisque $e^{it} \neq a$ pour tout $t \in [0;2\pi]$ puisque $|a| \neq 1$.

- Supposons d'abord $|a| < 1$.

Alors, pour tout $t \in [0;2\pi]$:

$$\frac{e^{int}}{e^{it}-a} = \frac{e^{i(n-1)t}}{1-ae^{-it}}$$

et puisque $|ae^{-it}| = |a| < 1$, on a le développement en série :

$$\frac{e^{int}}{e^{it}-a} = e^{i(n-1)t}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(ae^{-it}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{i(n-1-k)t}.$$

Posons alors $u_k(t) = a^k e^{i(n-1-k)t}$ pour $t \in [0;2\pi]$. Puisque $\|u_k\|_\infty = |a|^k$, la série (géométrique) $\sum_k \|u_k\|_\infty$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_k u_k$ converge-t-elle normalement, donc uniformément, sur le *segment* $[0;2\pi]$. Le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un segment en cas de CVU (précédent chapitre) permet alors de conclure directement :

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{int}}{e^{it}-a}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k\int_0^{2\pi} e^{i(n-1-k)t}\,dt$$

Or, si $n-1-k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-1-k)t}\,dt = \left[\frac{1}{n-1-k}e^{i(n-1-k)t}\right]_0^{2\pi} = 0$, et si $n-1-k = 0$, l'intégrale est égale à 2π.

En conclusion, l'intégrale cherchée vaut 0 si $n \in \mathbb{Z}^-$ et vaut $2\pi a^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

- Dans le cas $|a| > 1$ on écrit plutôt :

$$\frac{e^{int}}{e^{it}-a} = -\frac{1}{a}\frac{e^{int}}{1-\frac{e^{it}}{a}}$$

et on fait encore un développement en série puisque $\left|\dfrac{e^{it}}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|} < 1$ (à finir) .

$\star\ \star\ \star\ \star$
$\star\ \star\ \star$
$\star\ \star$
$\star$