EXERCICES : VARIABLES ALÉATOIRES, AVEC CORRIGÉS

Variables aléatoires, généralités (ex. 1 à 4)

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire réelle, et A une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in A,\ \mathbb{P}(X = x) > 0.$$

Montrer que A est au plus dénombrable
(pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérer les ensembles $A_n = \left\{ x \in A \,\middle|\, \mathbb{P}(X = x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$).

✎ *Solution:*

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{ x \in A \,\middle|\, \mathbb{P}(X = x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$.
$\mathbb{P}(X \in A_n) = \sum\limits_{x \in A_n} \mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \in A_n) \leqslant 1$ donc le cardinal de A_n est inférieur ou égal à n (car dans la somme les $\mathbb{P}(X = x)$ sont tous $\geqslant \frac{1}{n}$).
Puis $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est la réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est au plus dénombrable.

Exercice 2: Inégalité de Tchebychev-Cantelli

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

a) Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda)$.

b) Vérifier que $\mathbb{E}((X - m + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.

c) À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$.

d) En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.

e) Démontrer que $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

✎ *Solution:*

a) Évident (les évènements écrits sont identiques).

b) On développe + linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-m+\lambda)^2) &= \mathbb{E}\big((X-m)^2+\lambda^2+2\lambda(X-m)\big)\\ &= \underbrace{\mathbb{E}\big((X-m)^2\big)}_{=\mathbb{V}(X)=\sigma^2}+2\lambda\underbrace{\mathbb{E}(X-m)}_{=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0}+\underbrace{\mathbb{E}(\lambda^2)}_{=\lambda^2}.\end{aligned}$$

c) $\mathbb{P}(X-m\geqslant\alpha)=\mathbb{P}(X-m+\lambda\geqslant\alpha+\lambda)\leqslant\mathbb{P}\Big((X-m+\lambda)^2\geqslant(\alpha+\lambda)^2\Big)$ puis on applique l'inégalité de Markov à $(X-m+\lambda)^2$.

d) On étudie la fonction $\lambda\mapsto\frac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$ et on en trouve le minimum (atteint pour $\lambda=\sigma^2/\alpha$).

e) $\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\alpha)=\mathbb{P}(X-m\geqslant\alpha)+\mathbb{P}(X-m\leqslant-\alpha)$. En reprenant les calculs précédents en remplaçant $X-m$ par $m-X$ on trouve encore $\mathbb{P}(X-m\leqslant-\alpha)=\mathbb{P}(m-X\geqslant\alpha)\leqslant\frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$ ce qui donne l'inégalité voulue.
Cette inégalité est meilleure que B.T si et seulement si :

$$\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}\leqslant\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

ce qui équivaut à $\sigma\geqslant\alpha$.

Exercice 3: Écart à la moyenne

$(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé, et $X,Y,(X_i)_{i\geqslant1}$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

a) Soit $\lambda>0$. On suppose que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda Y})$ est finie. Démontrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y\geqslant a)\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\lambda Y}\big).$$

b) On suppose de plus que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda Y})$ est finie. Déduire de la question précédente que

$$\mathbb{P}(|Y|\geqslant a)\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\lambda Y}\big)+\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-\lambda Y}\big).$$

c) **i)** Démontrer que si $\lambda\geqslant0$ et $x\in[-1\,;1]$, alors

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\leqslant\operatorname{ch}\lambda+x\operatorname{sh}\lambda\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}+x\operatorname{sh}\lambda.$$

ii) Démontrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[-1\,;1]$ et est centrée (c'est-à-dire si $\mathbb{E}(X)=0$), alors on a pour tout $\lambda\geqslant0$

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}\quad\text{et}\quad\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda X}\right)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

iii) Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans $[-1\,;1]$ et sont centrées, alors on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|}{n}\geqslant a\right)\leqslant2\mathrm{e}^{-\frac{na^2}{2}}$$

pour tout $n\geqslant1$ et tout $a\geqslant0$.

✎ *Solution:*

a) $Y\geqslant a\iff\mathrm{e}^{\lambda Y}\geqslant\mathrm{e}^{\lambda a}$ puis on applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\lambda Y}$.

b) $(|Y|\geqslant a)=(Y\geqslant a)\cup(-Y\geqslant a)$ et ces deux évènements étant disjoints, on obtient :

$$\mathbb{P}(|Y|\geqslant a)=\mathbb{P}(Y\geqslant a)+\mathbb{P}(-Y\geqslant a)$$

et le résultat découle de la question précédente appliqué à Y et $-Y$.

c) **i)** – L'inégalité de gauche peut se démontrer en étudiant la fonction différence.

– Celle de droite équivaut à démontrer $\operatorname{ch}\lambda\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$ ce qui peut se faire en écrivant les développements en série entière de ces deux fonctions :

$$\operatorname{ch}(\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}\quad\text{et}\quad\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^n$$

et il suffit de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \leqslant (2n)!$, ce qui est quasi immédiat puisque $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$ est le produit de n termes tous supérieurs à 2 (considérer à part le cas $n=0$).

ii) Pour tout $\omega \in \Omega$ on a donc

$$e^{\lambda X(\omega)} \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2}} + X(\omega)\operatorname{sh}\lambda$$

donc en utilisant la croissance puis la linéarité de l'espérance et puisque X est centrée (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X)=0$), on trouve $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

L'autre inégalité s'obtient en considérant $-X$.

iii) On applique le résultat de la 2ème question à $Y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$:

$$\mathbb{P}(|Y| \geqslant a) \leqslant e^{-\lambda a}\,\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) + e^{-\lambda a}\,\mathbb{E}\left(e^{\frac{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right)$$

Or les X_i étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\frac{\lambda X_i}{b}$ donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right)$$

D'après la question **c)ii)**, $\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda X_i}{n}}\right) \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2n^2}}$ donc finalement :

$$\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right) \leqslant \left(e^{\frac{\lambda^2}{2n^2}}\right)^n = e^{\frac{\lambda^2}{2n}}$$

On fait pareil avec l'autre quantité et l'on trouve :

$$\mathbb{P}(|Y| \geqslant a) \leqslant 2e^{-\lambda a} e^{\frac{\lambda^2}{2n}}$$

puis on obtient le résultat demandé en prenant $\lambda = na$.

Exercice 4:

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a\,;b]$.

a) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a\,;b]$.

La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.

On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités

$$t = \sum_{y \geqslant 0} y\mathbb{P}(Y=y), \quad s = \sum_{y \geqslant 0} y^2 \mathbb{P}(Y=y) \quad \text{et} \quad u = \mathbb{P}(Y \geqslant 0).$$

b) Vérifier : $t^2 \leqslant su$.

c) Calculer espérance et variance de Y. En déduire : $t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1-u)$.

d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir : $t^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{4}$.

e) Conclure : $\sigma^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

✎ *Solution:*

a) X est bornée donc admet une espérance. De plus

$$m = \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \geqslant \sum_{x \in X(\Omega)} a\mathbb{P}(X=x) = a$$

et de même $m \leqslant b$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs $\left(y\sqrt{\mathbb{P}(Y=y)}\right)$ et $\left(\sqrt{\mathbb{P}(Y=y)}\right)$:

$$\left(\sum_{y \geqslant 0} y\mathbb{P}(Y=y)\right)^2 \leqslant \sum_{y \geqslant 0} y^2 \mathbb{P}(Y=y) \sum_{y \geqslant 0} \mathbb{P}(Y=y) = su\,.$$

c) De façon immédiate $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$. On en déduit

$$t = -\sum_{y<0} y\mathbb{P}(Y = y) \text{ et } \sum_{y<0} y^2\mathbb{P}(Y = y) = \sigma^2 - s\,.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient : $t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u)$.

d) Ce qui précède implique : $t^2 \leqslant \min\{su,\ (\sigma^2 - s)(1 - u)\}$, pour $u \in [0\,;1]$ et $s \in \left[0\,;\sigma^2\right]$.
On a : $su \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u) \Leftrightarrow s + \sigma^2 u \leqslant \sigma^2$, donc :
- si $s + \sigma^2 u \leqslant \sigma^2$ alors $\min\ \{su,\ (\sigma^2 - s)(1 - u)\} = su \leqslant \sigma^2(1 - u)u \leqslant \sigma^2/4$.
- si $s + \sigma^2 u > \sigma^2$, même principe.

e) On a

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{y\geqslant 0} y^2\mathbb{P}(Y = y) + \sum_{y<0} y^2\mathbb{P}(Y = y)$$

Puisque Y est à valeurs dans $[a - m,\ b - m]$, on a

$$\sum_{y\geqslant 0} y^2\mathbb{P}(Y = y) \leqslant \sum_{y\geqslant 0} (b - m)y\mathbb{P}(Y = y) = (b - m)t$$

et

$$\sum_{y<0} y^2\mathbb{P}(Y = y) \leqslant \sum_{y<0} (a - m)y\mathbb{P}(Y = y) = -(a - m)t$$

On en déduit : $\sigma^2 \leqslant (b - a)t$.
En élevant au carré : $\sigma^4 \leqslant (b - a)^2 t^2 = \frac{(b-a)^2}{4}\sigma^2$.
Enfin, que σ soit nul ou non, on obtient :

$$\sigma^2 \leqslant \frac{(b - a)^2}{4}$$

Notons que cette inégalité est une égalité lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

Loi d'une variable aléatoire (ex. 5 à 20)

Exercice 5:

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y les plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

Déterminer les lois de X et de Y.

✎ *Solution:*

Déjà, X et Y prennent leurs valeurs dans $[\![1\,;N]\!]$.
Il est bien plus facile de calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$. En effet, on a $X \geqslant k$ si et seulement si tous les tirages ont donné un nombre $\geqslant k$. La proba qu'un tirage donne un nombre $\geqslant k$ est $\dfrac{N - k + 1}{N}$ donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \frac{(N - k + 1)^n}{N^n}\,.$$

D'où :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1) = \cdots$$

Pour Y même démarche mais on calcule cette fois $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$.

Exercice 6: Loi triangulaire

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}([\![1\,;n]\!])$. On pose $S = X + Y$.

Déterminer la loi de S, son espérance, sa variance.

✎ *Solution:*

Déjà, S est à valeurs dans $[\![2\,;2n]\!]$.

. Pour tout $k \in [\![2\,;n + 1]\!]$,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{k - 1}{n^2}$$

et si $k \in [\![n + 2\,;2n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=k-n}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{2n - k + 1}{n^2}\,.$$

(on pouvait aussi utiliser la symétrie : si $k \in [\![2\,;n+2]\!]$, $\mathbb{P}(S=2n+2-k)=\mathbb{P}(S=k)$, puisque à tout couple (i,j) tel que $i+j=k$ correspond le couple $(n-i+1,n-j+1)$ tel que $(n-i+1)+(n-j+1)=2n+2-k$).
On peut remarquer que :

$$\sum_{k=1}^{2n}\mathbb{P}(S=k)=2\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(S=k)+\mathbb{P}(S=n+1)=2\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{n^2}+\frac{n}{n^2}=\frac{n(n-1)+n}{n^2}=1$$

ouf !

- Évidemment, pour calculer espérance et variance on ne calcule pas des sommes horribles mais on utilise les propriétés du cours.
Par linéarité :

$$\mathbb{E}(S)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=2\frac{n+1}{2}=n+1$$

et puisque X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(S)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)=2\frac{n^2-1}{12}=\frac{n^2-1}{6}\,.$$

Exercice 7: Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont une proportion p de boules blanches (c'est-à-dire Np boules blanches).
On effectue un tirage sans remise de n boules dans l'urne, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de X.
Cette loi s'appelle la loi hypergéométrique, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

b) En utilisant, après l'avoir démontré, la formule de Vandermonde :

$$\forall\,(a,n)\in[\![0\,;N]\!]^2,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}=\binom{N}{n},$$

déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

✎ *Solution:*

a) $X(\Omega)\subset[\![0\,;n]\!]$; plus précisément, $X(\Omega)=[\![\max(0,n-Nq)\,;\min(n,Np)]\!]$, et

$$\forall\,k\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(avec les conventions habituelles pour les coefficients binomiaux). Il serait facile de vérifier, à l'aide de la formule de Vandermonde, que l'on a bien $\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$.

b) X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, son espérance existe et vaut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k\binom{Np}{k}}\binom{N-Np}{n-k}\\&=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\overbrace{Np\binom{Np-1}{k-1}}\binom{N-Np}{n-k}\\&\underset{k'=k-1}{=}\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{Np-1}{k}\binom{(N-1)-(Np-1)}{n-1-k}\\&\underset{VDM}{=}\frac{Np}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}=np.\end{aligned}$$

On calculerait de la même façon la variance de X, en calculant d'abord $\mathbb{E}(X(X-1))$...

Exercice 8: Loi de Pascal

On lance une pièce de monnaie où la probabilité de tomber sur Pile vaut $p \in]0\,;1[$.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile $(r \in \mathbb{N}^*)$.
Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$).

✎ *Solution:*

$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$.
Soit $k \geqslant r$. Pour que $X = k$ il faut que l'on ait obtenu $r-1$ fois Pile dans les $k-1$ premiers lancers et Pile au dernier. Donc

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)} \times p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Le développement en série entière indiqué s'obtient en dérivant r fois celui de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et on obtient :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[,\ \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{k} x^k.$$

Sous réserve (d'absolue) convergence on a, par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=r}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Or $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$ donc (toujours sous réserve de convergence) :

$$\mathbb{E}(X) = rp^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r}(1-p)^{k-r} = rp^r \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+r}{r}(1-p)^i.$$

Puisque $1-p<1$, on reconnaît la série du développement en série entière précédent ; elle est donc effectivement convergente et :

$$\mathbb{E}(X) = rp^r \times \frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}} = \frac{r}{p}\,.$$

Exercice 9: Loi binomiale négative (= loi de Pascal)

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } \mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

a) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

b) En déduire espérance et variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

✎ *Solution:*

a) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Cas $n=1$. Si X suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p alors

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{0} p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
L'évènement $X_1 + \cdots + X_{n+1} = k$ peut se décomposer en la réunion des évènements incompatibles suivants :

$$(X_1 + \cdots + X_n = \ell) \cap (X_{n+1} = k-\ell) \text{ pour } \ell \in [\![n\,;k-1]\!]$$

On en déduit par indépendance (lemme des coalitions) et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = \sum_{l=n}^{k-1} \binom{\ell-1}{n-1} p^n (1-p)^{l-n} p(1-p)^{k-l-1} \text{ puis :}$$

$$P(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = p^n(1-p)^{k-(n+1)} \sum_{l=n}^{k-1} \binom{\ell-1}{n-1}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{l=n}^{k-1}\binom{\ell-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-(n+1)}$$

Cela achève la récurrence.

b) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n}{p}$ et par indépendance des variables sommées : $\mathbb{V}(X)=n\dfrac{1-p}{p^2}\cdot$

Exercice 10:

Soit $n\in\mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ et $p\in\,]0\,;1[$ vérifiant

$$\forall\,k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k)=a\binom{n+k}{k}p^k.$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

(*Indication :* commencer par déterminer le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\cdot$)

✎ *Solution:*

En dérivant n fois :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\quad\text{pour } x\in\,]-1\,;1[,$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{k}x^k=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\cdot$$

La propriété

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$$

implique alors :

$$a=(1-p)^{n+1}$$

De plus, une nouvelle dérivation donne

$$\forall\,x\in\,]-1\,;1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}k\binom{n+k}{k}x^{k-1}=\frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}}$$

donc

$$\mathbb{E}(X)=a\sum_{k=0}^{+\infty}k\binom{n+k}{k}p^k=a\frac{(n+1)p}{(1-p)^{n+2}}=\frac{(n+1)p}{1-p}$$

De même

$$\mathbb{E}(X(X-1))=\frac{(n+2)(n+1)p^2}{(1-p)^2}$$

puis

$$V(X)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{(n+1)p}{(1-p)^2}\cdot$$

Exercice 11:

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a) Déterminer la loi de X_1.

b) Déterminer la loi de X_2.

c) Conjecturer la loi de X_n et démontrer ce résultat par récurrence sur n.

✎ *Solution:*

On note B_i l'événement ≪ on obtient une boule blanche au i-ième tirage ≫ et R_i l'événement ≪ on obtient une boule rouge au i-ième tirage ≫.

a) $X_1(\Omega) = \{0;1\}$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

b) $X_2(\Omega) = \{0;1;2\}$.
$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$
$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$
$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

c) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: ≪ $X_n(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ ≫ est vraie pour tout entier n non nul.

- La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit n un entier non nul fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Après le n-ième tirage, d'après le protocole de l'expérience il y a au plus $n+1$ boules blanches dans l'urne donc $X_{n+1}(\Omega) = [\![0\,;n+1]\!]$. (Au total il y a $n+2$ boules dans l'urne)

– $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}((X_n = 0) \cap R_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n = 0) \times \mathbb{P}_{(X_n=0)}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

– Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Pour que l'on obtienne k boules blanches au cours des $n+1$ premier tirages, il faut avoir obtenus soit $k-1$ soit k boules blanches au cours des n premier tirages. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}((X_n = k-1) \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}((X_n = k) \cap R_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(X_n = k-1)P_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-(k+1)}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

– $P(X_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}((X_n = n) \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(X_n = n) \times \mathbb{P}_{(X_n=n)}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Grace au principe de récurrence on a montré que pour tout entier n non nul, $X_n(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ et $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$: X_n suit la loi uniforme sur $[\![0\,;n]\!]$.

Exercice 12:

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir face est égale à $\frac{1}{3}$.

Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs. Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

On note de plus F_i l'événement ≪ obtenir face au i-ème lancer ≫.

a) Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, $(X = 5)$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F_i}$ Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}.$$

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.

d) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution:

a)
- $(X = 2) = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ donc $p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (car les lancers sont indépendants)
- $(X = 3) = F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}$ donc $p_3 = \frac{4}{27}$
- $(X = 4) = (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4})$ donc $p_4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$
- $(X = 5) = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4} \cap \overline{F_5})$

  donc $p_5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{243}$

b) $(F_1, \overline{F_1})$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_n = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(X = n) + \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(X = n).$$

Or, sachant que F_1 est réalisé, obtenir $(X = n)$ revient à obtenir deux piles consécutifs au $(n-1)$-ième lancer (l'obtention de face au premier lancer n'influence pas la suite) donc $\mathbb{P}_{F_1}(X = n) = \mathbb{P}(X = n-1) = p_{n-1}$.
De plus, sachant que $\overline{F_1}$ est réalisé, on doit nécessairement obtenir F_2 et ensuite cela revient à obtenir deux piles consécutifs au $(n-2)$-ième lancer. Donc $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(X = n) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X = n-2) = \frac{1}{3} p_{n-2}$.
On a donc bien $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{9} p_{n-2}$.

c) (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{4}{9}$.
Équation caractéristique : $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$ de solutions $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$.
On a donc $p_n = A\left(\frac{2}{3}\right)^n + B\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et on calcule A et B grâce à p_1 et p_2.
En conclusion on a $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

d) X admet une espérance car la série $\sum n p_n$ est la somme de deux séries dérivées premières de la série géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3} n \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{4}{9} \frac{1}{(1+1/3)^2} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

(on a utilisé la formule : $\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, obtenue par dérivation de série entière).)

Exercice 13:

Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées 0, 1, 2, ... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_1, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

b) On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

c) Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de probabilité de X_n, puis $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

✎ *Solution:*

a) Après 1 saut, la puce est soit sur la case 1 soit sur la case 2, donc $X_1(\Omega) = \{1,2\}$. De plus d'après l'énoncé $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

Donc X_1 suite la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$ et ainsi $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}$.

b) Y_n est la variable aléatoire qui compte le nombre de réalisations de l'événement « la puce saute d'une case » (qui est de probabilité $\frac{1}{2}$) au cours de n expériences (n sauts) qui se réalisent dans des conditions identiques. Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

On a donc $Y_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in Y_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

De plus d'après le cours $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{4}$.

c) Lorsque $Y_n = k$ cela signifie qu'au cours de ses n sauts la puce a fait k sauts d'une case et $n-k$ sauts de 2 cases donc elle est arrivée à la case numéro $k + 2(n-k)$ c'est-à-dire $X_n = k + 2(n-k) = 2n - k$.
On a donc $X_n = 2n - Y_n$ et on peut en déduire que $X_n(\Omega) = [\![n;2n]\!]$ et pour tout $k \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n-k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{2n-k}$$

De plus $\mathbb{E}(X_n) = 2n - \mathbb{E}(Y_n) = \frac{3n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = (-1)^2\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 14: (⋆)

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. Le dé est truqué et la probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués lors de la partie.

a) Quelle est la loi de X ?

b) En déduire la probabilité de gagner de chacun des joueurs. Montrer qu'il est quasi certain que le jeu s'arrête.

✎ *Solution:*

a) X correspond au rang du 1er succès dans une suite d'épreuves de Bernouill, donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

b) L'évènement A=« le 1er joueur gagne » est la réunion disjointe des évènements $(X = 3k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Donc $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{3k} = \frac{p}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}$ en notant $q = 1-p$.

On trouve de la même manière $\mathbb{P}(B) = \frac{q}{1+q+q^2}$ et $\mathbb{P}(C) = \frac{q^2}{1+q+q^2}$.

On remarque que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P} - C) = 1$, ce qui signifie que, presque sûrement, l'un des trois joueurs gagne, ou encore qu'il est quasi certain que la partie se termine.

Exercice 15:

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X brouzoufs de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X brouzoufs de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

a) En calculant $p+q$ et $p-q$, déterminer la valeur de p et de q.

b) Déterminer l'espérance des gains de chacun.

✎ *Solution:*

a) Si r est la probabilité que la partie soit nulle, on a $p+q+r=1$ donc $p+q = 1-r = 1-\mathbb{P}(X=0) = 1-\mathrm{e}^{-a}$.
D'autre part :

$$\begin{aligned} p-q &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2n+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2n) \\ &= \mathrm{e}^{-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{n!}\right) = \mathrm{e}^{-a}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}a^k}{k!} = \mathrm{e}^{-a}(1-\mathrm{e}^{-a}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$p = \frac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{2}.$$

b) Notons G le gain de Pierre. Si X est pair non nul alors $G=-X$ sinon $G=X$.
G admet une espérance si la série de terme général $n\mathbb{P}(G=n)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à dire que la série de terme général $n\mathbb{P}(X=n)$ l'est ce qui est le cas puisque X suit la loi de Poisson donc son espérance existe. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-2n)\frac{a^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{-a} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{(-1)^n a^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-a)^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-a} = -(-a)\mathrm{e}^{-a} = a\mathrm{e}^{-2a}. \end{aligned}$$

L'espérance de gain de Paul est évidemment égale à -$\mathbb{E}(G)$.

Exercice 16:

Soient $p \in]0;1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
Une bactérie se trouve dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$.
À chaque instant à partir de $t=1$ on envoie un rayon laser dans l'enceinte qui, à chaque tir et de façon indépendante, a une probabilité p de toucher la bactérie.
La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée r fois.
On note X sa durée de vie.

Déterminer la loi de X puis calculer son espérance si elle existe.

✎ *Solution:*

$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\} \cup \{+\infty\}$.
Pour $n \geqslant r$, l'évènement $(X=n)$ correspond au fait que la bactérie a été touchée $r-1$ fois lors des $n-1$ premiers tirs et a été touchée au n-ième.
Donc : $\mathbb{P}(X=n) = \left(\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}q^{n-r}\right)p = \binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r}$ en posant $q = 1-p$.
On a alors :

$$\sum_{n=r}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+r-1)!}{k!}q^k.$$

Cette dernière somme s'obtient en dérivant $r-1$ fois la série entière $\sum x^n$ (classique) et permet de trouver $\sum_{n=r}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = 1$ d'où l'on déduit $\mathbb{P}(X=+\infty) = 0$.

La série de terme général $n\mathbb{P}(X=n)$ converge car son terme général est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=r}^{+\infty} n\binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r} = \frac{p^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+r)!}{k!}q^k = \frac{p^r}{(r-1)!}\frac{r!}{q^{r+1}} = \frac{r}{p}.$$

Exercice 17:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$

✎ *Solution:*

Par le théorème de Transfert

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)$$

donc : $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1}) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.

Exercice 18:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres p et q respectivement.
Calculer l'espérance de $Z = \max(X, Y)$.

✎ *Solution:*

On a

$$(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

donc

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(Y > n) - \mathbb{P}(X > n,\ Y > n)$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(Y > n) - \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n)$$

Puisque les lois de X et Y sont géométriques

$$\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n(1-q)^n.$$

Or

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)$$

donc :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq} .$$

Exercice 19:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres p et q respectivement.
Calculer $\mathbb{P}(Y > X)$.

✎ *Solution:*

L'évènement $(Y > X)$ est la réunion disjointe des évènements $(X = k) \cap (Y > k)$ lorsque k décrit $\mathbb{N}^*$.
Par indépendance, $\mathbb{P}(X = k) \cap (Y > k) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k) = p(1-p)^{k-1}(1-q)^k$.
On somme et on trouve que la probabilité demandée vaut $\frac{p(1-q)}{p+q-pq}$.

Exercice 20:

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

a) Par quelle loi peut-on modéliser la variable $X_{k+1} - X_k$?

b) En déduire l'espérance de X_N.

✎ *Solution:*

a) On a $X_{k+1} - X_k = n$ si et seulement si on tire $n-1$ images déjà obtenues puis une image nouvelle. La proportion du nombre d'images déjà obtenues est k/N et donc

$$\mathbb{P}(X_{k+1} - X_k = n) = \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-k}{N}\right) = \frac{k^{n-1}(N-k)}{N^n}\ .$$

On identifie une loi géométrique de paramètre $p = (N-k)/N$ et d'espérance $N/(N-k)$.

b) Par télescopage

$$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k) + \mathbb{E}(X_1) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

On remarque que $\mathbb{E}(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\ln N$...

Couples de variables aléatoires (ex. 21 à 25)

Exercice 21:

Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou R : par exemple si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR\ldots$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième ($RRRRRR$) est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

a) Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.

b) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

c) En déduire la loi de X_2.

d) En considérant $\mathbb{P}((X_1 = 1)\cap(X_2 = 1))$ montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

✎ *Solution:*

a) On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on lance le dé indéfiniment donc la première série peut être de n'importe quelle longueur non nulle.
De plus soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[X_1 = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1}) \cup (R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1})$ donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}$$

Si la série $\sum k\mathbb{P}(X_1 = k)$ est absolument convergente, X_1 admettra une espérance. En cas de convergence on aura :

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k$$
$$= \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

On voit ici deux séries dérivées premières de série géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ donc ce sont deux séries convergentes.
Ainsi X_1 admet une espérance et

$$E(X_1) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\frac{1}{(1-1/6)^2} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\frac{1}{(1-5/6)^2} = \frac{26}{5}$$

b) On a $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in X_1(\Omega)$ et $j \in X_2(\Omega)$. On peut écrire :

$$[X_1 = k]\cap[X_2 = j] = \Big(B_1 \cap\cdots\cap B_k \cap R_{k+1} \cap\cdots\cap R_{k+j} \cap B_{k+j+1}\Big)$$
$$\cup\Big(R_1 \cap\cdots\cap R_k \cap B_{k+1} \cap\cdots\cap B_{k+j} \cap R_{k+j+1}\Big)$$

donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants :

$$\mathbb{P}((X_1 = k)\cap(X_2 = j)) = \frac{1}{6^k}\times\frac{5^j}{6^j}\times\frac{1}{6} + \frac{5^k}{6^k}\times\frac{1}{6^j}\times\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{5}{6}\right)^j + \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{6}\right)^j.$$

c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_1 = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = j)) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6} \times \frac{1/6}{1-1/6} + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \times \frac{5/6}{1-5/6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{36} + \frac{25}{36} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{j-1}\end{aligned}$$

d) On a $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{5}{18} \times \frac{13}{18} = \frac{65}{324}$.
On a donc $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1)$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 22:

Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$, de la façon suivante :
- Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance n fois sa pièce. On appelle alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

Question préliminaire : Montrer que pour tout $x \in]-1\,;1[$;

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

a) Déterminer la loi de N.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la loi de X sachant $(N = n)$.

c) En déduire la loi de X.

d) On considère B et G deux variable aléatoire indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

i) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.

ii) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.

iii) En déduire $\mathbb{E}(X)$.

✎ *Solution:*

a) La variable aléatoire N correspond au rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves identiques. N suit donc la loi géométrique de paramètre p :

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(N = n) = (1-p)^{n-1}p$$

b) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on chercher à calculer pour tout entier k $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$.
Lorsqu'on sait que $(N = n)$ cela signifie que X compte le nombre de réalisation de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours de n réalisations identiques d'une épreuve. La loi conditionnelle de X à $(N = n)$ est donc la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P_{(N=n)}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((N = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ on a pour tout entier $k > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-1}p\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = p^{k+1}q^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(q^2)^n \\ &= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \times \frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}} = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}q^n = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(q^2)^n = \frac{pq^2}{q(1-q^2)} = \frac{q}{1+q}$.

d) 1) On a $BG(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\mathbb{P}(BG = 0) = \mathbb{P}(B = 0) = 1 - p'$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(BG = k) = \mathbb{P}((B = 1) \cap (G = k)) = \mathbb{P}(B = 1)\mathbb{P}(G = k) = p' \times (1 - p')^{k-1} p' = p'^2 (1 - p')^{k-1}$$

2) On choisit $p' = 1 - \dfrac{q}{q+1} = \dfrac{1}{1+q}$. On a bien alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(BG = 0)$ et de plus $p'^2(1-p')^{k-1} = \dfrac{1}{(1+q)^2} \times \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k-1}} = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$ donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(BG = k)$.

3) Comme X et BG ont la même loi, elles ont la même espérance. On a donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(BG)$. Or B et G sont indépendantes donc

$$\mathbb{E}(BG) = \mathbb{E}(B)\mathbb{E}(G) = p' \times \frac{1}{p'} = 1$$

et donc $\mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 23:

Un insecte pond des œufs. Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres œufs. Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

a) Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$.

b) En déduire la loi de Z ?

c) Quelle est l'espérance de Z ?

✎ *Solution:*

a) Si l'on sait que $X = n$, le nombre d'œufs qui ont éclos suit la loi binomiale de paramètre p donc

$$\mathbb{P}(Z = k \mid X = n) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

b) On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k \mid X = n)\mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Z suit donc la loi de Poisson de paramètre λp.

c) Formule du cours : $\mathbb{E}(Z) = \lambda p$.

Exercice 24:

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$.

a) Quelle est la loi de Y_i ?

b) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

✎ *Solution:*

1. On a $Y_i(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1)) = p \times p = p^2$ car les variables X_i sont indépendantes. Donc on a $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - p^2$.
Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2.

2. D'après la linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = np^2$.

On sait aussi que $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \text{cov}(Y_i, Y_j)$.
Or $\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{P}(Y_iY_j = 1) = \mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1) \cap (X_j = 1) \cap (X_{j+1} = 1))$.
Donc si $j \neq i+1$ alors $\mathbb{E}(Y_iY_j) = p^4$ et si $j = i+1$, $\mathbb{E}(Y_iY_j) = p^3$.
Donc si $j \neq i+1$ alors $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ et si $j = i+1$, $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3(1-p)$.
On a donc $\mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)(n+3np-2p)$.

Exercice 25:

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer la loi marginale de Y.

c) Démontrer que :

$$\forall\, x \in]-1;1[,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

puis reconnaître la loi de X.

d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

✎ *Solution:*

a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité : $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k,\ Y=n) = 1$.
En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k,\ Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(2a(1-p))^n = p\frac{1}{1-(2a(1-p))}$$

On est donc amené à résoudre l'équation

$$1 - 2a(1-p) = p$$

ce qui conduit à la solution $a = 1/2$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$,
$\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k,\ Y=n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p(1-p)^n = p(1-p)^n$
c) Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k} p(\frac{1-p}{2})^n = p(\frac{1-p}{2})^k \frac{1}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}}$$

En simplifiant

$$\mathbb{P}(X=k) = (1 - \frac{1-p}{1+p})(\frac{1-p}{1+p})^k$$

d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathbb{P}(X=k,\ Y=n) \neq \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n)$$

pour $k = n = 0$.

Fonctions génératrices (ex. 26 à 33)

Exercice 26: (✍)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et k pour que la suite (p_n) définie, pour $n \geqslant 0$, par $p_n = k\left(\frac{a}{a+1}\right)^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

✎ *Solution:*

On écrit que $p_n \geqslant 0$ pour tout n et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Cela équivaut à : $a \geqslant 0$ et $k = \frac{1}{a+1}$ ·
On trouve ensuite que la fonction génératrice est l'application $t \mapsto \dfrac{1}{a+1-at}$ (banals calculs sur les séries géométriques).

Exercice 27:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Calculer
$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

✎ *Solution:*

a) Par la formule de transfert
$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p$
Or
$$\sum_{k=r}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$
donc
$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = (1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}$$

b) La fonction génératrice de X est
$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{p}{p-1} + \frac{p}{1-(1-p)t}\frac{p}{1-p}$$
Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$G_X^{(r)}(t) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X) = \frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}$$
En particulier
$$G_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}\cdot$$

Exercice 28:

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

a) Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.

b) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.

c) Exprimer le développement en série entière de $\frac{1}{(1-t)^m}$ ·

d) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

✎ *Solution:*

a) X suit la loi géométrique de paramètre p.

b) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(X = n)$ est la réunion des évènements $(X_1+\dots+X_n = m)$ et $(X_n = 1)$ soit encore $(X_1+\dots+X_{n-1} = m-1)$ et $(X_n = 1)$.
Par indépendance
$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X_1+\dots+X_{n-1} = m-1)\mathbb{P}(X_n = 1).$$
Puisque $X_1+\dots+X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$ et $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on obtient
$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}.$$
et cette écriture vaut aussi quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.

c) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1t-)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m-1}{n+m-1} \text{ pour } t \in]-1,1[$$

d) Par définition

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-*m} t^n.$$

d'où après chgt d'indices

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} (pt)^m ((1-p)t)^n = \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{m}{p} \cdot$$

Exercice 29:

Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right) = \mathbb{P}\left(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14\right)$$

b) Déterminer la fonction génératrice de la variable aléatoire :

$$Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$$

c) En déduire la valeur de

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2\right).$$

✎ *Solution:*

a) Les évènements $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$ et $(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$ sont identiques.

b) Puisque X_1 est uniformément distribuée sur $[\![1\,;6]\!]$

$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{6}(t + t^2 + \cdots + t^6) = \frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t} = G_{X_2}(t)$$

De même, $7 - Y_i$ est uniformément distribuée sur $[\![1\,;6]\!]$ et par somme de variables aléatoires indépendante

$$G_Z(t) = \left(\frac{t}{6}\frac{1-t^6}{1-t}\right)^4$$

c) Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient de t^{14} dans le développement en série entière de $G_Z(t)$. Pour cela, on écrit

$$G_Z(t) = \frac{t^4}{6^4}\frac{(1-t^6)^4}{(1-t)^4} = \frac{t^4}{6^4}(1 - 4t^6 + 6t^{12} - \cdots) \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{3} t^n$$

Le coefficient de t^{14} est

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = \frac{1}{6^4}\left(\binom{13}{3} - 4\binom{7}{3}\right) = \frac{146}{6^4} \simeq 0,11$$

Un calcul direct est aussi possible en évaluant
$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = i) = \dfrac{\min(i-1, 13-i)}{6^2}$ pour $i \in [\![1\,;12]\!]$ auquel cas

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = \frac{1}{6^4}\sum_{i=2}^{12} \min(i-1, 13-i)^2.$$

Exercice 30:

On veut montrer qu'il n'est pas possible de truquer un dé de façon que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$.

Pour cela on raisonne par l'absurde, et on note p_i pour $1 \leqslant i \leqslant 6$ la probabilité que le lancer de dé donne le numéro i. On note aussi X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire donnant le résultat du 1er lancer (resp du 2ème).

En considérant les fonctions génératrices de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$, aboutir à une contradiction.

✎ *Solution:*

Les fonctions génératrices de X_1 et X_2 sont toutes deux égales à $f : x \mapsto \sum_{i=1}^{6} p_i x^i$.

Celle de $X_1 + X_2$ est $g : x \mapsto \frac{1}{11}(x^2 + \cdots + x^{12})$.

On ne peut pas avoir $g = f^2$ car les racines de g dans $\mathbb{C}$, excepté 0, sont toutes simples alors que celles de f^2 sont au moins doubles.

Exercice 31:

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geqslant 1}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Longleftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$.

c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m.

✎ *Solution:*

a) S_1 suit une loi géométrique de paramètre p et $G_{S_1}(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

b) $S_m - S_{m-1}$ suit aussi une loi géométrique de paramètre p.

c) Or ces variables aléatoires sont indépendantes car la probabilité d'un évènement de la forme

$$(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \ldots, S_m - S_{m-1} = n_m)$$

est celle de l'évènement

$$X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \ldots = X_{n_1+\ldots n_m} = 1$$

et ces variables sont indépendantes.

Donc puisque $S_m = \sum_{k=1}^{m} S_k - S_{k-1}$ $(S_0 = 0)$ on a

$$G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1 - qt}\right)^m$$

d'où avec le DSE de $\dfrac{1}{(1 - X)^m}$

$$G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$$

et

$$\mathbb{P}(S_m = n) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m.$$

Exercice 32: (⋆⋆⋆)

Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0\,;1[$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes.
On pose :

$$X = \sum_{k=1}^{N} X_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$$

a) Pour $t, u \in [-1\,;1]$, exprimer à l'aide de la fonction génératrice de N

$$G(t,u) = \mathbb{E}\left(t^X u^Y\right)$$

b) On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

c) Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que N suit une loi de Poisson.

✎ *Solution:*

a) Par définition

$$\mathbb{E}(t^X u^Y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} t^k u^l \mathbb{P}(X = k,\ Y = \ell)$$

En regroupant par paquets selon la valeur de $X + Y$

$$\mathbb{E}(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \mathbb{P}(X = k,\ Y = n - k)$$

Or

$$(X = k,\ Y = n - k) = (X_1 + \cdots + X_n = k) \cap (N = n)$$

donc

$$\mathbb{E}(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k u^{n-k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathbb{P}(N = n)$$

en notant $q = 1 - p$. On obtient ainsi

$$\mathbb{E}(t^X u^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)(pt + qu)^n = G_N(pt + qu)$$

b) Si N suit la loi de Poisson alors $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ puis

$$G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

En particulier

$$G_X(t) = G(t,\ 1) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \text{ et } G_Y(t) = G(1,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)}$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λp tandis que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.
De plus

$$G(t,\ u) = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)} \times \mathrm{e}^{\lambda q(u-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu q}\frac{(\lambda q)^l}{\ell!} t^k u^l$$

En identifiant les coefficients (ce qui est possible en considérant une série entière en u dont les coefficients sont des séries entières en t), on obtient

$$\mathbb{P}(X = k,\ Y = \ell) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$$

Les variables X et Y sont bien indépendantes.

c) Si les variables X et Y sont indépendantes alors t^X et u^Y aussi donc

$$G(t,\ u) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(u^Y) = G(t,\ 1)G(1,\ u)$$

puis

$$G_N(pt + qu) = G_N(pt + q)G_N(p + qu)$$

Posons $f(t) = G_N(t+1)$ définie et continue sur $[-2\,;0]$ avec $f(0) = G_N(1) = 1$. On a

$$f(pt + qu) = G_N(p(t+1) + q(u+1)) = G_N(pt+1)G_N(1+qu) = f(pt)f(qu)$$

ce qui donne

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

pour $x \in [-2p\,;0]$ et $y \in [-2q\,;0]$. Pour $y \in [-2\,;0[$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

On choisit $x \in [-2p\,;0[$ tel que $f(x) \neq 0$ (ce qui est possible par continuité car $f(0)=1$) . Le premier membre admet une limite finie quand $y \to 0$ car f est assurément dérivable sur$]-2\,;0[$. On en déduit que le second membre admet la même limite et donc f est dérivable en 0 avec la relation

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Posons $\lambda = f'(0)$ et sachant $f(0) = 1$, on obtient $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $[-2p,\ 0]$ puis $G_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ sur $[1-2p\,;1]$
Si $p \geqslant 1/2$, ceci détermine G_N au voisinage de 0 et l'on reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.
Sinon, $q \geqslant 1/2$ et il suffit de raisonner en la variable y plutôt que x.

Exercice 33: Somme aléatoire de variables aléatoires (⋆⋆⋆)

Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

a) Établir $G_S(t) = G_N\left(G_X(t)\right)$ pour $|t| \leqslant 1$.

b) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

✎ *Solution:*

a) Par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1+\ldots X_k = n)$$

donc

$$G_S(t) = \sum_n \sum_k \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1+\ldots X_k = n)t^n$$

Il s'agit d'une famille sommable donc on peut permuter :

$$G_S(t) = \sum_k \mathbb{P}(N=k)\sum_n \mathbb{P}(X_1+\ldots X_k = n)t^n = \sum_k \mathbb{P}(N=k)G_{X_1+\ldots+X_k}(t)$$

Par indépendance des variables $G_{X_1+\ldots+X_k}(t) = G_X(t)^k$, ce qui donne le résultat.

b) Si N et X admettent une espérance alors G_N et G_X sont dérivables en 1 donc G_S aussi et

$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'(G_X(1)) = G_X'(1)G_N'(1).$$