EXERCICES : ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1: ($\star$)

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure euclidienne canonique) canoniquement associés aux matrices :

$$\textbf{a)}\ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c)}\ C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2: ($\star\star$)

Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale positive si et seulement si a, b, c sont les racines d'une équation de la forme $x^3 - x^2 + k = 0$, k étant un réel tel que $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{4}{27}$.

Exercice 3: ($\star\star$)

Déterminer les conditions sur les réels $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ pour que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1-u & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-v & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-w \end{pmatrix}$$

soit orthogonale (on supposera α, β, γ non nuls).
Démontrer que c'est alors la matrice d'une réflexion que l'on caractérisera.

Exercice 4: ($\star\star$)

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Exercice 5:($\star\star$)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$. Cas d'égalité ?

Exercice 6:($\star\star$)

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant :

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle x \mid y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) \mid f(y) \rangle = 0.$$

a) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.

b) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall\, x \in E, \|f(x)\| = \alpha\, \|x\|.$$

c) Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha g$.

Exercice 7:($\star\star$)

Dans un espace euclidien E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

(i) f est une isométrie vectorielle ;

(ii) $f^2 = -\mathrm{Id}_E$;

(iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x.

Exercice 8:($\star\star\star$)

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. A l'aide de la méthode de Schmidt, prouver que : $|\det(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \|x_1\|.\|x_2\|.\ldots.\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Exercice 9:($\star\star\star$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telles que : $AA^\top = P(A^\top A)P^{-1}$.

Exercice 10: Matrices et déterminants de Gramm. ($\star\star\star$)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Étant donnés p vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de E, on définit leur matrice de Gramm $G(v_1, \ldots, v_p)$ par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2 \;,\; G_{ij} = \langle v_i \,|\, v_j \rangle$$

(ainsi, $G(v_1, \ldots, v_p)$ est une matrice carrée symétrique d'ordre p).

a) Montrer que le rang et le déterminant de $G(v_1, \ldots, v_p)$ ne changent pas si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.
En déduire que le rang de $G(v_1, \ldots, v_p)$ est égal au rang de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$.

b) On suppose ici $p = n$. Exprimer $\det G(v_1, \ldots, v_p)$ en fonction du déterminant de $(v_1, \ldots, v_p)$ dans une base orthonormée de E.

c) Application : Montrer que si A est une matrice réelle carrée d'ordre n, on a : $\mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}\,A$.

d) Application : Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de F. Exprimer, pour tout vecteur a de E, le déterminant de $G(a, v_1, \ldots, v_p)$ en fonction de la distance de a à F, et en déduire une expression de cette distance (on pourra remarquer que l'on ne change pas ce déterminant en remplaçant a par $a - p(a)$, où p est la projection orthogonale sur F).

Exercice 11: ($\star\star$)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

Montrer que $u : P \mapsto (X^2-1)P'' + XP'$ est un endomorphisme symétrique pour ce produit scalaire.
Déterminer ses éléments propres.

Exercice 12: ($\star$)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel avec $k \neq -1$.

a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x \mid a)a$$

définit un endomorphisme symétrique de E.

b) Montrer que f est un automorphisme.

c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 13: (⋆)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique d'ordre n. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (distinctes ou non). Prouver que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Exercice 14: (⋆)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle symétrique d'ordre n. Montrer que, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$.

Exercice 15: (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{Sp}(A^\top A - AA^\top) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrer que A et $A^\top$ commutent.

Exercice 16: (⋆⋆)

Diagonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17: (⋆⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $c_k b_k > 0$ pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$.

a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont le premier coefficient diagonal vaut 1 telle que $D^{-1}AD$ soit symétrique réelle.

b) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 18: Diagonalisation simultanée de deux endomorphismes symétriques. (⋆⋆)

Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E. Démontrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \circ v$ est symétrique.

(ii) $u \circ v = v \circ u$.

(iii) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres communs à u et a v.

(iv) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices de u et v dans $\mathcal{B}$ soient diagonales.

Exercice 19: Matrices symétriques positives, définies positives. ($\star\star\star$)

a) Prouver que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.

b) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une et une seule matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $B^2 = A$.

c) *Matrice de Hilbert :* Soit $n \geqslant 1$, et H_n la matrice carrée d'ordre n dont le terme d'indice (i,j) vaut $\dfrac{1}{i+j-1}$.

Montrer que : $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 20: ($\star\star$)

Soit A une matrice réelle antisymétrique d'ordre n.

a) Montrer que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

b) Montrer que la matrice $(I+A)(I-A)^{-1}$ existe et est orthogonale.

c) Montrer que $\det(I+A) > 0$ (considérer l'application $\lambda \mapsto \det(I+\lambda A)$).

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$