

EXERCICES : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES, AVEC CORRIGÉS**Diagonalisation élémentaire** (ex. 1 à 6)**Exercice 1: (★)**

$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

 **Solution:**

$$\text{On a } \chi_M = \begin{vmatrix} -X & a & c \\ b & -X & c \\ b & -a & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{vmatrix} -X & a & c \\ b & -X & c \\ b-X & 0 & c-X \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} b & c \\ b-X & c-X \end{vmatrix} - X \begin{vmatrix} -X & c \\ b-X & c-X \end{vmatrix}$$

et après développement on trouve : $\chi_M = X(ab + bc - ac - X^2)$. On en déduit les cas :

- si $ab + bc - ac \neq 0$

on a alors 3 valeurs propres complexes distinctes, χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$ et M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, si $ab + bc - ac < 0$, χ_M n'est pas scindé, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ssi $ab + bc - ac > 0$.

- si $ab + bc - ac = 0$

on a alors pour valeur propre unique 0, donc M est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) si et seulement si $M = 0$, i.e. $a = b = c = 0$.

Exercice 2: (★)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer simplement les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

 **Solution:**

La matrice est de rang 1 donc $\dim \text{Ker } A = 3$ et 0 est valeur propre d'ordre au moins 3.

De plus, $\text{tr}(A) = 10$ donc la 4ème valeur propre est 10, et 0 est valeur propre d'ordre exactement 3.

Les sous-espaces propres étant tous deux de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, A est diagonalisable.

Si on veut préciser une base de vecteurs propres :

- puisque $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$, une base de $\text{Ker } A$ est par exemple formée des vecteurs de coordonnées $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$ et $(1, 0, 0, -1)$.
- le vecteur de coordonnées $(1, 2, 3, 4)$ est « évidemment » un vecteur propre associé à la valeur propre 10.

Exercice 3: (★)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels non tous nuls, et soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $A = C \cdot C^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quel est le rang de A ? Quel est le polynôme caractéristique de A ? A est-elle diagonalisable ?

 **Solution:**

On suppose $C \neq 0$. A s'écrit par blocs $A = [a_1 C \quad a_2 C \quad \dots \quad a_n C]$ donc $\text{rg } A = 1$, donc $\dim \text{Ker } A = n - 1$. Donc 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité $\geq n - 1$. De plus, C est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = \sum a_i^2 \neq 0$ (car $C^\top C = \sum a_i^2$), ce qui montre que l'ordre de multiplicité de 0 est exactement $n - 1$. Finalement tous les espaces propres ont la bonne dimension : A est diagonalisable.

Exercice 4: (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

 Solution:

Le déterminant de cette matrice a déjà été calculé en classe ; il est égal à $(a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}$.

On en déduit $\chi_A = (X - a - (n - 1)b)(X - a + b)^{n-1}$. On peut supposer $b \neq 0$ (sinon $A = aI_n$ est déjà diagonale), ainsi $a + (n - 1)b \neq a - b$ et :

– $a - b$ est valeur propre d'ordre $n - 1$; puisque $b \neq 0$, on trouve facilement que le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

– $a + (n - 1)b$ est valeur propre d'ordre 1, le sous-espace propre associé est la droite de base le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$.

Et A est diagonalisable.

Autre solution pour éviter de calculer χ_A : remarquer que la matrice $A + (b - a)I_n$ est de rang 1 (si $b \neq 0$)....

Exercice 5: (★★)

Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec : $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

 Solution:

On diagonalise : $\chi_A = -X^3 + 64X$. $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(0, 8, -8)$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = A$. Soit λ une valeur propre de A et $V \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé, alors comme M et A commutent, le sous-espace propre de A associé à λ est stable par M , et comme cet espace propre est $\text{Vect}(\{V\})$, on en déduit que V est aussi vecteur propre de M . Par suite, une base de $\mathbb{R}^3$ formée

de vecteurs propres de A est également formée de vecteurs propres de M , d'où $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et

$$\text{comme } M^3 = A : \begin{cases} \lambda_1^3 = 0 \\ \lambda_2^3 = 8 \\ \lambda_3^3 = -8 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Puis } M = P \cdot \text{diag}(0, 2, -2) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6: (★★)

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

 Solution:

-1 est valeur propre triple. Le sous-espace propre associé est de dimension 2, engendré par $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

A est donc semblable à $-I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $A = P(-I_3 + N)P^{-1}$ (il faut calculer explicitement P , c'est-à-dire trigonaliser A ...)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $M' = P^{-1}MP$. Alors M commute avec A si et seulement si M' commute avec $-I_3 + N$ donc commute avec N .

Il ne reste donc plus qu'à chercher les matrices $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que $M'N = NM'$, ce qui est facile. Puis aura à la fin $M = PM'P^{-1}$ (il faut évidemment calculer aussi P^{-1}).

Puissances de matrices (ex. 7 à 9)**Exercice 7: (★)**

Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

 **Solution:**

$$\text{On a } \chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & 2 \\ 0 & -3-X & -2 \\ 0 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 4 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-1) = (1-X)^2(-1-X).$$

• *Première méthode*

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme $P = (X-1)^2(X+1)$ est annulateur de A , on effectue la division euclidienne de X^n par P : $X^n = PQ + aX^2 + bX + c$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, d'où le système :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \text{ (valeur en 1)} \\ 2a+b=n \text{ (valeur de la dérivée en 1)} \\ a-b+c=(-1)^n \text{ (valeur en -1)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = \frac{1-(-1)^n}{2} \\ a = \frac{n}{2} - \frac{1-(-1)^n}{4} \\ c = \frac{3+(-1)^n}{4} - \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où } A = \left(\frac{n}{2} - \frac{1-(-1)^n}{4}\right) A^2 + \frac{1-(-1)^n}{2} A + \left(\frac{3+(-1)^n}{4} - \frac{n}{2}\right) I_3,$$

$$\text{soit en calculant : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2-2(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 0 & 2(-1)^n-1 & (-1)^n-1 \\ 0 & 2-2(-1)^n & 2-(-1)^n \end{pmatrix}.$$

• *Deuxième méthode*

On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 1 :

$$\text{pour } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 4y + 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff z = -2y.$$

$$\text{Ker}(A - I_3) \text{ est donc le plan d'équation } z = -2y, \text{ soit } \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cet espace propre est de dimension 2, donc A est diagonalisable, et par suite admet pour polynôme annulateur $\mu_A = (X-1)(X+1) = X^2-1$: A est la matrice d'une symétrie, et on conclut facilement

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ est impair} \\ I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Exercice 8: (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)^n$.

 **Solution:**

On calcule le polynôme caractéristique de A_n : $\chi_{A_n} = (X-1)^2 - \frac{a^2}{n^2} = X^2 - 2X + (1 - \frac{a}{n}) \cdot (1 + \frac{a}{n})$ dont les racines sont $\lambda_n^+ = 1 + \frac{a}{n}$ et $\lambda_n^- = 1 - \frac{a}{n}$.

Les vecteurs propres de A sont respectivement $X^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X^- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

la matrice diagonalisant A_n est donc indépendante de n et vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A_n = P \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{n} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{a}{n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A_n^n = P \begin{pmatrix} (1 + \frac{a}{n})^n & 0 \\ 0 & (1 - \frac{a}{n})^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = P \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix}$$

(pour le dernier passage à la limite, il faut évidemment mentionner la continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, qui est linéaire en dimension finie).

Exercice 9: (★★)

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A .

b) Déterminer les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) qui vérifient $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 0)$ et les relations de récurrence valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - v_n - 2w_n$$

$$v_{n+1} = 2v_n + w_n$$

$$w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n.$$

 **Solution:**

1. Un calcul passionnant du polynôme caractéristique montre que $\chi_A = (X-2)^3$, donc seul 2 est valeur propre, or $A \neq 2I$ donc A n'est pas diagonalisable.

Une base de $\text{Ker}(A - 2I_n)$ est $V = (\top 1, -1, 0)$. On la complète avec $V_2 = (\top -1, 0, 1)$ et $V_3 = (\top 1, 0, 0)$ et

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T. \end{aligned}$$

2. On pose ensuite $X_n = (\top u_n, v_n, w_n)$, alors $X_n = A^n X_0$. Le problème est donc de calculer A^n .

Or $T = 2I + N$ avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc

$$\begin{aligned} T^n &= 2^n I + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne en définitive

$$u_n = 2^n - n2^{n-1} - n(n-1)2^{n-3}$$

$$v_n = n(n-1)2^n$$

$$w_n = n2^{n-1}.$$

Éléments propres (ex. 10 à 21)**Exercice 10: (★)**

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que si λ est une valeur propre de $u \circ v$ alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

 **Solution:**

• Cas $\lambda = 0$

Alors $u \circ v$ n'est pas inversible, et $\det(u \circ v) = 0$ entraîne $\det(v \circ u) = 0$ donc $v \circ u$ non inversible donc 0 est aussi valeur propre de $v \circ u$.

• Cas $\lambda \neq 0$

Si x est vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $u(v(x)) = \lambda x$ donne $v(u(v(x))) = \lambda v(x)$.

De plus $\lambda x \neq 0$ entraîne $v(x) \neq 0$ et donc λ est valeur propre de $v \circ u$ (un vecteur propre associé étant $v(x)$).

Exercice 11: (★)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (distinctes ou non). Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

 **Solution:**

En trigonalisant A , on obtient $\text{tr } A^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. Or, le terme d'indice (i, i) de A^2 n'est autre que $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} \dots$

Exercice 12: (★)

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les produits par blocs :

$$\begin{bmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & A \\ 0 & -xI_p \end{bmatrix},$$

comparer les polynômes caractéristiques de AB et de BA . Que peut-on dire dans le cas $n = p$?

 **Solution:**

En faisant simplement ce qui est demandé on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n \chi_{BA}(x) = x^p \chi_{AB}(x).$$

Lorsque $n = p$ on en déduit $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 13: (★)

Montrer que l'application

$$f: P \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Former la matrice de f relative à la base canonique de E . En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

 **Solution:**

Puisque f laisse stable chacun des sous-espaces $\mathbb{R}_p[X]$ (car il est clair que $\deg(P) \leq p \Rightarrow \deg(f(P)) \leq p$), la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de f sont donc les éléments diagonaux de cette matrice.

Or pour tout k $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ donc les valeurs propres de f sont les entiers $k(k+1)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Ces $n+1$ nombres sont distincts donc f est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Exercice 14: (★★)

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

 **Solution:**

a) Si $\deg P \leq n-1$, il est clair que $\varphi(P) \in E$.

Si $\deg P = n$ après simplification des termes en X^{n+1} , on obtient que $\varphi(P) \in E$. La linéarité de φ est claire et donc on peut conclure que φ est un endomorphisme. b) La matrice de φ dans la base canonique est tridiagonale et peu pratique.

Formons plutôt la matrice de φ dans la base des $(X - a)^k$

$$\varphi((X - a)^k) = k(X - a)^k(X - b) - nX(X - a)^k$$

donc

$$\varphi((X-a)^k) = (k-n)(X-a)^{k+1} + (k(a-b) - na)(X-a)^k$$

et cette fois-ci la matrice de φ est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux distincts :

$$-nb, -(a + (n-1)b), -(2a + (n-2)b), \dots, -((n-1)a + b), -na$$

qui sont les valeurs propres de φ . Puisque φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim E = n+1$, on peut conclure que φ est diagonalisable

Exercice 15: (★★)

Monter que la matrice suivante est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n & \ddots & 2 & \\ & n-1 & \ddots & \ddots \\ (0) & & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(Indication : on pourra interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$)

 Solution:

La matrice A est la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de l'endomorphisme

$$u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto nXP + (1 - X^2)P'$$

Considérons alors la base de polynômes $(1, (X+1), \dots, (X+1)^n)$ (famille de $n+1$ polynômes de degrés distincts). On a

$$u((X+1)^k) = nX(X+1)^k + k(1-X)(X+1)^k$$

qui se réécrit

$$u((X+1)^k) = (n-k)(X+1)^{k+1} + (2k-n)(X+1)^k$$

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $(1, (X+1), \dots, (X+1)^n)$ est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux distincts $\lambda_k = 2k - n$ avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

On en déduit χ_A et on observe que A possède $n+1$ valeurs propres distinctes. La matrice A est donc diagonalisable.

Pour trouver explicitement les sous-espaces propres (qui sont des droites) (mais ce n'était pas demandé), il faut résoudre l'équation $u(P) = \lambda_k P$ pour chaque valeur de $\lambda_k = 2k - n$, ce qui se fait en résolvant une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

Exercice 16: (★★)

a) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

en fonction du polynôme $P(X) = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0)$.

b) Soit λ une racine de P . Déterminer le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ .

c) À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 17: (★★)

On note $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $F: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \in]0;1] \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $F \in E$ et que l'application $\varphi: f \mapsto F$ est un endomorphisme de E .

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

 Solution:

La première question est facile :

- la linéarité de φ est immédiate.
- si f est continue sur $[0,1]$, $G: x \mapsto \int_0^x f$ est une primitive de f et l'on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = G'(0) = f(0)$$

ce qui montre que F est continue en 0. Étant aussi continue sur $]0,1]$ d'après le cours, elle est continue sur $[0,1]$ et φ est bien un endomorphisme.

Soit f un vecteur propre de φ , alors $F = \lambda f$ donc $\int_0^x f = \lambda x f(x)$ soit, en dérivant, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x)$.

Cela l'équation différentielle : $f(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda} x f'(x)$.

$\lambda = 0$ ne peut être valeur propre (cela donnerait $f = 0$). Sinon on résout l'équation différentielle dont on trouve les solutions : $x \mapsto \alpha x^p$ avec $p = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. Il faut de plus que cette solution soit continue en 0, ce qui exige $p > 0$ soit $\lambda \in]0,1]$.

La réciproque est facile et, en conclusion, $\text{Sp}(\varphi) =]0,1]$, avec, pour $\lambda \in]0,1]$, $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect} \left(x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \right)$.

Exercice 18: (★)

Soit A une matrice donnée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad u(M) = \text{tr}(A)M - (\text{tr } M)A.$$

Déterminer ses éléments propres. u est-il diagonalisable ?

 Solution:

On a par linéarité : $u^2(M) = \text{tr}(A)u(M) - (\text{tr } M)\underbrace{u(A)}_{=0} = \text{tr}(A)u(M)$ donc le polynôme $X^2 - \text{tr}(A)X$ est annulateur de u .

Les valeurs propres de u sont donc incluses dans $\{0, \text{tr}(A)\}$.

- Si $\text{tr}(A) = 0$, la seule valeur propre de u est 0, et $u(M) = 0 \iff \text{tr}(M) = 0$ (car on a supposé $A \neq 0$) donc le sous-espace propre associé est l'hyperplan des matrices de trace nulle ; u n'est donc pas diagonalisable.
- Sinon, u annule un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\text{tr}(A)$ est l'hyperplan des matrices de trace nulle puisque $u(M) = \text{tr}(A)M \iff \text{tr}(M) = 0$ (car on a supposé $A \neq 0$).
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est donc une droite, et c'est facilement celle engendrée par A .

Exercice 19: (★)

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = M^\top - M$.

 Solution:

On a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f \circ f(M) = (M^\top - M)^\top - (M^\top - M) = -2(M^\top - M) = -2f(M)$, le polynôme $X^2 + 2X$ est donc annulateur de f , et f admet ses valeurs propres dans $\{0, -2\}$.

De plus, si M est symétrique, $f(M) = 0$ et si M est antisymétrique, $f(M) = -2M$, on conclut :

les valeurs propres de f sont 0 et -2 si $n \geq 2$, et seulement 0 si $n = 1$.

Exercice 20: (★★★)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p un projecteur de E . On définit $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto (p \circ f + f \circ p) \end{cases}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

 **Solution:**

On calcule aisément $\Phi(f) = pf + fp$ $\Phi^2(f) = \Phi(f) + 2pfp$ $\Phi^3(f) = \Phi(f) + 6pfp$ ce qui prouve que Φ annule le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$.

Ainsi, $\text{Sp}(\Phi) \subset \{0, 1, 2\}$.

En fait, si p n'est pas un projecteur trivial ($p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}_E$), alors en notant $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p = I \oplus K$, les sous-espaces vectoriels propres associés aux valeurs propres 0, 1 et 2 sont respectivement

$$E_0 = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f|_I = 0 \text{ et } f(K) \subset K\}$$

$$E_1 = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f(K) \subset I \text{ et } f(I) \subset K\}$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f|_K = 0 \text{ et } f(I) \subset I\}$$

Si E est de dimension finie, on peut trouver une base de E où la matrice de p est égale à $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et on peut alors préciser la dimension des sous-espaces propres en cherchant la matrice de f par blocs sous la forme $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Exercice 21: (★★)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On suppose que toutes les valeurs propres de B sont distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A .
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(B)$.

 **Solution:**

1. Soit X un vecteur propre de $B : BX = \lambda X$. Alors $B(AX) = (BA)X = (AB)X = \lambda AX$ ce qui prouve que AX est vecteur propre de B pour la valeur propre λ . Or B n'a que sous-espaces propres de dimension 1, donc $AX \in \text{Vect}(X)$, ce qui montre que X est vecteur propre de A .
2. On prend une base propre commune. On utilise des polynômes interpolateurs de Lagrange pour envoyer les valeurs propres de B sur celles de A .

Utilisation de polynômes d'endomorphismes (ex. 22 à 27)**Exercice 22: (★★)**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = P(A)$ et $P(0) \neq 0$.

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

 **Solution:**

Le polynôme P s'écrit

$$P(X) = P(0) + a_1X + \dots + a_pX^p$$

L'égalité $AB = P(A)$ donne alors

$$A(B - (a_1I_n + a_2A + \dots + a_pA^{p-1})) = P(0)I_n$$

On en déduit que A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{P(0)}(B - (a_1I_n + a_2A + \dots + a_pA^{p-1}))$$

l'égalité $A^{-1}A = I_n$ donne alors

$$BA = P(A)$$

et on peut conclure que A et B commutent.

Exercice 23: (★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe de $\det A$.

 *Solution:*

Un polynôme annulateur de A est $X^3 - 3X + 4 = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \bar{\mu})$, où λ est la racine réelle ($\lambda < 0$).
On en déduit que $\det(A) = \lambda^p \cdot (\mu\bar{\mu})^{2q}$ où $p = n - 2q$.
Ainsi, $\det A$ est du signe de $(-1)^p = (-1)^n$

Exercice 24: (★)

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $12A^3 - 8A^2 + 7A - I_5 = 0$. Montrer que $0 < \text{tr } A < 2$.

 *Solution:*

Le polynôme $P = 12X^3 - 8X^2 + 7X - 1$, annulateur de A , n'a qu'une seule racine réelle, qui est $1/6$. Il possède deux autres racines conjuguées λ et $\bar{\lambda}$. On sait aussi que $\frac{1}{6} + \lambda + \bar{\lambda} = \frac{2}{3}$.
 P étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on peut diagonaliser A dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. De plus, $1/6$ est forcément valeur propre de A (car le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels, de degré impair, donc possède au moins une racine réelle), et les ordres de multiplicité de λ et $\bar{\lambda}$ sont identiques. Donc l'ensemble des valeurs propres de A ne peut être que $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$ ou $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \lambda, \bar{\lambda}\}$ ou $\{\frac{1}{6}, \lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}\}$. La trace de A vaut alors suivant les cas $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{6} + \lambda + \bar{\lambda} = 1$ ou $\frac{1}{6} + 2(\lambda + \bar{\lambda}) = \frac{7}{6}$...

Exercice 25: (★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

 *Solution:*

Un polynôme annulateur de A est $X^3 + X^2 + X$, de racines $0, j, j^2$. Il suffit alors de diagonaliser A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en remarquant que j et j^2 ont même ordre de multiplicité...

Exercice 26: (★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $u(M) = -M + \text{tr}(M)I_n$.

Déterminer un polynôme annulateur de u , de degré 2. Quels sont les éléments propres de u ? u est-il diagonalisable ? u est-il inversible ? Calculer $\det u$.

Exercice 27: (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre.
Calculer $\text{tr } A$ et $\det A$.

 *Solution:*

$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)I_n$. Or $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), d'où $A^n - \text{tr}(A)A^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)I_n = 0$.
On remplace A^n par I_n et on utilise la liberté de la famille donnée ; on obtient la nullité des coefficients, d'où $\text{tr } A = 0$ et $\det A = (-1)^{n+1}$.

Sous-espaces stables (ex. 28 à 31)**Exercice 28: (★)**

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 + u = 0$.

- Montrer que l'espace $\text{Im } u$ est stable par u .
- Pour $x \in \text{Im } u$, calculer $u^2(x)$.
- Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$. Montrer que v est un isomorphisme.
- En déduire que le rang de l'endomorphisme u est un entier pair.

 **Solution:**

- a) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par celui-ci ! En effet

$$\forall x \in \text{Im } u, u(x) \in \text{Im } u$$

- b) Si $x \in \text{Im } u$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. On a alors

$$u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x$$

- c) En vertu de ce qui précède, $v^2 = -\text{Id}$ donc v est un isomorphisme et $v^{-1} = -v$.

- d) D'une part

$$\det(v^{-1}) = \frac{1}{\det v}$$

et d'autre part

$$\det(-v) = (-1)^{\dim \text{Im } u} \det v$$

donc

$$(-1)^{\dim \text{Im } u} > 0$$

On en déduit que la dimension de l'image de u est paire.

Exercice 29: (★★)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan.

- a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^* / u(H) = \{0\}\}$ (*Rappel* : E^* désigne l'espace vectoriel dual).
 b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si et seulement si $u \circ f$ est colinéaire à u .
 c) Soient A et L les matrices dans $\mathcal{B}$ de f et u .
 Montrer que H est stable par f si et seulement si tL est vecteur propre de tA

- d) Déterminer les plans stables par $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

 **Solution:**

- a) Si $e \notin H$ alors la valeur de $u(e)$ détermine entièrement un élément u de $\{u \in E^* / u(H) = \{0\}\}$ (car une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).
 Cela permet de montrer que l'application qui à $u \in \{u \in E^* / u(H) = \{0\}\}$ associe $u(e)$ est un isomorphisme entre cet ensemble et $\mathbb{K}$. Donc la dimension cherchée vaut 1.
 b) Si H est stable par f alors pour tout $x \in H$, $u(f(x)) = 0$ donc $u \circ f \in \{v \in E^* / v(H) = \{0\}\}$. Or cet ensemble est une droite vectorielle contenant u (et $u \neq 0$ sinon H ne serait pas un hyperplan) donc $u \circ f$ est colinéaire à u . La réciproque est immédiate.
 c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = L \neq 0$ (car u définit une équation d'hyperplan), $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ f) = LA$ donc

$$u \circ f = \lambda u \Leftrightarrow LA = \lambda L \Leftrightarrow {}^tA {}^tL = \lambda {}^tL$$

avec tL colonne non nulle.

- d) $\text{Sp}(A^T) = \{1, 2, -1\}$. Une base de vecteurs propres de A^T est formée des vecteurs de coordonnées $(-1, -1, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$.
 D'après la question précédente, les plans stables par f sont donc ceux d'équations $x + y - z = 0$, $y + z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 30: (★★★)

Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u .

- a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
 b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
 Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
 c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x .
 d) Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u .

 **Solution:**

a) Si x est vecteur propre de u alors $D = \text{Vect}(x)$ est stable par u . C'est contraire à l'hypothèse car D est un sous-espace vectoriel non nul distinct de E . On en déduit que u ne possède pas de valeurs propres.

b) Puisque $x \neq 0_E$, il existe un plus grand entier $p \geq 1$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Par définition de p , on a alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$ liée et donc $u^p(x) \in \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$. On en déduit que le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u .

Puisque ce sous-espace vectoriel est non nul, on a $F = E$ et donc par dimension $p = n$. Au final, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

La matrice de u dans cette base a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec a_k les scalaires donnés par la relation

$$u^n(x) = a_0x + a_1u(x) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$$

c) En composant la relation précédente avec u^k , on obtient

$$\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, u^n(u^k(x)) = a_0u^k(x) + a_1u(u^k(x)) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(u^k(x))$$

et puisque la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E , on en déduit

$$\forall y \in E, u^n(y) = a_0y + a_1u(y) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(y)$$

On en déduit que pour $y \neq 0_E$, la matrice de u dans la base $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est la même que la précédente.

d) La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ constitue une base de E . Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u . On peut écrire $v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. Considérons alors $w = a_0\text{Id}_E + a_1u + \dots + a_{n-1}u^{n-1} \in \mathbb{K}[u]$. Alors $v(x_0) = w(x_0)$ et puisque v et w commutent avec u , on a aussi $v(u^k(x_0)) = w(u^k(x_0))$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Les endomorphismes v et w prennent même valeurs sur une base, ils sont donc égaux et ainsi $v \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 31: (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension supérieure ou égale à 1, soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f et de dimension 1 ou 2.

 **Solution:**

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans cette base. On suppose que E n'admet aucun sous-espace stable par f de dimension 1, par suite f n'admet pas de valeurs propres (réelles), donc A admet au moins deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées $\lambda = a + ib$ et $\bar{\lambda} = a - ib$. Notons alors $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a + ib$, on peut écrire $X = U + iV$ avec $(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et de plus clairement $V \neq 0$.

On a alors $AX = \lambda X$, i.e. $A(U + iV) = (a + ib)(U + iV)$ d'où $AU + iAV = aU - bV + i(bU + aV)$, et donc

$$\begin{cases} AU = aU - bV \\ AV = bU + aV \end{cases}$$

Notons alors $(u, v) \in E^2$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement U et V , alors

$$\begin{cases} f(u) = au - bv \\ f(v) = bu + av \end{cases}$$

et donc $\text{Vect}\{u, v\}$ est stable par f .

Si la famille (u, v) était liée, alors comme $v \neq 0$ il existerait $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mu v$, d'où $f(v) = (b\mu + a)v$, et v serait vecteur propre de f , ce qui est exclus par hypothèse. On a donc $\dim \text{Vect}\{u, v\} = 2$, et E admet un sev stable par f de dimension 2.

Endomorphismes nilpotents (ex. 32 à 36)

Exercice 32: (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et si $v \in \text{GL}(E)$ commute avec u , alors $u + v$ est inversible et préciser son inverse (on pourra d'abord traiter le cas $v = \text{Id}_E$).

Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus que u et v commutent.

Exercice 33: (★★)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $uov = vou$ et v nilpotent.

On désire montrer que $\det(u + v) = \det u$ en raisonnant par récurrence sur la dimension $n \geq 1$.

- Traiter le cas $n = 1$ et le cas $v = 0$.
- Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et v dans une base adaptée à $\text{Im } v$.
- Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v à $\text{Im } v$.

 Solution:

- Le cas $n = 1$ est immédiat car v est alors nécessairement nul.
Le cas $v = 0$ est tout aussi immédiat.
- $F = \text{Im } v$ est stable par u car u et v commutent et v est puisque v n'est pas bijectif, $1 \leq \dim F < n$: on pourra donc appliquer l'hypothèse de récurrence à F .
On choisit une base formée d'une base de F que l'on a complétée en une base de E . Alors les matrices de u et v dans cette base sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pour u et v respectivement.

- A et D sont associées aux endomorphismes induits par u et v sur F . Ces endomorphismes induits vérifient les hypothèses initiales et donc, par l'hypothèse de récurrence, $\det(A + D) = \det A$ puis $\det(u + v) = \det(A + D) \times \det C = \det A$.

Exercice 34: (★★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

- Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice p , il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\}$ soit libre. En déduire : $p \leq n$.
- Prouver que, si u est nilpotent, son indice est égal à n si et seulement si $\dim(\text{Ker } u) = 1$.
Quelle est alors sa matrice dans la base précédente ?
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n . Prouver que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $v = P(u)$.

 Solution:

- Classique, fait dans une précédente feuille d'exos (exercice n°40 feuille 2).
- On utilise ici les résultats sur les noyaux itérés vus dans une précédente feuille (exercice n°32 feuille 2). On y a établi que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1}) \implies \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p) \text{ pour tout } k \geq p$$

Si u est nilpotent d'indice n on a donc $u^{n-1} \neq 0$ donc $\text{Ker } u^{n-1}$ est strictement inclus dans $\text{Ker } u^n = E$. Il en résulte que l'on a la suite d'inclusions strictes :

$$\{0\} \subsetneq \text{Ker } u \subsetneq \text{Ker } u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(u^{n-1}) \subsetneq E$$

En comptant sur ses doigts on en déduit que $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- Pour la réciproque on utilise un résultat établi dans l'exercice n° 37 feuille 2 :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\dim(\text{Ker}(v \circ u)) \leq \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Ker } v)$$

(appliquer le théorème du rang à la restriction de v à $\text{Im } u$)

Si l'on suppose donc $\text{Ker } u$ de dimension 1 on aura, pour tout entier k

$$\dim(\text{Ker}(u^{k+1})) \leq 1 + \dim(\text{Ker}(u^k))$$

d'où par récurrence $\dim(\text{Ker}(u^k)) \leq k$.

Si p est l'indice de nilpotence de u on aura donc $\text{Ker } u^p = E$ d'où $n = \dim(\text{Ker}(u^p)) \leq p$ et par suite $p = n$.

- cf. exercice n°39 ci-dessus.

Exercice 35: (★★)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$).

- a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X], u \circ P(v) - P(v) \circ u = \lambda v \circ P'(v)$.
 b) En déduire que v est nilpotent.

 *Solution:*

- a) On commence par démontrer la propriété pour $P = X^k$ ($k \in \mathbb{N}$), ce qui s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, uv^k - v^k u = \lambda kv^k.$$

La démonstration se fait par récurrence sur k , je ne détaille pas...

Pour un polynôme P quelconque, il suffit alors d'écrire $P = \sum a_k X^k$.

- b) – 1ère méthode

Considérons l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ w & \longmapsto u \circ w - w \circ u \end{cases}$$

φ est facilement un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$, et les calculs de la question précédente donnent :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(v^k) = \lambda kv^k.$$

Si par l'absurde v n'était pas nilpotent, les endomorphismes v^k étant tous non nuls, cela signifierait que les scalaires λk pour $k \in \mathbb{N}$ sont tous valeurs propres de φ . Or ces scalaires sont en nombre infini puisque $\lambda \neq 0$, φ posséderait donc une infinité de valeurs propres alors que c'est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ espace vectoriel de dimension finie : contradiction !

- 2ème méthode

Si P est un polynôme annulateur de v (il en existe au moins un, χ_v , d'après C.H) la relation précédente montre que $vP'(v) = 0$ donc XP' est aussi annulateur de v .

En réitérant, le polynôme $X(XP')' = XP' + X^2P''$ est aussi annulateur de v donc X^2P'' aussi etc.. les polynômes $X^k P^{(k)}$ sont tous annulateurs (récurrence forte facile). Donc si $\deg(P) = p$ on obtient puisque $P^{(p)}$ est une constante non nulle, X^p annulateur de v donc v nilpotent.

Exercice 36: (★★)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \operatorname{tr} u^k = 0$. Montrer que u est nilpotent.

 *Solution:*

Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ étaient les valeurs propres distinctes non nulles de u , alors $\operatorname{tr} u^k = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k$. L'énoncé donne alors un système de Vandermonde homogène de déterminant non nul et ayant une solution non triviale, d'où impossibilité. Ainsi, la seule valeur propre possible de u est 0. Le polynôme caractéristique de u est donc X^n et, d'après Cayley-Hamilton, u est nilpotent.

Diagonalisabilité (ex. 37 à 42)**Exercice 37:**

Soit $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

 *Solution:*

Si on note $a_1, \dots, a_n$ les valeurs propres distinctes de M^2 (et toutes non nulles car M est inversible), on sait par théorème que le polynôme $\prod_{i=1}^p (X - a_i)$ (scindé à racines simples) est annulateur de M^2 . Notons, pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\delta_k \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_k^2 = a_k$, alors : $\prod_{k=1}^p (M^2 - a_k I_n) = 0 = \prod_{k=1}^p (M^2 - \delta_k^2 I_n) = \prod_{k=1}^p (M - \delta_k I_n)(M + \delta_k I_n)$.

Le polynôme $\prod_{k=1}^p (X - \delta_k)(X + \delta_k)$ est donc annulateur de M , et est scindé à racines simples (car aucun δ_k ne vaut zéro), on conclut : M est diagonalisable.

Exercice 38: (★★)

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par : $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

 **Solution:**

– 1ère solution

- Si A_1 et A_2 sont diagonalisables, on écrit $A_i = P D_i P_i^{-1}$ puis $A = Q \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} Q^{-1}$ avec $Q = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ donc A est diagonalisable.
- Si A est diagonalisable, elle annule un polynôme scindé à racines simples Π . Puisque $A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix}$ pour tout entier k , on a par linéarité $\Pi(A) = \begin{bmatrix} \Pi(A_1) & 0 \\ 0 & \Pi(A_2) \end{bmatrix} = 0$ et ainsi Π est aussi un polynôme annulateur des A_i , scindé à racines simples, donc les matrices A_i sont diagonalisables.

– 2ème solution

Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimension p et q d'un K -espace vectoriel E . Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la supplémentarité de F_1 et F_2 et f_1, f_2 et f les endomorphismes de F_1, F_2 et E déterminés par $\text{Mat}(f_1, \mathcal{B}_1) = A_1, \text{Mat}(f_2, \mathcal{B}_2) = A_2$ et $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$. Il est clair que pour tout $\lambda \in K$, on a $E_\lambda(f) = E_\lambda(f_1) \oplus E_\lambda(f_2)$. En caractérisant la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on conclut à l'équivalence voulue.

Exercice 39: (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $B = \begin{bmatrix} 2A & A \\ A & 2A \end{bmatrix}$.

Montrer que : A diagonalisable $\iff B$ diagonalisable.

Exercice 40: (★★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{bmatrix}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

 **Solution:**

On commence par calculer, en utilisant le produit par blocs :

$$B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{bmatrix} \quad \dots$$

On va donc démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que : $B^k = \begin{bmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{bmatrix}$.

- Cette relation est vraie pour $k = 0, 1, 2, 3$ comme on vient de le voir.
- Si l'on suppose la relation vérifiée à l'ordre k , alors

$$B^{k+1} = B^k B = \begin{bmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{bmatrix}$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Soit maintenant P un polynôme quelconque. On peut écrire $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ d'où

$$P(B) = \sum_{k=0}^d a_k B^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^d a_k A^k & \sum_{k=0}^d k a_k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^d a_k A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A) & \sum_{k=0}^d k a_k A^k \\ 0 & P(A) \end{bmatrix}$$

Or

$$\sum_{k=0}^d k a_k X^k = \sum_{k=1}^d k a_k X^k = X \left(\sum_{k=1}^d a_k (k X^{k-1}) \right) = X P'(X)$$

de sorte que l'on a : $P(B) = \begin{bmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{bmatrix}$.

Supposons B diagonalisable. Il existe donc un polynôme P , scindé à racines simples, tel que $P(B) = 0$. On déduit alors du calcul précédent que $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$; cela signifie que les polynômes P et XP' sont annulateurs de A .

On en déduit que les valeurs propres de A font partie des racines communes à P et à XP' . Or, P et P' n'ont pas de racine commune puisque P est scindé à racines simples! La seule valeur propre possible de A est donc 0.

D'autre part, puisque $P(A) = 0$, A possède aussi un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

A étant diagonalisable et sa seule valeur propre étant 0, A est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0)$, c'est-à-dire : $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, on a aussi $B = 0$ et B est diagonalisable. Donc :

$B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A est nulle.

Exercice 41: Réduction simultanée (★★)

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n , tels que $u \circ v = v \circ u$.

- Montrer que tout sous-espace propre de u (resp. v) est stable par v (resp. u). En déduire que u et v admettent un vecteur propre commun.
- On suppose ici que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v admettent une base de vecteurs propres communs, et qu'il existe un polynôme P à coeff. dans $\mathbb{C}$ tel que : $v = P(u)$.
- On suppose ici que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'ils admettent une base de vecteurs propres communs (u et v sont dits co-diagonalisables).
- Dans le cas général, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et de v sont triangulaires supérieures.

Exercice 42: Matrice circulante (★★)

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\chi_J = X^n - 1$. Déterminer les éléments propres de J .

- En déduire que la matrice $D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & & b \\ b & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c \\ c & & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments propres.

 Solution:

- J est la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n qui transforme une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ en la base $(e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ (matrice de permutation). Cela permet de calculer facilement les J^k et en particulier on obtient $J^n = I_n$, ce qui montre que le polynôme $X^n - 1$ est annulateur de J . On en déduit que

$$\text{Sp}(J) \subset \{\omega_n^k \text{ tq } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\},$$

où l'on a posé $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

En résolvant le système $JV = \omega_n^k V$ on trouve que le sous-espace propre associé à la valeur propre ω_n^k est de

dimension 1 et engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

Cela montre que J est diagonalisable.

On peut alors écrire

$$J = P\Delta P^{-1} \quad P = (\omega_n^{(j-1)(i-1)})$$

et $\Delta = \text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$.

2. On a $D(a, b, c) = AI_n + cJ + bJ^{n-1} = P(aI_n + c\Delta + b\Delta^{n-1})P^{-1}$ et c'est fini....

