EXERCICES DE RÉVISIONS – ALGÈBRE

I. ALGÈBRE LINÉAIRE (sans réduction)

I.1. Sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension

Exercice 1: X ESPCI 2015

Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce encore une famille libre si on voit les vecteurs dans $\mathbb{C}^3$?

✎ *Solution:*

La réponse est oui. Soient en effet λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $(1) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0)$. En conjuguant il vient (puisque les v_k sont réels) $(2) : \overline{\lambda_1} v_1 + \overline{\lambda_2} v_2 + \overline{\lambda_3} v_3 = (0,0,0)$. La combinaison $(1)+(2)$ donne

$$(\lambda_1 + \overline{\lambda_1})v_1 + (\lambda_2 + \overline{\lambda_2})v_2 + (\lambda_3 + \overline{\lambda_3})v_3 = (0,0,0)$$

et, puisque les coefficients de cette combinaison linéaire sont réels et que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = \lambda_2 + \overline{\lambda_2} = \lambda_3 + \overline{\lambda_3} = 0$$

Par suite, $\forall k \in \{1,2,3\}$, $\mathcal{R}e\,(\lambda_k) = 0$. De même, la combinaison $-i(1)+i(2)$ donne $\forall k \in \{1,2,3\}$, $\mathcal{I}m\,(\lambda_k) = 0$.

Exercice 2: MINES-PONTS PC 2002

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels distincts deux à deux, et de même pour $\beta_1, \dots, \beta_n$. Montrer que la famille $(f_{ij})_{ij}$ définie par $f_{ij}(x,y) = \mathrm{e}^{\alpha_i x}\,\mathrm{e}^{\beta_j y}$ est une famille libre de $\mathscr{A}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

✎ *Solution:*

On commence par démontrer le résultat classique :

Lemme : Soient $g_1, \dots, g_n$ des fonctions telles que $g_i = \underset{+\infty}{o}(g_{i+1})$ pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$.
Alors la famille $(g_1, \dots, g_n)$ est libre.

(ce résultat se démontra aisément par récurrence sur n, en étudiant, si une combinaison linéaire est nulle, le comprotement en $+\infty$).

Soit alors $(\lambda_{i,j})_{i,j}$ une famille de réels telle que $\sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij} = 0$ $(*)$.

On choisit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la famille $(\alpha_i + \mu\beta_j)_{i,j}$ soit une famille de réels distincts. Pour montrer qu'un tel μ existe, il suffit de noter que la famille est composée de réels distincts si et seulement si μ n'est pas racine du polynôme

$$P(X) = \prod_{(i,j)\neq(i',j')} \Big[(\alpha_i - \alpha_{i'}) + (\beta_i - \beta_{i'})\,X\Big],$$

qui est un polynôme non nul car produit de polynômes non nuls. On peut évidemment choisir de plein de manières différentes un μ qui ne soit pas racine du polynôme P.
Alors, on évalue l'équation $(*)$ en tout $(x, \mu x)$, ce qui donne

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i,j} \lambda_{i,j}\,\mathrm{e}^{(\alpha_i + \mu\beta_j)\,x} = 0.$$

On conclut alors par le lemme.

Exercice 3: CENTRALE MP 2003

On considère la famille $\{X^n + X^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}[X]$?

✎ *Solution:*

Elle est clairement libre (polynômes de degrés distincts) mais non génératrice puisque X^k n'en est pas combinaison linéaire, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$!

Exercice 4: CCP PSI 2014

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que si $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ alors $\big(P_k(X+a)\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ aussi.

b) Soit $a \neq b$. Montrer que la famille $\big((X-a)^k(X-b)^{n-k}\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

✎ *Solution:*

a) Il suffit de vérifier que la famille est libre, ce qui est immédiat en écrivant la définition.

b) Il suffit de démontrer que la famille est libre. Écrire la définition, puis faire $X = a$ etc...

Exercice 5: MINES-PONTS PC 2017

Soient $(X_1, \dots, X_q)$ et $(Y_1, \dots, Y_p)$ deux familles libres d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que la famille $(Y_i {}^tX_j)_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on pourra d'abord traiter le cas $p = q = n$).

✎ *Solution:*

Cas p=q=n

Dans ce cas, les deux familles sont des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, que nous noterons respectivement $\mathscr{B}_X$ et $\mathscr{B}_Y$. Notons aussi $\mathscr{B}_c = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, P la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}_X$ (matrice dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$) et Q celle de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}_Y$ (matrice dont les colonnes sont $Y_1, \dots, Y_n$).

Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ on a $Y_i = PE_i$ et $X_j = QE_j$ d'où $Y_i {}^tX_j = PE_i {}^tE_j {}^tQ$. Mais $E_i {}^tE_j$ n'est autre que la matrice $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et ainsi $Y_i {}^tX_j = PE_{i,j} {}^tQ$.

Soit alors $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} Y_i {}^tX_j = 0$. D'après le calcul précédent, cela donne $P \cdot \sum_{i,j} \lambda_{i,j} E_{i,j} \cdot {}^tQ = 0$. Or les matrices P et Q sont inversibles et donc $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. Par liberté de la famille $(E_{i,j})$, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, d'où le résultat cherché.

Cas général

Par le théorème de la base incomplète, on peut trouver des vecteurs colonnes $X_{q+1}, \dots, X_n$ et $Y_{p+1}, \dots, Y_n$ tels que les deux familles $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ soient des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour montrer que la famille $(Y_i {}^tX_j)_{(i,j)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$ est libre, il suffit de prouver que $(Y_i {}^tX_j)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est libre, et c'est ce qui a été fait ci-dessus. CQFD

Exercice 6: MINES-PONTS PSI 2018

Soient $a_0, \cdots, a_n$ des scalaires 2 à 2 distincts et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.

Montrez que la famille $(P(X+a_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

✎ *Solution:*

Il suffit de démontrer que la famille est libre. Supposons que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(X+a_i) = 0$. On écrit toutes les dérivées successives en 0, et on obtient ainsi un système $MX = 0$ où M est la matrice de coefficients $P^{(j)}(a_i)$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$ et $X = {}^t(\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$.

Il reste donc à prouver que M est inversible, c'est-à-dire que son déterminant est non nul.

Or la dernière colonne de cette matrice ne contient pas de 0 puisque P est exactement de degré n donc on peut retrancher un multiple de C_n aux autres colonnes pour enlever les constantes, puis un multiple de C_{n-1} aux précédentes pour enlever les a_j etc... de sorte qu'à la fin il reste un déterminant de VDM avec une constante multiplicative non nulle dans chaque colonne ; les a_j étant distincts, ce déterminant est non nul.

Exercice 7: MINES-PONTS PSI 2017

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où f_i est la fonction $x \mapsto \cos(x + a_i)$.

✎ *Solution:*

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, f_i s'écrit $f_i = \cos a_i \cos - \sin a_i \sin$ donc $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, ce qui donne

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) \leqslant 2.$$

Et le rang vaut exactement 2, sauf si f_1, f_2, f_3 sont proportionnelles, donc égales, ce qui implique en particulier que ces trois fonctions s'annulent aux mêmes points, c'est-à-dire que a_1, a_2 et a_3 sont congrus modulo 2π. Réciproquement si cette condition est vérifée alors $f_1 = f_2 = f_3$ et le rang vaut bien 1.

Exercice 8: MINES-PONTS PSI 2016 2017

Montrer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x),\ \ldots,\ x \mapsto \cos(nx),\ x \mapsto \sin(nx)$$

sont linéairement indépendantes.

✎ *Solution:*

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre : en effet, si λ et μ sont des réls tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$, la substitution de x par zéro donne $\mu = 0$, puis $\lambda = 0$ car la fonction sinus n'est pas la fonction nulle.
On suppose que la propriété est établie au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx) = 0$. En dérivant deux fois, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + n^2 f(x) = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(n^2 - k^2)}_{\neq 0} \left(\lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)\right)$$

et on conclut grâce à l'hypothèse de récurrence que $\lambda_k = \mu_k = 0$ pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$. Il reste alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx) = 0$, et on conclut comme à l'initialisation.

Exercice 9: CCP PC 2005

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tq } P(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

✎ *Solution:*

Utiliser $F \cap G = \{0\}$ puis les dimensions, puisque F étant l'ensemble des multiples de $(X-1)(X-2)(X-3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 1 et G ensemble des multiples de X est de dimension 3.

Exercice 10: MINES-PONTS PSI 2013, CCP PSI 2014, CENTRALE PSI 2015, ...

Montrer que si deux sous-espaces vectoriels admettent un supplémentaire commun, ils sont isomorphes. Étudier la réciproque.

✎ *Solution:*

Si $E = F \oplus G = F' \oplus G$ considérer la projection sur F parallèlement à G. D'après le théorème d'isomorphisme, elle induit un isomorphisme de F' sur F.

La réciproque est vraie en dimension finie (exercice classique, procéder par récurrence), mais pas en dimension infinie. Exemple : considérer $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = 0\}$. Alors E est isomorphe à F par $X \mapsto XP$ mais...

I.2. Applications linéaires

Exercice 11: CCP PSI 2017

Soient E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout vecteur x de E, x et $f(x)$ sont colinéaires.

Montrer que : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ f(x) = \lambda x$.

✎ *Solution:*

L'hypothèse fait que $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda_x x$, et ce λ_x est unique pour $x \neq 0_E$. Il s'agit de montrer que $\forall x, y \in E \setminus \{0_E\},\ \lambda_x = \lambda_y$.

– Si (x, y) est libre : $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ et, par liberté de (x, y), $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

– Si (x,y) est liée, $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $y = \alpha x$. Alors $f(y) = \lambda_y y = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_x y$ et comme $y \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_y$.

Si λ est la valeur constante de $x \mapsto \lambda_x$, on a donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$, et cette égalité reste vraie pour $x = 0_E$, donc u est une homothétie.

Exercice 12: CCP PSI 2018

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

a) Comparez le degré de P avec celui de $\varphi(P)$.

b) Déterminez le noyau de φ.

c) Étudiez la surjectivité de φ.

✎ *Solution:*

a) si $\deg(P) \leqslant 1$, $\varphi(P) = 0$. Sinon, si $\deg(P) = n$, on écrit $P = a_n X^n + \cdots$ avec $a_n \neq 0$, et on vérifie facilement que $\deg \varphi(P) \leqslant n$ puis que les termes en X^n et X^{n-1} s'éliminent mais que le terme en X^{n-2} n'est pas nul. Donc $\deg(\varphi(P) = \deg(P) - 2$.

b) si $\deg(P) \geqslant 2, \varphi(P) \neq 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}_1[X]$.

c) Soit $Q \in \mathbb{R}[X] \neq 0$, de degré n. Si $\varphi(P) = Q$, $\deg(P) = \deg(Q) + 2 = n + 2$. On considère alors l'endomorphisme ψ induit par φ sur $\mathbb{R}_{n+2}[X]$. $\operatorname{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et le théorème du rang donne l'égalité donc ψ surjective de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ a un antécédent par ψ donc par φ et φ est surjective.

Exercice 13: MINES-PONTS PC 2013

Soient E, F G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$.

Montrer : $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w \iff \exists v \in \mathcal{L}(F,G), v \circ u = w$.

✎ *Solution:*

On raisonne par double implication.

- Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $v \circ u = w$. Alors, si $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $w(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} w$.
- Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$. Soit H un supplémentaire dans F de l'image de u (on sait que H existe car F est de dimension finie). Soit $x \in F$ s'écrivant $x = y + z$ avec $y = u(t) \in \operatorname{Im} u$ et $z \in H$. Montrons que $w(t)$ ne dépend pas du vecteur t choisi dans E tel que $u(t) = y$: si on a aussi $u(t') = y$, alors $u(t - t') = y - y = 0$, donc $t - t' \in \operatorname{Ker} u$, donc $t - t' \in \operatorname{Ker} w$ donc $w(t) = w(t')$. Il est alors légitime de poser
$$v(x) = w(t).$$
Par construction, on a $v \circ u = w$, et la vérification de la linéarité de v n'est qu'une formalité.

Exercice 14: X ESPCI PC 2012

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

✎ *Solution:*

On pose $w = v_{|\operatorname{Im} u}$, et on note que

$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} v \circ u$$
$$\operatorname{Ker} w = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v.$$

– La première égalité se prouve ainsi : si $z \in G$, il appartient à $\operatorname{Im} w$ si et seulement s'il existe $y \in \operatorname{Im} u$ (l'ensemble de départ de w) tel que $z = w(y) = v(y)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $x \in E$ (l'ensemble de départ de u) tel que $z = v(u(x))$, ou encore si et seulement si $z \in \operatorname{Im} v \circ u$.

– La deuxième égalité se prouve ainsi : $\operatorname{Ker} w$ est l'ensemble des vecteurs $y \in \operatorname{Im} u$ tels que $w(y) = v(y) = 0$, c'est-à-dire tels que $y \in \operatorname{Ker} v$.

On déduit de la première égalité que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si le rang de w est égal à la dimension de l'espace de départ de w, qui est $\operatorname{Im} u$. Or la formule du rang affirme que $\operatorname{rg} w = \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} w = 0$. Comme $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$, la démonstration est terminée.

Exercice 15: CCP PSI 2013

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Montrer que si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ alors $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Étudier la réciproque.

Que peut-on dire de plus si E est de dimension finie ?

✎ *Solution:*

Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ pour tout $x \in E$ on a $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$ donc il existe y tel que $f(x) = f^2(y)$. On écrit alors $x = (x - f(y)) + f(y)$.

Réciproquement si $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ alors si $y \in \operatorname{Im} f$ on écrit $y = f(x)$ avec $x = x_1 + x_2$ etc.. donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$, et l'inclusion inverse est toujours vraie.

En dimension finie, la somme est de plus directe d'après le théorème du rang.

Exercice 16: CCP MP 2010

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

✎ *Solution:*

a) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Pour $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x))) = f(0) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x))$ et alors $y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

b) Si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$, $a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x)) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.

c) Si f est inversible alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.

d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 17: CCP MP 2004

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.

Montrer que $n = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

✎ *Solution:*

- Une remarque utile : on a toujours $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. En effet, si $y \in \operatorname{Im}(u+v)$, il existe x tel que $y = (u+v)(x)$ d'où $y = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.
- Ici, $u+v$ est inversible donc $\operatorname{Im}(u+v) = E$ donc $E \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ ce qui implique $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Donc $n = \dim E = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$ d'après la formule de Grassmann, d'où $n \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.
- Enfin, $u \circ v = 0$ implique $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ donc $\operatorname{rg} v \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$ soit $\operatorname{rg} v \leqslant n - \operatorname{rg} u$ ce qui donne l'autre inégalité $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n$.

Exercice 18: CCP 2003, 2005

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit f un projecteur de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $t \in \mathbb{K}$ pour que $f + t\mathrm{Id}$ soit inversible. Trouver alors son inverse.

✎ *Solution:*

Il faut que $t \notin \operatorname{Sp}(f)$ donc $t \notin \{0, -1\}$ dans le cas où f n'est pas un projecteur trivial.
On cherche bien sûr g^{-1} sous la forme $\mu f + \lambda \mathrm{Id}$ et donc, en injectant, on obtient

$$(f + t\mathrm{Id})^{-1} = \frac{1}{t}\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{t+1} f\right).$$

Exercice 19: classique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(\mathrm{Id} - f) = n$.

✎ *Solution:*

Si f est un projecteur, c'est évident.
On suppose $\operatorname{rg}(\mathrm{Id} - f) + \operatorname{rg} f = n$. Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - f) = \dim \operatorname{Im} f$. Mais comme $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - f)$ est l'espace propre associé à 1, $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - f) \subset \operatorname{Im} f$ donc il y a égalité donc $(\mathrm{Id} - f) \circ f = 0$ et f est un projecteur.

Exercice 20: classique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$. On pose $h = f + g - g \circ f$. Déterminer $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$.

✎ *Solution:*

- On commence par noter que h est un projecteur par calcul direct.
- Soit $x \in \operatorname{Ker} h$, alors $f(x) + g(x) - gf(x) = 0$ donc, en composant par f, on a $f^2(x) + fg(x) - fgf(x) = 0$ soit en simplifiant $f(x) = 0$. De même, en composant par g, on trouve $g(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
- Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$, alors clairement $h(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} h$.
  En conclusion : $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
- Soit $x \in \operatorname{Im} h$. Alors $x = f(y) + g(y) + g(f(y)) = f(y) + g(y + f(y))$ ce qui montre que x appartient à $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Donc $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
- Soit $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Alors il existe donc $y \in \operatorname{Im} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$ tels que $x = y + z$, et de plus $f(y) = y$ et $g(z) = z$. Alors $h(x) = \cdots = x$ donc $x \in \operatorname{Im} h$. Donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} h$.
  En conclusion : $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Exercice 21: MINES-PONTS PC 2000

Soi $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et p un projecteur sur F. Posons : $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

a) Montrer que $u \circ q = q \circ u$.

b) Montrer que que $q \circ p = p$.

c) En déduire q est un projecteur.

✎ *Solution:*

a) Réorganiser un peu les termes.

b) Utiliser la stabilité de F par u : $p \circ u^{n-k} \circ p = u^{n-k} \circ p$.

c) Immédiat.

Exercice 22: MINES-PONTS PSI 2018

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrez que si u est un projecteur, alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{tr}(u)$. La réciproque est-elle vraie ?

b) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = \mathrm{Id}_E$ et on pose $p = \frac{1}{m}(\mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^{m-1})$.
Justifiez que p est un projecteur puis montrez que $\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{tr}(u^k) = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

✎ *Solution:*

a) Question de cours. Réciproque fausse pour $n \geqslant 2$: Ex : $\operatorname{diag}(-1, 3, 0, 0 \ldots, 0)$.

b) $p \circ u = p$ puis $p \circ u^k = p$ puis $p \circ p = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} p = p$, donc p projecteur.

$\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{tr}(u^k) = \operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p) = \dim \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Montrons que $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

– L'inclusion $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ est facile car $u(x)=x \Longrightarrow u^k(x)=x$ pour tout k donc $p(x)=x$.

– L'autre inclusion est tout aussi facile car $p(x)=x \Longrightarrow x=\dfrac{1}{m}(x+u(x)+\ldots+u^{m-1}(x)) \Longrightarrow u(x)=x$.

Exercice 23: MINES-PONTS PC 2002

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $p_1,\ldots,p_n$ des projecteurs des E tels que : $p_1+\cdots+p_n=\mathrm{Id}_E$. Montrer que :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2 \qquad p_i\circ p_j=\delta_{ij}\,p_j.$$

✎ *Solution:*

Il suffit de montrer la formule pour $i\neq j$. On commence par noter que $\mathrm{Id}=p_1+\cdots+p_n$ est un projecteur. Donc $n=\operatorname{rg}\mathrm{Id}=\operatorname{tr}\mathrm{Id}=\sum\operatorname{tr}p_i=\sum\operatorname{rg}p_i$.

Or $E=\mathrm{Id}(E)\subset\sum p_i(E)$ donc $E=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(E)$; puisque $\dim E=n=\sum\dim p_i(E)$ d'après ce qui précède, la somme est directe : $E=\bigoplus\limits_{i=1}^{n}p_i(E)$.

Soit alors $i\in[\![1\,;n]\!]$.

Soit $x\in\operatorname{Im}p_i$. Alors $x=p_i(x)$ mais on peut aussi décomposer $x=\mathrm{Id}_E(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(x)$. Par unicité de la décomposition, on a nécessairement $p_j(x)=0$ pour tout $j\neq i$.
Cela montre que $p_j\circ p_i=0$ pour tout $j\neq i$.

Exercice 24: CCP MP 2003

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

a) Soient $u,v\in\mathscr{L}(E)$ tels que $u\circ v-v\circ u=u$. Montrer que ;

$$\forall\,p\in\mathbb{N} \qquad u^pv-vu^p=pu^p.$$

En utilisant $\phi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\longrightarrow&\mathscr{L}(E)\\ w&\longmapsto&wv-vw\end{array}\right.$, montrer que u est nilpotent.

b) Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, exprimer $\operatorname{tr}(u^k)$ en fonction des valeurs propres non-nulles de u et de leur ordre de multiplicité.

c) Montrer que, si $\operatorname{tr}(u^k)=0$ pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, alors u est nilpotent. Retrouver ainsi le résultat du **a)**.

✎ *Solution:*

a) Récurrence. Si u non nilpotent, tous les u^k sont vecteurs propres de ϕ avec la valeur propre k, or $\operatorname{Sp}(\phi)$ est fini.

b) classique : on trigonalise u et on obtient $\operatorname{tr}u^k=\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)}\lambda^k=\sum\limits_{i=1}^{p}m_i\lambda_i^k$ en notant λ_i les valeurs propres non nulles et m_i leur ordre de multiplicité ($1\leqslant i\leqslant p$).

c) Les relations $\sum\limits_{i=1}^{p}m_i\lambda_i^k=0$ pour $0\leqslant k\leqslant p-1$ forment un système de Vandermonde de déterminant non nul ayant une solution $(m_1,\ldots,m_p)$ non nulle, c'est impossible, donc la seule valeur propre de u est 0.
On en déduit que $\chi_u=X^n$ puis u nilpotent d'après C.H.

I.3. Matrices

Exercice 25: X PSI 2021

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que l'on peut écrire : $M = \sum_{k=0}^{n-1} D_k C^k$

avec D_k diagonales et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

✎ *Solution:*

Le calcul des C^k est classque : les « 1 » se décalent, à justifier proprement en considérant l'endomorphisme canoniquement associé.

Puisque multiplier un matrice M à gauche par $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ revient à multiplier sa i-ème ligne par d_i, il suffit de prendre $D_0 = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, $D_1 = \text{diag}\,(a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n1}), \dots, D_{n-1} = \text{diag}\,(a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{n,n-1})$.

Exercice 26: CCP PSI 2007, 2014, 2018

Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P soit de degré non nul , et vérifie $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$. Établir que A est inversible et en déduire que A et B commutent.

✎ *Solution:*

$P = XQ + 1$ donne $AB = P(A) = AQ(A) + I_n$ donc $A(B - Q(A)) = I_n$ ce qui implqiue A inversible à droite donc inversible, d'inverse $B - Q(A)$.
On a donc aussi $(B - Q(A))A = I_n$ donc $BA = I_n + Q(A)A = I + AQ(A) = P(A) = AB$.

Exercice 27: CCP MP 2010

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.

a) Indiquer des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E.

b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

c) Déterminer tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E.

d) Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

✎ *Solution:*

a) Les endomorphismes λId_E ont la propriété voulue.

b) Les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ engendrent le même espace vectoriel. Étant toutes deux formées de n vecteurs, si l'une est libre, l'autre aussi.
(on peut aussi écrire la matrice de la famille dans la base et il est facile de voir que cette matrice est inversible).

c) Soit u un endomorphisme de E dont la matrice est diagonale dans toutes les bases de E.
La matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est de la forme $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Puisque la matrice de u dans la base $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est aussi diagonale, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_1 + e_i) = \alpha(e_1 + e_i).$$

Or par linéarité

$$u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$$

Par liberté de la famille (e_1, e_i) on identifie les scalaires et on peut affirmer

$$\lambda_1 = \alpha = \lambda_i$$

Ainsi, si un endomorphisme à une représentation matricielle diagonale dans toutes les bases de E, sa matrice est de la forme λI_n et donc cet endomorphisme est de la forme λId_E.

d) Soit u un tel endomorphisme. Si $A=(a_{i,j})$ est sa matrice dans une base $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ alors sa matrice dans la base $(e_1, 2e_2,\ \ldots,\ ne_n)$ a pour coefficient général

$$\frac{j}{i}a_{i,j}$$

et comme cette matrice doit être égale à la précédente, on obtient

$$\forall i,\ j\in\{1,\ \ldots,\ n\}\ ,\ i\neq j\Rightarrow a_{i,j}=0$$

Ainsi, cet endomorphisme a une matrice diagonale dans toute base de E et en vertu de ce qui précède, il est de la forme $\lambda\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 28: CCP PC 2000

Calculer l'inverse de la matrice $A=(a_{ij})_{ij}$ avec $a_{ii}=1$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$ et $a_{i,i+1}=-a$ pour tout $i\in[\![1\,;n-1]\!]$.

✎ *Solution:*

On a $A=\begin{pmatrix}1 & -a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a\\ & & & 1\end{pmatrix}$. On pose $A=I-aJ$, avec J nilpotente, donc

$$(I-aJ)\left(I+aJ+a^2J^2+\cdots+a^{n-1}J^{n-1}\right)=I.$$

Exercice 29: CCP 2016

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. On note P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équations $x=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$, et p la projection sur P parallèlement à D.

1. Montrer que $P\oplus D=\mathbb{R}^3$.
2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathscr{B}$. Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

✎ *Solution:*

1. Directement, P est un plan (noyau de la forme linéaire $(x,y,z)\mapsto x+y+z$, cf cours) et D est la droite de base $(1,3,2)$. Puisque D n'est pas incluse dans P (car $(1,3,2)$ ne vérifie pas l'équation de P), P et D sont supplémentaires (cf cours sur les hyperplans).
2. Classique et fait en classe : on écrit simplement $p(u)=(x',y',z')\in P$, c'est-à-dire $x'+y'+z'=0$ et $p(u)-u\in D$ c'est-à-dire qu'il existe λ tel que $p(u)-u=\lambda(1,2,3)$.... :
   On doit trouver (sauf erreur de calcul..) : $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(p)=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.
   On peut vérifier $M^2=M$ et aussi $\mathrm{tr}(M)=\dim(P)$ (le rang d'un projecteur est égal à sa trace).

Exercice 30:

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\lambda>0$ avec $A^3=-\lambda A$.
Montrer que le rang de A est pair.

✎ *Solution:*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Montrons que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}\,u\oplus\mathrm{Im}\,u$. Pour cela, d'après le th. du rang, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,u\cap\mathrm{Ker}\,u=\{0\}$. Soit donc $y\in\mathrm{Im}\,u\cap\mathrm{Ker}\,u$; $u(y)=0$ et $y=u(z)$ donc $u^3(z)=u^2(y)=0$ mais aussi $u^3(z)=-\lambda u(z)$ d'où $u(z)=y=0$.
Soit alors v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\,u$; d'après un th. célèbre, v est un automorphisme de $\mathrm{Im}\,u$. On a également, si $y=u(x)\in\mathrm{Im}\,u$, $u^2(y)=u^3(x)=-\lambda u(x)=-\lambda y$, donc $v^2=-\lambda\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,u}$. D'où $\left(\det v\right)^2=\det(v^2)=(-\lambda)^r$ où $r=\mathrm{rg}\,u=\dim\mathrm{Im}\,u$. On en déduit $(-\lambda)^r>0$ et r est pair.

Exercice 31: CCP PSI 2018

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$ et $u \neq \mathrm{Id}$.

a) Montrez que 1 est valeur propre de u.

b) Montrez que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.

c) Montrez qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ *Solution:*

a) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1\}$ et dimension impaire donc au moins une valeur propre réelle.

b) $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id}) = \{0\}$ est facile, donc la somme est directe. Pour démontrer que cette somme est égale à $\mathbb{R}^3$, deux méthodes :

- On écrit : $3 = (X^2+X+1) - (X+2)(X-1)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $x = \frac{1}{3}(u^2+u+\mathrm{Id})(x) - \frac{1}{3}((u+2\mathrm{Id}) \circ (u-Id))(x)$ avec $\frac{1}{3}(u^2+u+Id)(x) \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et idem pour l'autre.
- Analyse-synthèse : $x = y+z$ avec $y, z \in \ldots \Longrightarrow u(x) = y+u(z) \Longrightarrow u^2(x) = y+u^2(z) \Longrightarrow y = \frac{1}{3}(x+u(x)+u^2(x))$ et $z = x-y$.

c) on prend $e_1 \notin \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cup \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$, $e_2 = u(e_1)$, $e_3 = u(e_2)$. On vérifie $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ libre :
En effet, $e_1 = x+y$ avec $(x,y) \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \times \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$ et x, y non nuls. On ne peut pas avoir $u(y) = \lambda y$ puisque cela impliquerait λ valeur propre donc $\lambda = 1$ et $y \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$! Donc la famille $(y, u(y))$ est libre dans $\mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$ (qui est donc forcément de dimension 2), et la famille $(x, y, u(y))$ est par concaténation une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $u(e_1) = u(x)+u(y) = x+u(y)$ et $u^2(e_1) = x+u^2(y) = x-y-u(y)$, la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ inversible, cqfd.
Conclusion : $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et dans cette base la matrice de u a la forme voulue.

Exercice 32: CCINP PSI 2021

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = n$.

a) Montrez $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\, u$.

b) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\ u = 2n$.

a) Montrez $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\, u^2$.

b) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

✎ *Solution:*

1. a) On a facilement $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$ puisque $u^2 = 0$, et le théorème du rang permet d'avoir l'égalité des dimensions.

b) Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$: $F \oplus \mathrm{Ker}\, u = \mathbb{R}^{2n}$. On sait que u est un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}\, u$ donc si l'on considère une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et si l'on pose $e_i = u(f_i)$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ puis $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

2. a) $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u$ découle facilement de l'hypothèse $u^3 = 0$.
On voudrait calculer la dimension de $\mathrm{Im}\, u^2$; cela se fait par une méthode classique (voir d'autres exercices de cette feuille) : on considère la restriction u' de u à $\mathrm{Im}\, u$ et on lui applique le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Im}\, u') + \dim(\mathrm{Ker}\, u') = \dim(\mathrm{Im}\, u^2) + \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u)$$

donc $\dim(\mathrm{Im}\, u^2) = \mathrm{rg}\, u - \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u) \geqslant 2n - n = n$ et finalement on obtient bien $\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u$.
(et on déduit aussi du calcul précédent $\dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u) = n = \dim(\mathrm{Ker}\, u)$ donc $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, u$.)

b) Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$; $\dim S = n$; et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de S.
Montrons que la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n, u(e_1), \ldots, u(e_n), u^2(e_1), \ldots, u^2(e_n)$ est libre :

Si on a $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i u(e_i)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u^2(e_i)=0$, alors, en appliquant u^2 à cette égalité, on obtient, puisque $u^3=0$:

$$u^2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)=0 \quad \text{i.e} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in\operatorname{Ker}u^2$$

Donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in\operatorname{Im}u$; or $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in S$, donc $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i=0$ d'où $\alpha_i=0$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$.

On a donc $\sum_{i=1}^{n}\beta_i u(e_i)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u^2(e_i)=0$, puis, en appliquant u, on en déduit de la même façon que les β_i sont nuls, et ensuite que les γ_i sont nuls.

Finalement, $\mathscr{B}=(u^2(e_1),\dots,u^2(e_n),u(e_1),\dots,u(e_n),e_1,\dots,e_n$ (dans cet ordre) est une base de E, et il est facile de vérifier que la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.

Exercice 33: CCP PSI 2016

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B}$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-3\\-2&2&-2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E=\operatorname{Ker}(f^2)\oplus\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$.

2. Donner un élément de $\operatorname{Ker}(f^2)\setminus\operatorname{Ker}f$.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{f})=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

✎ *Solution:*

a) – Déjà, $\operatorname{Ker}f^2\cap\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)=\{0\}$ car $f^2(x)=0$ et $f(x)=2x$ impliquent $x=0$.

– Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. En résolvant le système $AX=2X$ on trouve $x=y$ et $z=0$ donc $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}_E)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_3'=(1,1,0)$.

$A^2=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}A^2=1$ d'où $\dim\operatorname{Ker}f^2=2$.

– Cela prouve que les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

b) Le calcul ci-desus montre que $\operatorname{Ker}f^2$ est le plan d'équation $x+y-z=0$. Le vecteur $e_2'=(1,-1,0)$ (au hasard !) appartient donc bien à $\operatorname{Ker}f^2$ et il est facile de vérifier qu'il n'appartient pas à $\operatorname{Ker}f$ puisque $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\neq 0$.

c) en posant $e_1'=f(e_2')=(0,-4,-4)$, la famille $\mathscr{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ convient (vérification facile).

Exercice 34: CCP PSI 2018

On se donne une matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\, i\geqslant 2, a_{i,1}=1, \forall\, i\leqslant n-1, a_{i,n}=1$ et des 0 ailleurs.

a) Donnez le rang de A puis le rang de A^2.

b) Montrez que $\operatorname{Ker}A$ et $\operatorname{Im}A$ sont supplémentaires.

c) Montrez que A est semblable à $A'=\begin{bmatrix}0&0\\0&B\end{bmatrix}$ avec $B\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

d) Calculez $\operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(B^2)$. Donnez le spectre de A. A est-elle diagonalisable ?

✎ *Solution:*

a) $\operatorname{rg}(A)=2$. On a $Ae_1=e_2+\cdots+e_n=u$ et $Ae_n=e_1+\cdots+e_{n-1}=v$ puis $A(u)=v$ et $A(v)=u$. La matrice A^2 est A avec les colonnes C_1 et C_n inversées. $\operatorname{rg}(A^2)=2$.

b) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$ donc $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$ (résultat classique). Sinon, plus classiquement, on peut vérifier directement $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$ + théorème du rang, ou bien utiliser $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(u, v)$.

c) On prend la base $(e_2, \dots, e_{n-1}, u, v)$. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) trivial

Exercice 35: CCP PSI 2010 2011 2013 2017 2018

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M {}^tMM = I_n$.

✎ *Solution:*

$M {}^tMM = I_n \Longrightarrow {}^tM M {}^tMM = {}^tM$.
Mais aussi en transposant $M {}^tMM = I_n \Longrightarrow {}^tMM {}^tMM = I_n \Longrightarrow {}^tMM {}^tMM = M$.
Donc $M = {}^tM$: M est symétrique, puis vérifie $M^3 = I_n$ donc $\operatorname{Sp}(M) \subset \{1\}$. Étant diagonalisable on en déduit $M = I_n$.

Exercice 36:

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est de rang $\leqslant 1$ si et seulement si il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = CL$.
En déduire une relation entre A et A^2 lorsque $\operatorname{rg} A \leqslant 1$.

b) Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

c) Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 0$.

✎ *Solution:*

a)
- Supposons $\operatorname{rg} A \leqslant 1$; si $\operatorname{rg} A = 0$ il suffit de prendre $C = L = 0$ et c'est fini. Sinon A possède une colonne non nulle, disons la j-ème, que l'on notera C_j, et toutes les autres colonnes lui sont proportionnelles : $C_k = a_k C_j$ pour $k \neq j$. En posant $L = (a_1, \dots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \dots, a_n)$ on a bien $A = C_j L$.
- Réciproquement, si $A = CL$ toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C donc $\operatorname{rg} A \leqslant 1$.

b) On classe les matrices concernées selon leur rang.
Si $\operatorname{rg} A = 0$, $A = 0$.
Si $\operatorname{rg} A = 2$ alors A est inversible et en multipliant l'égalité proposée par A^{-1} on obtient $A = I_2$.
Sinon, il existe C colonne et L ligne, non nulles, telles que $A = CL$. La relation $A^2 = A$ s'écrit alors $CLCL = CL$ et puisque LC est un réel, elle équivaut à $LC = 1$. Donc $A = CL$ avec $LC = 1$.

c) Si $A^2 = 0$ alors $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$. Il n'y a donc que deux cas possibles (compte tenu du th. du rang, $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = 3$) :
- Soit $\operatorname{Ker} A = \mathbb{R}^3$, donc $A = 0$.
- Soit $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ et alors $\operatorname{rg} A = 1$. Donc il existe C colonne et L ligne, non nulles, telles que $A = CL$. La relation $A^2 = 0$ s'écrit alors $CLCL = 0$ et puisque LC est un réel, elle équivaut à $LC = 0$. Donc $A = CL$ avec $LC = 0$.

Exercice 37:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de A et calculer son inverse si elle existe.

✎ *Solution:*

Déjà $\operatorname{rg} A \geqslant n-1$ puisque l'on peut en extraire une matrice inversible d'ordre $n-1$ (le bloc en haut à droite par exemple).
De plus si n est pair la combinaison $C_1 - C_2 + C_3 - \dots - C_n$ donne une colonne nulle, donc les colonnes sont linéairement dépendantes et A est de rang $n-1$.
Supposons donc n impair. Posons $J = A - I_n$. J est la matrice de l'endomorphisme $e_1 \to e_n$, $e_2 \to e_1$, $e_3 \to e_2$, …, $e_n \to e_{n-1}$ (matrice de permutation), donc $J^n = I_n$.

On calcule : $(I_n+J)(I_n-J+J^2-\cdots+(-1)^{n-1}J^{n-1})=I_n+(-1)^{n-1}J^n=(1+(-1)^{n-1})I_n$ donc pour n impair on aura $A(I_n-J+J^2-\cdots+J^{n-1})=2I_n$ ce qui prouve que A est inversible et que son inverse est

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(I_n-J+J^2-\cdots+J^{n-1})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 1\\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38: CENTRALE PC 2001

1. On suppose A inversible. Calculer $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0\\ -B & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C\\ B & D\end{bmatrix}$. On suppose que A et B commutent ; montrer que $\det\begin{bmatrix} A & C\\ B & D\end{bmatrix}=\det(AD-BC)$.

2. Étendre ce résultat au cas où A n'est pas inversible.

✎ *Solution:*

1. Un calcul par blocs donne :

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0\\ -B & A\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & C\\ B & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & A^{-1}C\\ -BA+AB & -BC+AD\end{bmatrix}$$

On obtient le résultat en prenant le déterminant des deux membres, puisque $\det\begin{bmatrix} A^{-1} & 0\\ -B & A\end{bmatrix}=\det A\cdot\det(A^{-1})=1$ etc...

2. Si A n'est pas inversible, il existe une infinité de scalaires λ tels que la matrice $A_\lambda=A-\lambda I$ soit inversible (il faut et il suffit que $\lambda\notin \operatorname{Sp}A$). A_λ commute avec B, on peut donc lui appliquer le résultat précédent : $\det\begin{bmatrix} A_\lambda & C\\ B & D\end{bmatrix}=\det(A_\lambda D-BC)$. Le déterminant d'une matrice étant une fonction polynomiale en les coefficients, on obtient donc ici une égalité de deux polynômes en λ, valable pour une infinité de valeurs de λ, donc aussi pour $\lambda=0$.

Exercice 39: CCP MP 2002

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos(n\alpha)$.

✎ *Solution:*

Par récurrence. Le résultat est vrai pour $n=1,2$. Pour $n\geqslant 2$, en développant par rapport à la dernière colonne, il vient $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n-D_{n-1}$, les formules de trigonométrie font le reste.

Exercice 40: MINES-PONTS PC 2017

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Ces matrices sont-elles semblables sur $\mathbb{C}$? Le sont-elles sur $\boldsymbol{R}$?

✎ *Solution:*

Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\boldsymbol{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\boldsymbol{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A.
Alors $f(e_1) = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ et $f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$.
La famille (e_3, e_2, e_1) est aussi une base de $\boldsymbol{R}$, notée $\mathscr{B}'$.
Alors la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
A et B sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
Ainsi A et B sont semblables sur $\boldsymbol{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 41: TPE PSI 2013, MINES-PONTS PSI 2010, etc...

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

✎ *Solution:*

On écrit $A = P^{-1}BP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc $PA = BP$. On note $P = R + \mathrm{i}J$, avec $R, J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on montre aisément que $RA = BR$ et $JA = BJ$. On définit $\psi : \lambda \mapsto \det(R + \lambda J)$, alors ψ est un polynôme non nul (car $R + \mathrm{i}J$ est inversible donc $\psi(\mathrm{i}) \neq 0$); il existe donc λ_0 réel tel que $\psi(\lambda_0) \neq 0$ (car si ψ polynôme était nul sur $\mathbb{R}$ il serait identiquement nul) soit $R + \lambda_0 J$ inversible.
On note alors $P_0 = R + \lambda_0 J$ et on vérifie que $P_0 A = BP_0$ donc $A = P_0^{-1} B P$, ce qui permet de conclure.

Exercice 42: ENSEA PSI 2021

Trouvez toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

✎ *Solution:*

Notons J la matrice de l'énoncé.
Si A est solution, alors nécessairtement A commute avec J ; on pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ puis on écrit $AJ = JA$, on trouve $g = h = d = 0$ et $i = a$ puis $A^2 = J$ conduit à $a = e = 0$ et $f = \frac{1}{b}$ avec $b \neq 0$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec c quelconque et $b \neq 0$.

Exercice 43: TPE MP 2002

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\alpha > 0$ et A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter de l'existence de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\alpha X + (\operatorname{tr} X) A = B.$$

✎ *Solution:*

En prenant la trace de cette équation, on trouve

$$(\alpha + \operatorname{tr} A) \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} B.$$

- Si $\operatorname{tr} B \neq 0$ et que $\alpha = -\operatorname{tr} A$, alors l'équation n'admet aucune solution.
- Si $\alpha \neq -\operatorname{tr} A$, alors $\operatorname{tr} X = \dfrac{\operatorname{tr} B}{\alpha + \operatorname{tr} A}$ donc on peut écrire

$$X = \frac{1}{\alpha}\left[B - \frac{\operatorname{tr} B}{\alpha + \operatorname{tr} A} A\right].$$

- Si $\operatorname{tr} B = 0$ et $\alpha = -\operatorname{tr} A$, alors $X = \alpha^{-1} B$ convient manifestement. De plus, si Y vérifie la même équation, alors $Z = X - Y$ vérifie $\alpha Z = (\operatorname{tr} Z) A$ donc Z est proportionnel à A.
  En prenant $Y = \alpha^{-1} B + \lambda A$, on s'aperçoit que cette solution marche tout le temps. Ainsi, les solutions sont les $\alpha^{-1} B + \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. RÉDUCTION

Exercice 44: IMT PSI 2018

Montrez que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 + M^2 + M = 0$, alors $\text{tr}(M) \in \mathbb{Z}$.

✎ *Solution:*

M annule le polynôme $X(X^2+X+1)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc M diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Sp}(M) \subset \{1, j, j^2\}$. De plus χ_M est à coefficients réels donc la multiplicité p de j est la même que celle de j^2. En notant $q = n - 2p$ la multiplicité de 0, on a $\text{tr}(M) = q \times 0 + p(j + j^2) = -p$, cqfd.

Exercice 45: CENTRALE PSI 2018

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $P = (X+3)(X^2+X+1)$ est annulateur de A. Montrez $\text{tr}(A) < 0$.

✎ *Solution:*

P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc on diagonalise dans $\mathbb{C}$. A étant à coefficients réels les deux valeurs propres complexes (éventuelles) j et j^2 ont même ordre de multiplicité m' donc $\text{tr}\, A = -3m + m'(j + j^2) = -3m - m' < 0$.

Exercice 46: CCP PSI 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\text{tr}\, A = 6$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

✎ *Solution:*

A est diagonalisable car annule le polynôme scindé simple $X(X-1)(X-2)$. $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1, 2\}$ mais 0 est exclu car A inversible.

Si 1 est la seule valeur propre, $A = I_5$: ne convient pas ; si 2 est la seule valeur propre, $A = 2I_5$: ne convient pas.

Donc $Sp(A) = \{1, 2\}$ et $\Pi_A = (X-1)(X-2)$. Si l'on veut $\text{tr}\, A = 6$ il faut 1 valeur propre d'ordre 4 et 2 simple d'où $\chi_A = -(X-1)^4(X-2)$.

Exercice 47: NAVALE PSI 2016

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M est semblable à $2M$.

Montrer que M est nilpotente.

✎ *Solution:*

Si λ est valeur propre de M alors 2λ l'est aussi et par récurrence $2^k\lambda$ l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$. La seule valeur propre de M est donc 0. Il ne reste alors plus qu'à trigonaliser (ou utiliser Cayley-Hamilton).

Exercice 48: TPE PSI 2016

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

✎ *Solution:*

En trigonalisant (possible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on est ramené à démontrer le résultat pour une matrice triangulaire supérieure (en utilisant aussi la continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}MP$, linéaire en dimension finie.)

Si T est triangulaire sup, on pose alors $T_p = T + \text{diag}(1/p, 2/p, \ldots, n/p)$. Alors à partir d'un certain rang les termes diagonaux de T_p sont tous distincts donc T_p est diagonalisable et $\lim\limits_{p\to+\infty} T_p = T$, cqfd.

Exercice 49: TPE MP 2001

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}\, A \cap \mathrm{Sp}\, B = \emptyset.$$

Peut-on généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

✎ *Solution:*

Il suffit d'écrire que χ_A est scindé : $\chi_A = \prod(X - \lambda_i)$,

$$\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff (B - \lambda_i I_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ pour } i = 1, \dots, n \iff \mathrm{Sp}\, A \cap \mathrm{Sp}\, B = \emptyset.$$

En prenant les matrices réelles $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$ mais $\chi_A(B) = 0$ par Cayley-Hamilton, donc on ne peut pas généraliser !

Exercice 50: CCP PC 2001

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $(f - b\mathrm{Id})^3 = 0$. On suppose que f n'est pas une homothétie.

a) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer l'équivalence

$$\big(P(f) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)\big) \iff \big(P(b) \neq 0\big).$$

✎ *Solution:*

a) Si f était diagonalisable, en écrivant sa matrice dans une base propre on aurait $f = b\mathrm{Id}$.

b) L'endomorphisme f n'admet que b comme valeur propre : $\mathrm{Sp}(f) = \{b\}$. On *trigonalise* f dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et c'est fini.
Ou bien : on scinde P dans $\mathbb{C}$: $P(f) = (f - \alpha_1\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (f - \alpha_n\mathrm{Id})$. Alors

$P(f)$ injectif ou bijectif $\iff$ chaque produit est bijectif $\iff \alpha_i \notin \mathrm{Sp}(f)$ pour tout $i \in [\![1; n]\!] \iff P(b) \neq 0$.

Exercice 51: CCP PSI 2019 2021

Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = X\,{}^tX$.

1. Déterminez le rang et le spectre de A.

2. Calculez le polynôme caractéristique de A.

3. Montrez l'égalité : $\det(I_n + A) = 1 + {}^tXX$.

✎ *Solution:*

1. En notant $X = {}^t(x_1 \quad \dots \quad x_n)$, A est la matrice par blocs $\begin{bmatrix} x_1X & x_2X & \dots & x_nX \end{bmatrix}$ donc $\mathrm{rg}\, A = 1$ (car $X \neq 0$). Donc $\mathrm{Ker}\, A$ est de dimension $n-1$: 0 est donc valeur propre d'ordre $\geqslant n-1$. L'autre valeur propre est donc $\mathrm{tr}\, A = \sum x_i^2 = {}^tXX$.

2. Comme on en connaît les racines on a directement : $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - {}^tXX)$.

3. $\det(I_n + A) = (-1)^n \det(-I_n - A) = (-1)^n \chi_A(-1) = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1 - {}^tXX) = 1 + {}^tXX$.

Exercice 52: CCP PSI 2013 2016

Montrer que $g : P \mapsto n^2XP(X) - (X^2 + X)P'(X) - X^3P''(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Est-il diagonalisable ? injectif ?

✎ *Solution:*

g linéaire est facile.
Si $\deg P < n$ alors $\deg g(P) \leqslant n$ et si $\deg P = n$ l'examen du terme dominant montre que l'on a $\deg g(P) \leqslant n$ encore. Donc g est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. La résolution de $g(P) = \lambda P$ amène à

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ (n^2 - k^2)a_k = (\lambda + k + 1)a_{k+1} \text{ et } 0 = \lambda a_0.$$

Pour $\lambda = 0$ on trouve une droite de solution (on exprime les a_p en fonction de a_0). Pour $\lambda + k + 1 \neq 0$ on trouve tous les coefficients nuls donc $P = 0$.
Donc nécessairement il existe $k \in [\![0 ; n-1]\!]$ tel que $\lambda = -(k+1)$. Pour cette valeur, on obtient $a_0 = \ldots = a_k = 0$ et a_p en fonction de a_{k+1} pour $p \geqslant k+1$ donc encore une droite de solutions.
Conclusion : les valeurs propres de g sont les nombres $-n, \ldots, -1, 0$; g est donc diagonalisable et puisque 0 est valeur propre il n'est pas injectif.

Exercice 53: IMT PSI 2016

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et s une symétrie vectorielle. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on pose $\varphi(u) = \frac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

b) Donner un polynôme annulateur de φ.

c) φ est-il diagonalisable ? Préciser les éléments propres de φ.

✎ *Solution:*

Corrigé en classe

Exercice 54: CCP PSI 2010 2014 2015 2017 2018

Soit $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Tr}(M) I_n + M$.

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Trouver $\mathrm{Ker}(\psi)$ et $\mathrm{rg}(\psi)$.

c) Trouver un polynôme annulateur de ψ.

d) L'application ψ est-elle bijective ? Si oui, trouver ψ^{-1}.

e) Trouver les éléments propres de ψ.

✎ *Solution:*

a) $\psi(M)$ est évidemment une matrice et $\forall \lambda, M, N$, $\psi(\lambda M + N) = \mathrm{Tr}(\lambda M + N) I_n + \lambda M + N = \lambda \psi(M) + \psi(N)$.
C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) On résout $\psi(M) = 0$ soit $\mathrm{Tr}(M) I_n + M$. Donc $M = -\mathrm{Tr}(M) I_n$.
Si on applique de nouveau la trace, on obtient $\mathrm{Tr}(M) = -n\mathrm{Tr}(M)$. Comme n est un entier, $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $M = 0$ grâce à la relation précédente.
ψ est donc injective. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\psi) = n^2$.

c) $\psi^2(M) = \mathrm{Tr}(\psi(M)) I_n + \psi(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M) I_n + M) I_n + \mathrm{Tr}(M) I_n + M = (n+2)\mathrm{Tr}(M) I_n + M = (n+2)\psi(M) - (n+1)M$
Finalement $\psi^2 = (n+2)\psi - (n+1) I_d$

d) Comme le rang est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée, ψ est surjective donc bijective.
En utilisant le polynôme annulateur, on compose par ψ^{-1} : $\psi = (n+2) I_d - (n+1)\psi^{-1}$.
Ainsi $\psi^{-1}(M) = \dfrac{1}{n+1}\left((n+2)M - \mathrm{Tr}(M) I_n - M\right) = M - \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n+1} I_n$

e) $\mathrm{Tr}(M) I_n + M = \lambda M$ soit $(\lambda - 1) M = \mathrm{Tr}(M) I_n$.
Soit $\lambda = 1$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. On obtient donc un sous-espace propre de dimension $n^2 - 1$.
Soit $\lambda = n + 1$ en appliquant la trace sur l'égalité et $M = I_n$ est un vecteur propre associé.

Exercice 55: CCP PSI 2017 2018

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On définit $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(AM) I_n$.

a) Calculez φ^2.

b) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable.
Déterminez alors les sous-espaces propres.

✎ *Solution:*

a) $\varphi^2(M) = \mathrm{tr}(AM)\,\mathrm{tr}(A) I_n = \mathrm{tr}(A)\varphi(M)$.

b) Donc le polynôme $X(X - \mathrm{tr}\, A)$ est annulateur de φ, et φ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$ (sinon, la seule valeur propre étant 0, si φ était diagonalisable il serait nul).
Pour la valeur propre 0, le sous-espace propre est l'hyperplan $\{M \mid \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.
Pour la valeur propre $\mathrm{tr}(A)$ le sous-espace propre est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 56: CCP PC 2016

1. Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}$, une base de l'image et une base du noyau de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

2. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Exercice 57: CCP PSI 2018

CNS pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

✎ *Solution:*

$\chi_A = (X-2)(X-1)^2$. A diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) = 2$ ce qui équivaut à $\operatorname{rg}(A - I_3) = 1$. On trouve facilement que la CNS est $a = 0$

Exercice 58: ENSIIE 2003

Trouver les réels α tels que la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha - 2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans ce cas la diagonaliser.

✎ *Solution:*

Le polynôme caractéristique est $(3-x)(2+x)^2$. A est diagonalisable ssi $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 5-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & \alpha \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 i.e. $\alpha = 0$
Si $\alpha = 0$: base de vecteurs propres pour $\lambda = 3$ $V_1 = (1,0,1)$ $\lambda = 2$ $V_2 = (1,1,0), V_3 = (0,0,1)$.

Exercice 59: CCP PSI 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrez que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré $\leqslant 2$.

b) Déterminez un polynôme annulateur de A.

c) En déduire que A est inversible et précisez A^{-1}.

d) Explicitez l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

✎ *Solution:*

a) Par calcul on vérifie que $aA^2 + bA + cI_3 = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$.

b) $\chi_A = X^3 + 1$ est annulateur de A par Cayley-Hamilton.

c) $A^3 = -I_3$ prouve que A est inversible et que $A^{-1} = -A^2$.

d) tous les polynômes multiples de (X^3+1) sont annulateurs de A.
Réciproquement, si P non nul annule A, il est de degré $\geqslant 3$ et la division euclidienne de P par χ_A s'écrit : $P = (X^3+1)Q + R$ donc R annule A mais comme $\deg(R) \leqslant 2$ on a $R = 0$ et P multiple de χ_A.

Exercice 60: CCP PSI 2018

On pose $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

a) Diagonalisez K.

b) Écrire M à l'aide de puissances de K.

c) Diagonalisez M et calculez M^n.

✎ *Solution:*

a) K est symétrique réelle donc diagonalisable. $\chi_K = X(X^2-2)$

$E_0(K) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M = (a-b)I_3 + cK + bK^2$.

c) Calcul : $K = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ donc $M = P(\underbrace{(a-b)I_2 + cD + bD^2}_{\Delta})P^{-1}$ puis $M^n = P\Delta^n P^{-1}$.

Il vaut mieux choisir P orthogonale c'est-à-dire normer les vecteurs propres (orthogonaux) trouvés précédemment :

$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ de sorte que $P^{-1} = {}^tP$ et il faut ensuite faire le calcul de $P\Delta^n P^{-1}$... Passionnant !

Exercice 61: ENSEA PSI 2016

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

✎ *Solution:*

A étant triangulaire supérieure, $\text{Sp}(A) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Donc A est diagonalisable et si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, on aura $A^n = PD^nP^{-1}$ ce qui par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ (linéaire en dimension finie) permet déjà de dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ existe et vaut $P\,\text{diag}(0,0,0,1)P^-$.

Comme je n'ai pas envie de calculer P et encore moins P^{-1} soyons astucieux.
La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit

$$X^n = \chi_A Q + a_n X^3 + b_n X^2 + c_n X + d_n (*)$$

d'où $A^n = a_n A^3 + b_n A^2 + c_n A + d_n I_4$. Puisque la limite de A^n existe, il en est de même des limites des suites (a_n), (b_n) (c_n) et (d_n). Notons a, b, c d leurs limites. En remplaçant X par 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1 dans $(*)$ on a le système

$$\begin{cases} 0 = d_n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{a_n}{27} + \frac{b_n}{9} + \frac{c_n}{3} + d_n \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{8a_n}{27} + \frac{4b_n}{9} + \frac{2c_n}{3} + d_n \\ 1 = a_n + b_n + c_n + d_n \end{cases}$$

ce qui en passant à la limite donne le système :

$$\begin{cases} 0 = d \\ 0 = \frac{a}{27} + \frac{b}{9} + \frac{c}{3} + d \\ 0 = \frac{8a}{27} + \frac{4b}{9} + \frac{2c}{3} + d \\ 1 = a + b + c + d \end{cases}$$

qu'il « suffit » de résoudre, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = aA^3 + bA^2 + cA + dI_4$...

Exercice 62: CCP PSI 2010

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par χ_A.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 63: CCP PSI 2016 2018

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u^2) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} u \neq \operatorname{Ker}(u^2)$.

3. Montrez qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est T.

4. Déterminez les endomorphismes v qui commutent avec u.

✎ *Solution:*

1. $\chi_u = X^2(X-2)$. On calcule la matrice de u^2 et on trouve que $\operatorname{Ker} u^2$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$. Puis $E_1(u) = \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(1,1,0)$. Ce vecteur n'appartient pas au plan précédent donc les sous-espaces sont bien supplémentaires.

2. $\operatorname{rg}(u) = 2$, donc $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, et $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$.

3. On choisit $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2) \setminus \operatorname{Ker} u$, puis $e_1 = u(e_2$ et $e_3 \in E_2(u)$.

4. En considérant la matrice de v dans la base précédente, on est ramené à chercher les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ qui commutent avec T : simple calcul !

Exercice 64: CCP PSI 2019 2021

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ donnée par : $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

1. Exprimer le rang de B en fonction de celui de A.

2. Calculer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

3. Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction de celles des sous-espaces propres de A.

4. Montrer que : B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable et inversible.

✎ *Solution:*

1.

2.

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A & -\lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda I_n & I_n \\ A - \lambda^2 I_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} A - \lambda^2 I_n & 0 \\ -\lambda I_n & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det(A - \lambda^2 I_n) \\ &= (-1)^n \chi_A(\lambda^2). \end{aligned}$$

3. $\dim E_B(\pm\sqrt{\lambda}) = \dim E_A(\lambda)$ par $Y \to [\lambda Y Y]$

4. – Supposons A diagonalisable et inversible. On a donc n vecteurs propres $(V_1, \ldots, V_n)$ associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et formant une base de $\mathbb{C}^n$, on pose alors, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $W_k^{\pm} = \begin{pmatrix} V_k \\ \pm\mu_k V_k \end{pmatrix}$ où μ_k

est une racine dans $\mathbb{C}$ de λ_n, ce qui donne $2n$ vecteurs propres linéairement indépendants (à détailler...car tous les λ_k sont non nuls). On a donc montré $\Leftarrow$.

– Supposons B diagonalisable. Il existe donc un polynôme scindé simple P tel que $P(B)=0$.
D'autre part, une récurrence simple montre que pour tout entier p, on a $B^{2p}=\begin{bmatrix}A^p & 0\\ 0 & A^p\end{bmatrix}$ et $B^{2p+1}=\begin{bmatrix}0 & A^{p+1}\\ A^p & 0\end{bmatrix}$. Donc si on pose $P(X)=Q(X^2)+XR(X^2)$ (on sépare les puissances paires et impaires et impaires), on aura $P(B)=\begin{bmatrix}Q(A) & AR(A)\\ R(A) & Q(A)\end{bmatrix}$. Donc $Q(A)=R(A)=0$ puis $P(A)=0$: A est donc diagonalisable.
De plus, Q et R sont annulateurs de A. Donc si Π est le polynôme minimal de A, Π divise Q et R, donc $\Pi(X^2)$ divise $P(X)$. P étant à racines simples, 0 ne peut être racine de Π et A est inversible.

Exercice 65: MINES-PONTS PSI 2017 2018

a) Soit $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminez l'inverse de $\begin{bmatrix}I_n & D\\ 0_n & I_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

b) Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)=\emptyset$.

i) Montrez pour toute matrice $C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ telle que $AD-DB=C$.

ii) Soit $N=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ et $M=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$. Montrez que N et M sont semblables. Sont-elles diagonalisables ?

c) Commentez le cas $n=1$.

✎ *Solution:*

1. $\begin{bmatrix}I_n & -D\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$.

2. a) Cela revient à montrer que l'application $\varphi\colon D\mapsto AD-DB$ est bijective, et comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer qu'elle est injective.
Soit donc M telle que $\varphi(M)=0$ c'est-à-dire $AM=MB$. Alors par récurrence on montre que $A^kM=MB^k$ pour tout entier k ; puis par linéarité on en déduit $P(A)M=MP(B)$ pour tout polynôme P. En prenant $P=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$; qui est annulateur de A car A diagonalisable, on a $MP(B)=0$; or $P(B)$ est inversible car spectres disjoints donc $M=0$, cqfd.

b) Soit D comme dans la question précédente. Alors $NU=UM$ avec $U=\begin{bmatrix}I_n & D\\ 0 & I_n\end{bmatrix}$ inversible donc N et M semblables.
M est diagonalisable car si $P^{-1}AP=\Delta$ diagonale et $-Q^{-1}BQ=\Delta'$ diagonale, un produit par blocs montrer que $R^{-1}MR=\begin{bmatrix}\Delta & 0\\ 0 & \Delta'\end{bmatrix}$, avec $R=\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}$. N étant semblable à M, ell est aussi diagonalisable.

3. Dans le cas $n=1$ on obtient $\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}$ diagonalisable pour tout c dès que $a\neq b$.

III. ALGÈBRE BILINÉAIRE

Exercice 66: CCP PSI 2019 2021

Soit E un espace vectoriel euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2<1$.

1. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels. Montrez :

$$\left\|\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i\right\|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2.$$

2. En déduire que la famille $(e_i+u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

✎ *Solution:*

1. En développant, $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\right\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\left\langle u_i\,\middle|\,u_j\right\rangle \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\,\|u_i\|\right)^2$ en utilisant C.S, puis on utilise C.S ds $\mathbb{R}^n$.

2. Si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,(u_i+e_i)=0$ alors $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$. Or $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ et Q1 donne $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2$ d'où $\sum_i\lambda_i^2=0$ compte tenu de l'hypothèse.

Exercice 67: CCP PSI 2016

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on pose : $\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(k)Q(k)$.

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire.

✎ *Solution:*

Produit scalaire : facile.
Pour une base orthonormée, penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange L_i tels que $L_i(k)=\delta_{i,k}$.

Exercice 68: CCP PSI 2016 2021

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit l'application $\varphi:(P,Q)\mapsto\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que l'ensemble $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid P(1)=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

3. Calculer $d(1,E)$.

✎ *Solution:*

Corrigé en classe

Exercice 69: CCP PSI 2018

a) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer le projeté orthogonal de $1+X+X^2$ sur $F=\{Q\in\mathbb{R}_2[X]\mid Q'(0)=0\}$.

✎ *Solution:*

a) cours

b) On remarque déjà que $F=\mathrm{Vect}(1,X^2)$. Deux méthodes possibles :

- On cherche une base orthogonale de F. On choisit $e_1=1$ et on cherche $e_2=X^2+a$ tel que $\langle e_1\,|\,e_2\rangle=0$, on trouve $e_2=X^2-\frac{1}{3}$.
  Puis on applique bêtement la formule du cours :
$$p(1+X+X^2)=\sum_i\frac{(1+X+X^2|e_i)}{\|e_i\|^2}e_i=\left(2+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}e_1+\frac{8}{45}\frac{45}{8}e_2=X^2+1.$$
- Deuxième méthode : on cherche directement le projeté sous la forme $p(1+X+X^2)=aX^2+b$ en écrivant que le vecteur $(1+X+X^2)-p(1+X+X^2)$ est orthogonal à F c'est-à-dire à 1 et à X^2, d'où deux équations que l'on résout.

Exercice 70: CCP MP 2001

Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel, et soit $v\in\mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall\,x\in E,\ \langle x|v(x)\rangle=0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,v=(\mathrm{Im}\,v)^{\perp}$.

✎ *Solution:*

Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle x+y|v(x+y)\rangle = 0 = \langle x|v(x)\rangle + \langle y|v(y)\rangle + \langle x|v(y)\rangle + \langle y|v(x)\rangle$, ce qui montre $\langle x|v(y)\rangle + \langle y|v(x)\rangle = 0$. ($v$ est antisymétrique !)
Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y \in \operatorname{Im} v$. Alors $y = v(z)$ et $\langle x\,|\,y\rangle = \langle x|v(z)\rangle = -\langle v(x)|z\rangle = 0$. Ceci montre que $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$.
Soit $x \in (\operatorname{Im} v)^\perp$. Alors $\forall y \in E, \quad \langle x|v(y)\rangle = 0 = -\langle v(x)|y\rangle$. Cela montre que $v(x) = 0$. Donc $(\operatorname{Im} v)^\perp \subset \operatorname{Ker} v$.

Exercice 71: ENSAM PSI 2018

a) Donnez le rang de la matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez son noyau et son image, une base orthogonale du noyau et de l'image, puis montrez que ces deux espaces sont orthogonaux.

b) Diagonalisez M. De quel endomorphisme s'agit-il ?

c)) Montrez que $A = I_4 + M$ est inversible que la suite $(A^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on déterminera.

d) Déterminez la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Im} M$.

✎ *Solution:*

a) $C_1 = -C_3$ et $C_2 = -C_4$ donc $\operatorname{rg} M = 2$ et $\operatorname{Im} M$ est engendrée par exemple par C_1 et C_2.
Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} M = 2$; puisque les vecteurs $E_1 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 + E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\operatorname{Ker} M$ (compte tenu des relations sur les colonnes), ils en forment une base.

b) M symétrique réelle donc diagonalisable. On constate que $MC_1 = C_1$ et $MC_2 = C_2$, donc $\operatorname{Im} M = \operatorname{Ker}(M - I)$ et M est la projection sur $\operatorname{Im} M$ parallèlement à $\operatorname{Ker} M$. C'est même une projection orthogonale.

c) -1 non valeur propre de M donc $I + M$ inversible.
En notant P la matrice dont les colonnes sont $[C_1, C_2, E_1 + E_3, E_2 + E_4]$ et $D = \operatorname{diag}(1,1,0,0)$, on a $M = PDP^{-1}$ donc $A = PD'P^{-1}$ avec $D' = I_4 + D = \operatorname{diag}(2,2,1,1)$ puis

$$A^{-n} = PD'^{-n}P^{-1} = P\operatorname{diag}(2^{-n}, 2^{-n}, 1, 1)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\operatorname{diag}(0,0,1,1)P^{-1} = I - M.$$

d) $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$ donc $S = 2M - I$.

Exercice 72:

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

A désigne désormais une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A{}^tA = {}^tAA$.

2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

3. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^q(A) = 0$. Montrer que $P(A) = 0$.

4. En déduire que A admet un polynôme annulateur dont toutes les racines complexes sont simples.

✎ *Solution:*

a) $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$ est immédiat.
Ensuite, si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = 0$ c'est-à-dire $\|AX\|^2 = 0$ d'où $X \in \operatorname{Ker} A$ ce qui donne l'inclusion réciproque.

b) Soit $S = {}^tAA$. Puisque A et ${}^tA$ commutent on a $S^p = ({}^tA)^pA^p = 0$. Donc la seule valeur propre de S est 0 ; S étant symétrique réelle est diagonalisable d'où finalement $S = 0$.
Ainsi ${}^tAA = 0$ donc $A = 0$ d'après la 1ère question.

c) Il suffit de remarquer que $P^q(A) = [P(A)]^q$, que $P(A)$ et ${}^tP(A) = P({}^tA)$ commutent puis d'appliquer le résultat de la question précédente.

d) Soit Π un polynôme annulateur de A, que l'on écrit $\Pi = k\prod_i (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont des complexes distincts. En multipliant Π par un polynôme convenable, ce qui donnera encore un polynôme annulateur de

A, on obtient un polynôme annulateur de la forme polynôme $\left[\prod_i (X-\lambda_i)\right]^q$. D'après la question précédente, on conclut que le polynôme $\prod_i (X-\lambda_i)$ est encore annulateur de A.

Exercice 73: MINES-PONTS PC 2017

Soient E un espace euclidien et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit, pour $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Montrer que f est un endomorphisme. Est-il injectif ? surjectif ?
Montrer qu'il est symétrique. A quelle condition est-il un projecteur ?

✎ *Solution:*

- La linéarité vient de la bilinéarité du produit scalaire. Et f est bien à valeurs dans $E\dots$
- Cherchons son noyau : $\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \langle x, e_i\rangle = 0$ car (e_i) base donc libre
  Alors $x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{e}^{\perp} = \{0\}$: $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective.
  Endomorphisme en dimension finie, f est donc aussi surjective (bijective).
- $\forall (r,s) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_r), e_s\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_r, e_i\rangle\langle e_i, e_s\rangle$ qui du fait de la symétrie du produit scalaire vaut aussi $\langle e_r, f(e_s)\rangle$: f est symétrique.
- f est un projecteur ssi $f \circ f = f$, i.e. ssi $\forall r \in [\![1,n]\!],\ f(f(e_r)) = f(e_r)$
  Or $f(f(e_r)) = f(e_r) \Leftrightarrow f(e_r) = e_r$ car f est injective.
  Ceci étant vrai pour tout r, f est alors l'application identité (qui est bien une projection)

  Remarque : On peut aussi voir que si c'est un projecteur, c'est sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)\dots$ valant respectivement E et $\{0\}$ car f est bijective (ou bien parce que la seule projection bijective est l'identité !)

  Mais alors $\forall r \in [\![1,n]\!],\ f(e_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_r, e_i\rangle e_i = e_r \Leftrightarrow \forall r \in [\![1,n]\!],\ \begin{cases} \langle e_r, e_i\rangle = 0 & \text{si } i \neq r \\ \langle e_r, e_i\rangle = 1 & \text{si } i = r \end{cases}$
  Donc f est une projection $\Leftrightarrow (e_i)$ est une base orthonormée, et f est alors l'identité.

Exercice 74: MINES-PONTS PSI 2018

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrez que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrez que la suite (v_n) converge et trouvez sa limite.

✎ *Solution:*

a) Si $x \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$, $x = u(y) - y$ et $u(x) = x$ donc $u^2(y) = 2u(y) - y$
puis $\|y\|^2 = \|u^2(y)\|^2 = 4\|u(y)\|^2 + \|y\|^2 - 4\langle u(y) \,|\, y\rangle$
donc $\|u(y)\|^2 = \|u(y)\|\,\|y\| = \langle u(y) \,|\, y\rangle$: cas d'égalité de Cauchy-Schwarz d'où $u(y) = \lambda y$ avec $\lambda \geqslant 0$ donc $\lambda = 1$ donc $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = \{0\}$ et on conclut par le théorème du rang.

b) Soit $x \in E$; on écrit en vertu de ce qui précède $x = y + z$ avec $u(y) = y$ et $z = u(t) - t$. Puisque $u^k(y) = y$ pour tout entier k, on a $v_n(x) = y + v_n(z)$ et $v_n(z) = \dfrac{1}{n}(u^n(t) - t)$ (car $(u-\mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} + u + \cdots + u^{n-1}) = u^n - \mathrm{Id}$).
Donc $\|v_n(z)\| \leqslant \dfrac{2}{n}\|t\|$ puisque u^n est une isométrie, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(z) = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = y$ c'est-à-dire que (v_n) a pour limite la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ ($\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = (\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}))^{\perp}$ se vérifie aisément).

Exercice 75:

Déterminer $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 76: CCP PSI 2016

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in E$.
Déterminer les réels α tels que l'application $x \mapsto \alpha\,\langle u \,|\, x\rangle\, u - x$ soit une isométrie de E.

✎ *Solution:*

On peut supposer $u \neq 0$ sinon c'est trivial.
Dans ce cas, écrire la matrice de l' endomorphisme dans une base orthonormée dont le premier vecteur est $\frac{u}{\|u\|}$.

Exercice 77:

Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $p \circ q = q \circ p$

(ii) $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

(iii) p et q possèdent une base commune de diagonalisation.

Exercice 78: CENTRALE PSI 2015, MINES-PONTS PSI 2016 2017 2018

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E, et $u = p + q$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset [0\,;2]$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ en fonction de $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$.

✎ *Solution:*

a) p et q sont deux endomorphismes symétriques, donc u aussi. u est donc diagonalisable.

b) On sait que pour un projecteur orthogonal, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout x donc $\|u(x)\| \leqslant 2\|x\|$..
Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Alors $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \leqslant 2\|x\|$ implique $|\lambda| \leqslant 2$ puisque $x \neq 0$
De plus, pour tout x, $\langle p(x)\,|\,x\rangle = \|p(x)\|^2 \geqslant 0$, idem pour q, donc $\langle u(x)\,|\,x\rangle \geqslant 0$ d'où $\lambda \geqslant 0$.

c) $\|u(x)\| = \|(p+q)(x)\| \leqslant \|p(x)\| + \|q(x)\| \leqslant \|x\| + \|x\|$ donc si $u(x) = 2x$ il y a égalité dans ces inégalités, donc $\|p(x)\| = \|x\|$, idem pour q, donc $p(x) = x$ et $q(x) = x$ soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. L'inclusion réciproque est immédiate.
Si $p(x) + q(x) = 0$ alors $\langle p(x) + q(x)\,|\,x\rangle = 0$ et par positivité, $\langle p(x)\,|\,x\rangle = \langle q(x)\,|\,x\rangle = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. Inclusion réciproque immédiate.
En conclusion, $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q = (\mathrm{Im}\, p)^\perp \cap (\mathrm{Im}\, q)^\perp$.

Exercice 79:

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in GL(E)$ tel que :

$$\forall\,(x,y) \in E\ ,\ < x,y >= 0 \Rightarrow < u(x), u(y) >= 0$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall\, x \in E\ ,\ \|u(x)\| = \alpha\|x\|$ (*utiliser une base orthonormée*).

Exercice 80: CCP PC 2002, CCP PSI 2014 2015 2021, MINES-PONTS PSI 2021

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^tA = {}^tA\,A$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. On note $S = {}^tA\,A$.

1. Montrer que $S = 0$.

2. En déduire que $A = 0$.

✎ *Solution:*

S est symétrique, donc diagonalisable. De plus S est nilpotente grâce à la commutation de A et ${}^tA$. Donc S est nulle car seule valeur propre 0. Donc $\mathrm{tr}\, S = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$ donc tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$.

Exercice 81: MINES-PONTS PSI 2017 2021

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $B = A^3 + A + I_n$. Montrez que A est un polynôme en B.

✎ *Solution:*

On diagonalise avec le théorème spectral : $Q^{-1}AQ = \text{diag}(\lambda_i)$.
Si P est un polynôme quelconque on aura donc $Q^{-1}P(B)Q = \text{diag}\left(P\left(\lambda_i^3+\lambda_i+1\right)\right)$.
Il suffit donc de trouver un polynôme P tel que $P(\mu_i) = \lambda_i$ en posant $\mu_i = \lambda_i^3+\lambda_i+1$.
Or si les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distincts, il en est de même des $\mu_1, \dots, \mu_p$ car l'application $x \mapsto x^3+x+1$ est injective (faire une étude ultra-rapide) ; d'après la théorie des polynômes d'interpolation de Lagrange, il est donc possible de trouver un polynôme P (de degré $\leqslant p-1$) tel que $P(\mu_i) = \lambda_i$ pour $i \in [\![1\,;p]\!]$ donc en fait pour tous les $i \in [\![1\,;n]\!]$ (car ceux qui manquent sont égaux à certains précédents) , cqfd.

Exercice 82: CCP PSI 2012, MINES-PONTS PSI 2021

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de S. Si μ est une valeur propre réelle de A, montrez $\lambda_1 \leqslant \mu \leqslant \lambda_n$.

✎ *Solution:*

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: on écrit $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ donc $SX = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i X_i$ donc

$$ {}^tXSX = \sum_{i,j} \lambda_j x_i x_j \underbrace{{}^tX_iX_j}_{=\delta_{i,j} \text{ car bon}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

donc

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leqslant {}^tXSX \leqslant \lambda_n \sum_i x_i^2 = \lambda_n \|X\|^2.$$

Puis ${}^tXSX = \dfrac{1}{2}({}^tXAX + {}^tX{}^tAX) = {}^tXAX$ (car ${}^tXAX$ est réel donc égal à sa transposée).
Si μ est une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé, on a $AX = \mu X$ d'où ${}^tXSX = \mu\|X\|^2 \leqslant \lambda_n\|X\|^2$ puis $\mu \leqslant \lambda_n$ puisque $X \neq 0$. Idem pour l'autre inégalité.

Exercice 83: CCINP PSI 2021

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et ${}^tMM = M{}^tM$.

1. Montrez $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminez toutes ses matrices vérifiant ces hypothèses sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

✎ *Solution:*

1. On a $({}^tMM)^3 = I_n$ avec ${}^tMM$ symétrique réelle d'où (classique, on orthodiagonalise) ${}^tMM = I_n$

2. M diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$ donc $M = I_n$ ou rotation d'angle $2\frac{\pi}{3}$ (revoir la classification des isométries en dimension 3).

Exercice 84: CENTRALE PC 2006

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^2$.

1. Montrer que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.

2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(A)$.

3. Montrer que A est symétrique.

✎ *Solution:*

1. voir un exo précédent. On en déduit $\text{Ker}\,{}^tAA = \text{Ker}\,A$ (une inclusion + dimensions).

2. Soient $X \in \text{Ker}\,A$ et $Y \in \text{Im}\,A$. On écrit $Y = AZ$ puis

$$\langle X \,|\, Y\rangle = \langle X \,|\, AZ\rangle = \langle {}^tAX \,|\, Z\rangle = 0$$

en vertu du fait que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}({}^tA)$. Ainsi, la somme est bien orthogonale, et donc directe.
De par les dimensions, on a alors $E = \text{Ker}\,A \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}\,A$.

3. Enfin, on considère une base orthonormée adaptée à $\text{Ker}\,A \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}\,A$:

$$A = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

et de l'égalité $A\,{}^tA = A^2$ on tire $B\,{}^tB = B^2$. Sauf que cette fois-ci, B est inversible, donc en multipliant par B^{-1} à gauche : ${}^tB = B$. Par conséquent, A est symétrique.

Exercice 85: CCINP PSI 2021

Soient $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{bmatrix} 1 & -{}^tU \\ U & I_n \end{bmatrix}$.

1. Calculez ${}^tMM$. En déduire que M est inversible.

2. Montrez que $M^{-1}{}^tM$ et une matrice orthogonale.

✎ *Solution:*

On supposera dans toute la suite $U \neq 0$ (sinon c'est terminé).

1. $M = I_{n+1} + A$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -{}^tU \\ U & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tMM = (I_{n+1} - A)(I_{n+1} + A) = I_{n+1} - A^2$ avec $A^2 = \begin{bmatrix} -\|U\|^2 & 0 \\ 0 & -U\,{}^tU \end{bmatrix}$.
Or la matrice $U\,{}^tU$ est symétrique réelle de rang 1 ; elle admet donc 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$ et $\mathrm{tr}(U\,{}^tU) = \|U\|^2$ comme valeurs propres. Les valeurs propres de A^2 sont donc $-\|U\|^2$ (double) et 0 (d'ordre $n-1$) donc celles de ${}^tMM$ sont $1 + \|U\|^2$ et 1.
Puisque 0 n'est pas valeur propre, la matrice ${}^tMM$ est inversible et pusique $\det({}^tMM) = (\det M)^2$, il en est de même de M.

2. $M^{-1}{}^tM^t(M^{-1}{}^tM) = (I_{n+1} + A)^{-1}(I_{n+1} - A)(I_{n+1} + A)(I_{n+1} - A)^{-1} = I_{n+1}$ car toutes ces matrices commutent entre elles (on rappelle que A commute avec toute matrice de la forme $P(A)$ où P polynôme, et que si A commute avec B inversible, elle commute aussi avec B^{-1}).

Exercice 86: CCP MP 2010, PSI 2013, PSI 2016...

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle . \mid . \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \langle f(x) \mid x \rangle > 0$$

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x) \mid x \rangle - \langle u \mid x \rangle$$
Montrer que g admet des dérivées partielles selon tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.

3. Montrer que g admet un unique point critique noté z.

4. Montrer que g admet un minimum global en z.

✎ *Solution:*

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f. Pour
$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$$
on a
$$f(x) = \lambda_1x_1e_1 + \cdots + \lambda_nx_ne_n$$
avec $\lambda_i > 0$ valeur propre associée au vecteur propre e_i.
Ainsi, pour $x \neq 0$,
$$\{f(x)|x\} = \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 > 0$$

2. Par opérations, la fonction g est de classe C^1 donc admet des dérivées partielles relatives à n'importe quelle base.
Dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, ses dérivées partielles sont
$$\mathrm{D}_ig(x) = \lambda_ix_i - u_i$$
en notant $u_1, \ldots u_n$ les composantes de u.

3. Il est alors immédiat que g admet un unique point critique qui est
$$z = \frac{u_1}{\lambda_1}e_1 + \cdots + \frac{u_n}{\lambda_n}e_n = f^{-1}(\mathrm{u})$$

4. Pour $h \in E$,
$$g(f^{-1}(u)+h) = \frac{1}{2}(u+f(h)|f^{-1}(u)+h) - (u|f^{-1}(u)+h)$$
donc
$$g(f^{-1}(u)+h) = g(f^{-1}(u)) + \frac{1}{2}(f(h)|h) \geqslant g(f^{-1}(\mathrm{u}))$$
car $(f(h)|f^{-1}(u)) = (h|u)$ par symétrie.

Exercice 87: CCP PC 2005, MINES-PONTS PSI 2018

On note
$$\mathscr{A}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tM = -M\right\}$$
$$\mathscr{B}_n = \left\{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\right\}$$
$$\mathscr{C}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tM = M \text{ et } \mathrm{Sp}(M) \subset]0;1[\right\}.$$
On définit $\phi : M \to (I_n - M)\cdot(I_n+M)^{-1}$ (*c'est la transformation de Cayley*).

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{B}_n$.

2. Montrer que ϕ réaliste une bijection involutive sur $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire que $\phi = \phi^{-1}$.

✎ *Solution:*

1. Tout d'abord, si $A \in \mathscr{A}_n$, alors $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ (démo. classique). On peut donc poser $M = \phi(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$. On vérifie alors que $(I+A)$ et $(I-A)$ commutent et donc que ${}^tM\cdot M = I_n$, ce qui prouve que $\phi(A) \in \mathscr{B}_n$. De plus, l'injectivité de ϕ est à peu près immédiate (attention, ϕ n'est *pas* linéaire !).
Montrons la surjectivité de ϕ.
Tout d'abord on note que si $M \in \mathscr{B}_n$, alors $M+I_n$ est inversible donc $\phi(M)$ est bien défini. Notons $A = \phi(M) = (I_n-M)\cdot(I_n+M)^{-1}$. On a alors
$$\begin{aligned}{}^t(A) &= (I+{}^tM)^{-1}(I-{}^tM) = (I+M^{-1})^{-1}\cdot(I-M^{-1})\\ &= (M+I)^{-1}M\cdot(I+M^{-1}) = (M+I)^{-1}(M-I).\end{aligned}$$
Or M commute avec $(M+I)^{-1}$ car il commute avec $(M+I)$ (multiplier à gauche et à droite par $(I+M)^{-1}$ la relation de commutation entre M et $(M+I)$ pour le voir), et I aussi, donc
$${}^tA = (M-I)(M+I)^{-1} = -{}^tA.$$
On a donc montré que $A = \phi(M) \in \mathscr{A}_n$. Par ailleurs, on tire de la définition de A les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}A(I+M) &= I-M\\ MA+M &= I-A\\ M(I+A) &= I-A\\ M &= (I-A)(I+A)^{-1} = \phi(A)\end{aligned}$$
Ce qui montre donc la surjectivité de ϕ.

2. Même démarche ; il faut noter que l'intervalle $]0,1[$ est stable par $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

Exercice 88: CENTRALE PSI 2016

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Énoncer en entier le théorème spectral.

2. Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

3. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer alors qu'il existe O orthogonale et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

✎ *Solution:*

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

1. Théorème spectral :
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $D = {}^tPAP$.

2. On utilise le théorème spectral sur la matrice A, on note également $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ les valeurs propres de A.
Posons alors $B = P\Delta P^tP$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ ainsi

$$B^2 = P\Delta P^tP\Delta P^t = P\Delta^{2t}P = PD^tP = A$$

Ce qui prouve l'existence (l'unicité est également vraie mais bien plus difficile à prouver).

3. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Posons $A = {}^tMM$ on a de suite ${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = A$ donc A est symétrique et donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A = {}^tMM$, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ et donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$.
On a donc ${}^tXMMX = \lambda {}^tXX \Leftrightarrow \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$ (pour la norme euclidienne).
On en déduit que $\lambda \geqslant 0$ mais comme $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc $\lambda > 0$. Finalement ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Il s'agit de la décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On a vu que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc d'après le **2.** il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tMM$.
Posons alors $O = MS^{-1}$, on a les relations $M = OS$ mais aussi

$${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tMMS^{-1} = {}^tS^{-1}S^2S^{-1} = {}^tS^{-1}{}^tSSS^{-1} = I_n$$

donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a ainsi prouvé l'existence d'un couple O orthogonale et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

(l'unicité est également vraie mais plus difficile à prouver : si $M = OS$ alors ${}^tMM = S^2$ et on utilise le fait que toute matrice symétrique définie positive admet une unique racine carrée symétrique définie positive. Voir par exemple MInes Maths 2 MP 2018 3è question)

Exercice 89: PSI 2016

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ de rang m.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0,\ {}^tXAX > 0$.

2. Justifier que $m \leqslant n$ Que peut-on dire de l'application linéaire u canoniquement associée à B ?

3. Montrer que la matrice par blocs $C = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{bmatrix}$ est inversible. Calculer C^{-1} lorsque $m = n$.

✎ *Solution:*

1. A symétrique réelle donc orthodiagonalisable : il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = {}^tP$.
Soit X une matrice colonne non nulle. Alors :

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY$$

avec $Y = {}^tPX$. Or ${}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ d'où le résultat car les λ_i sont strictement positifs et le vecteur Y n'est pas nul puisque X ne l'est pas et P inversible.

2. $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ donc $\text{Im}\, u \subset \mathbb{R}^n$ don $\text{rg}\, u \leqslant n$ soit $m \leqslant n$.
Le th. du rang donne $m = \text{rg}\, u + \dim \text{Ker}\, u$ donc u injective.

3. Notons déjà que A est inversible puisque 0 n'en est pas valeur propre.
Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,1}[\mathbb{R})$ tel que $C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$. Alors $AX + BY = 0$ et ${}^tBX = 0$ d'où ${}^tBA^{-1}BY = 0$ donc en multipliant par ${}^tY$ à gauche et avec les notations précédentes : ${}^tY{}^tBPD^{-1}{}^tPBY = 0$, soit encore ${}^tZD^{-1}Z = 0$ avec $Z = {}^tPBY$. Puisque ${}^tZD^{-1}Z = \sum \frac{1}{\lambda_i} z_i^2$ et que les λ_i sont > 0 on en déduit $Z = 0$ puis $BY = 0$ puis Y=0 puisque B injective puis $AX = 0$ et enfin $X = 0$.
Finalement $\text{Ker}\, C = \{0\}$ donc C inversible.
Pour le calcul de l'inverse quand B est carrée donc inversible, faire un produit par blocs...

Exercice 90: ENSAM PSI 2016

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit ω un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & \omega \wedge x \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme et que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x)\,|\,y\rangle = -\langle x\,|\,f(y)\rangle$.
2. Trouver un polynôme annulateur de f. f est-il diagonalisable ?
3. Montrer que l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1}$ est bien défini et déterminer ses propriétés géométriques.

Exercice 91: CCP PSI 2016

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$.

1. Montrer que B n'est pas inversible.
2. Montrer que B est diagonalisable.
3. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(B)$ et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.
4. La matrice A est-elle orthogonale ?
5. Montrer que A et B commutent.
6. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $-\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.