

EXERCICES DE RÉVISIONS – ANALYSE

I. SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1: CCP PC 2001

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{(1+u_n)^4}$.

 *Solution:*

Il faut naturellement que $u_0 \neq -1$. Si $u_0 = 0$ alors la suite est stationnaire en 0.

Dès la première itération, on est alors à termes strictement positifs. Alors, posons $f: x \mapsto \frac{x^2}{(1+x)^4}$ (inutile ici de faire une étude de f) :

- Si $x \in]0, 1[$, alors $f(x) \leq x^2 < x$;
- Si $x \geq 1$, alors $f(x) < \frac{x^2}{x^4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 < x$.

(on pouvait aussi calculer $f(x) - x$ et obtenir son signe par l'étude d'une fonction auxiliaire).

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) - x \leq 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc converge et sa limite ne saurait être que 0 par continuité de f et le fait que 0 est le seul point fixe de f .

Exercice 2: TPE PSI 2016

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $u_0 > 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Étudier cette suite.
2. Montrer que $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n}$; en déduire $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n$.
3. Donner un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$

 *Solution:*

1. Par récurrence tous les u_n sont > 0 . La suite est donc croissante, elle n'est pas majorée (sinon elle converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + 1/\ell$). Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

2. u étant croissante on a $u_n > 1$ pour tout n donc $\frac{1}{u_n} < 1$ puis l'inégalité. L'autre inégalité est tout aussi immédiate.

3. En additionnant la double inégalité précédente on arrive à

$$2n \leq u_n^2 - u_0^2 \leq 2n + u_n - u_0$$

puis facilement $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 3:

Soit $a > 0$, et, pour $n \geq 1$, $u_n = [a(a+1) \dots (a+n)]^{\frac{1}{n}}$.

1. Étudier la suite (u_n) .
2. Déterminer un équivalent de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.

 *Solution:*

Considérer $\ln(u_n)$ puis encadrement à l'aide de $\int \ln(a+t) dt$.

Exercice 4: CCP PC 2005

Soit $(M_0 M_1 M_2)$ un triangle du plan affine. Pour tout $n \geq 2$, on définit $M_{n+1} = \text{isobarycentre}(M_n, M_{n-1}, M_{n-2})$. Déterminer le comportement de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 **Solution:**

En appelant z_n l'affixe de M_n , on a

$$z_{n+3} = \frac{1}{3}(z_n + z_{n+1} + z_{n+2})$$

dont le polynôme caractéristique est $(X-1)(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3})$ donc $z_n = A + B\lambda^n + C\bar{\lambda}^n$, où

$$\lambda = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Le triplet (A, B, C) vérifie le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \bar{\lambda} \\ 1 & \lambda^2 & \bar{\lambda}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $|\lambda| = 1/3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ et seul le coefficient A nous intéresse; il faut donc calculer seulement deux coefficients de l'inverse de la matrice. On trouve

$$A = \frac{1}{6}z_0 + \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{2}z_2$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{6}(M_0 + 2M_1 + 3M_2).$$

Exercice 5: MINES-PONTS PSI 2018

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, A un fermé de E , $k \in [0;1[$ et $f : A \rightarrow A$ k -lipschitzienne.

1. Montrez que f admet au plus un point fixe.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in A$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez que la série de terme général $\|u_{n+1} - u_n\|$ converge.
3. En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
4. Montrez que $\ell \in A$ et que $f(\ell) = \ell$. En déduire que f admet un unique point fixe.

 **Solution:**

1. Si il y a deux points fixes $x \neq y$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| < \|x - y\|$ absurde.
2. $\|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leq k\|u_n - u_{n-1}\|$ donc par récurrence $0 \leq \|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n\|u_1 - u_0\|$ avec $k < 1$ et par comparaison à une série géométrique, la série de terme général $\|u_{n+1} - u_n\|$ converge.
3. On considère une base $\mathcal{B}$ de E , et la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée. Celle-ci est équivalente à la norme de l'énoncé car E est de dimension finie, donc $\sum \|u_{n+1} - u_n\|_\infty$ converge. En notant $u_{n,i}$ les coordonnées de u_n dans $\mathcal{B}$, on en déduit que les séries $\sum (u_{(n+1),i} - u_{n,i})$ (puisque $|x_{n,i}| \leq \|x\|_\infty$) sont ACV donc CV donc que chaque suite $(u_{n,i})$ converge donc la suite (u_n) converge. :
4. $\ell \in A$ car A fermé et $f(\ell) = \ell$ par continuité.

Exercice 6: TPE PSI 2018

Définissons, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$, $N_2(P) = \sup_{t \in [-1;1]} |P(t)|$.

1. Montrez que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{n}X^n$. Étudiez la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2 .

 **Solution:**

1. Vérification facile. Remarquer que si $P = \sum a_k X^k$ alors $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
2. $N_2(P_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $P_n \rightarrow 0$ au sens de N_2 . $N_1(P_n) = (n-1)!$ donc la suite diverge pour N_1 . Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 7: X PC 2005, MINES-PONTS PSI 2009 2018, CCP PSI 2015

Notons $P_n = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1$.

- a) Montrer que P_n admet une unique racine $x_n > 0$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge; on notera ℓ sa limite, que l'on déterminera.
- b) Trouver un équivalent de $x_n - \ell$.

 *Solution:*

- a) On vérifie que $P_n(0) = -1$ et $P_n(1) > 0$ donc P_n admet une racine dans $]0, 1[$; de plus, P_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ donc cette racine est unique. Enfin, il est aisé de prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît donc admet une limite.

On remarque ensuite que $X^n + X^{n-1} + \dots + X = X \frac{1 - X^n}{1 - X}$.

On a donc $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$ mais $0 < x_n < x_2 < 1$ donc $x_n^{n+1} \rightarrow 0$ d'où $\ell = 1 - \ell$: $\ell = \frac{1}{2}$.

- b) On écrit $x_n = \frac{1}{2} + h_n$. Alors

$$\left(\frac{1}{2} + h_n\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} + h_n\right)^n\right) = \frac{1}{2} - h_n, \text{ soit } 2h_n = \left(\frac{1}{2} + h_n\right)^{n+1}$$

De même, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît (considérer $P_n(x_{n+1})$), $h_n < h_2 < \frac{1}{2}$ et, puisque $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, pour tout $1 > \lambda > \frac{1}{2}$, on peut trouver un rang à partir duquel

$$\frac{1}{2} + h_n < \lambda < 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)h_n = 0$. On revient à notre équation :

$$2h_n = \left(\frac{1}{2} + h_n\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} (1 + 2h_n)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1) \ln(1+2h_n)} = \frac{1}{2^{n+1}} e^{(n+1)[2h_n + o(h_n)]} \sim \frac{1}{2^{n+1}},$$

donc $h_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}$.

Exercice 8: MINES-PONTS PSI 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \rightarrow x^{3n} - 3nx + 1$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une unique racine dans $]1; 2[$. On note x_n cette racine.
2. Trouvez a tel que $x_n = 1 + a \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
3. Trouvez b tel que $x_n = 1 + a \frac{\ln n}{n} + b \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

 *Solution:*

1. f_n strictement croissante sur $]1; 2[$, $f_n(1) < 0$ et $f_n(2) > 0$.

2. Puisque $x_n \in [1; 2]$ on a $1 \leq x_n^{3n} \leq 6n - 1$ et en prenant le log on en déduit $\ln(x_n) \rightarrow 0$ donc $x_n \rightarrow 1$.

Puis $u_n = x_n - 1 \geq 0$ et $\rightarrow 0$ et $(1 + u_n)^{3n} = 3n(1 + u_n) - 1 \sim 3n$ donc, comme $\lim = +\infty \neq -1$, $3n \ln(1 + u_n) \sim \ln(3n) \sim \ln(n) \sim 3nu_n$ donc $u_n \sim \frac{\ln n}{3n}$.

3. On pose $v_n = x_n - 1 - \frac{\ln n}{3n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ donc $nv_n = o(\ln n)$ puis $\exp(3n \ln(1 + \frac{\ln n}{3n} + v_n)) = 3n + \ln n + 3nv_n - 1 \sim 3n$.

Or $\exp = \exp(3n(\frac{\ln n}{3n} + v_n + O(\frac{\ln^2 n}{n^2}))) = \exp(\ln n + 3nv_n + o(1)) \sim \exp(\ln n + 3nv_n) = n \exp(3nv_n) \sim 3n$

donc $\exp(3nv_n) \sim 3$ puis $v_n \sim \frac{\ln 3}{3n}$.

Exercice 9: CCP PSI 2016

Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un réel x_n tel que $x_n - e^{-x_n} = n$.

Montrer que $x_n \in [n; n+1]$.

En déduire un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

 **Solution:**

La réponse aux deux premières questions est immédiate en considérant la fonction $f : x \mapsto x - e^{-x}$ et ses variations.

On a donc $x_n \sim n$; puis en posant $x_n = n + y_n$ avec $y_n \in [0; 1]$ on a $y_n = e^{-(n+y_n)}$ ce qui montre que $y_n \rightarrow 0$ puis $y_n \sim e^{-n}$.

Exercice 10: IMT PSI 2018 2021

Convergence de la suite de terme général $u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^2}$.

 **Solution:**

| Faire un DL. On trouve $\ell = e^{-1/6}$.

Exercice 11: MINES-PONTS PSI 2017

Limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$?

 **Solution:**

Comme $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers l'infini (équivalent de Stirling), on a

$$\ln(n!) = \ln \left(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) \right) = -n + n \ln n + \ln n + o(1),$$

donc $\ln(u_n) = \frac{1}{n} (-n + n \ln n + \ln n + o(1) - n \ln n) = -1 + o(1)$, puis

$$\lim u_n = \frac{1}{e}.$$

Exercice 12: MINES-PONTS PSI 2018

On note, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$.

1. Montrez que $a_n \rightarrow 0$.

2. Étudiez la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

3. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$.

 **Solution:**

1. $\ln(a_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$. On fait un DL :

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O \left(\frac{1}{k^{3/2}} \right)$$

Or la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ converge par le CSSA, une série dont le terme général est $O \left(\frac{1}{k^{3/2}} \right)$ est

ACV mais la série de terme général $-\frac{1}{2k}$ diverge et ses sommes partielles tendent vers $-\infty$.

Par suite $\ln a_n \rightarrow -\infty$ donc $a_n \rightarrow 0$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$ et un DL rapide donne $u_n \sim \frac{-1}{2n^2}$

Donc $\sum u_n - u_{n+1}$ converge donc la suite (u_n) converge (vers la constante d'Euler γ).

3. L'énoncé équivaut à démontrer la convergence de la suite de terme général $\sqrt{n}a_n$ vers un réel $C > 0$, et pour cela il suffit de démontrer que la suite de terme général $\ln(\sqrt{n}a_n)$ converge vers un certain réel ℓ (on aura $C = e^\ell$). 2 méthodes :

– Méthode 1

Par le lien suite-série encore, cela revient à démontrer la convergence de la série de terme général $\ln(\sqrt{n+1}a_{n+1}) - \ln(\sqrt{n}a_n)$. Or :

$$\ln(\sqrt{n+1}a_{n+1}) - \ln(\sqrt{n}a_n) = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} \frac{a_{n+1}}{a_n}}\right) = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)}\right)$$

et un banal DL permet de conclure.

– Méthode 2

Cette méthode contrairement à la précédente utilise la Q2.

$$\ln(a_n) + \frac{1}{2} \ln(n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} u_n = \sum_{k=1}^n \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{2} u_n$$

Or $\ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ donc la série dans l'expression précédente converge, et puisque la suite (u_n) converge, on conclut.

Exercice 13:

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que il existe un réel M tel que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M$.

Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

(Indication : Poser $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ si $n \geq 1$, $B_0 = 0$, et remarquer $b_k = B_k - B_{k-1}$).

Exercice 14: CCP PSI 2016

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \alpha \ln n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite (u_n) converge.

 Solution:

Utiliser une comparaison série-intégrale pour encadrer u_n . Cet encadrement permet de montrer que (u_n) est bornée si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$. Et dans ce cas on montre que la suite est monotone donc convergente.

Plus rapidement, on pourrait utiliser :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

qui conduit à

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \alpha \ln n = \ln(2n+2) - \frac{1}{2} \ln(n+1) - \alpha \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1)$$

mais c'est hors-programme....

Exercice 15: CCP PSI 2016

Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

- Montrer que f définit une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser. Prouver que la réciproque g de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. Donner le développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Exercice 16: MINES-PONTS PSI 2018

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $K(f)$ la borne inférieure de l'ensemble des k tels que f soit k -lipschitzienne.

- Montrez que E est un espace vectoriel.
- Montrez que K est bien définie et que, si $f \in E$, alors f est $K(f)$ -lipschitzienne.
- Montrez que K n'est pas une norme sur E mais que $N(f) = |f(0)| + K(f)$ en est une.
- Comparez $\|\cdot\|_\infty$ et N .

 *Solution:*

- Facile
- L'ensemble des k est non vide et minoré par 0 donc possède une borne inf.
Par définition de la borne inf, il existe une suite $(k_n) \rightarrow K(f)$. Pour x, y fixés, $|f(x) - f(y)| \leq k_n |x - y|$, puis passage à la limite.
- si f est une fonction constante non nulle, on a $K(f) = 0$ donc l'axiome de séparation n'est pas vérifié.
 - On a facilement $K(\lambda f) = |\lambda|K(f)$ donc $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.
 - Pour tous x, y :

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (K(f) + K(g)) |x - y| \leq (N(f) + N(g)) |x - y|$$
 donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$
 - Et si $N(f) = 0$ alors $K(f) = 0$ et $f(0) = 0$, $|f(x) - f(y)| \leq 0$ donne $f(x) = f(y) = f(0) = 0$
Ainsi N est bien une norme
- $|f(x)| \leq K(f)|x - 0| + |f(0)| \leq N(f)$ donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$. a
Avec $f_n(x) = x^n$, comme $\sup_{[0;1]} |f'_n(x)| = n$, $K(f_n) \leq n$ et comme $|x^n - 1| = |x - 1|(1 + x + \dots + x^{n-1})$, donc
 $K(f_n) \geq 1 + x^{n-1}$ (pour tout $x \neq 1$) donc $K(f_n) = n$ puis $N(f_n) = n$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. Ainsi la suite (f_n) est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour N , les normes ne sont pas équivalentes.

II. SÉRIES NUMÉRIQUES**Exercice 17: TPE PSI 2016**

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ où $\alpha > 0$.

Exercice 18: CCP PSI 2016

Démontrer que la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 19: CCP PSI 2013

Nature des séries de termes généraux $u_n = n^a \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ($n \geq 1$) et $v_n = n^{1/n^2} - 1$ ($n \geq 1$).

 *Solution:*

$$\left| \begin{array}{l} u_n \sim \frac{1}{n^{2-a}} \text{ donc } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } a < 1. \\ v_n \sim \frac{\ln}{n^2} \text{ donc } \sum v_n \text{ converge (série de Bertrand, à savoir refaire (multiplier par } n^{3/2} \text{ etc.)).} \end{array} \right.$$

Exercice 20: MINES-PONTS PC 2003

Nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{n^{1/4}}\right)^{-1/4} - 1$.

 **Solution:**

| Divergente (après DL à l'ordre 2).

Exercice 21: NAVALE PSI 2021

Nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

 **Solution:**

| $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série converge, comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 22: IMT PSI 2016, MINES-PONTS PSI 2021

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ soit convergente, puis calculer sa somme.

Exercice 23: MINES-PONTS PSI 2021

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$.

Étudiez la convergence de la série de terme général $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

 **Solution:**

Soient $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$ et a_p, b_q les coefficients dominants resp. de P et Q .

- Si $p \geq q$, u_n ne tend pas vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série diverge grossièrement.

- Si $q \geq p + 2$, $|u_n| \sim \frac{|a_p|}{|b_q|} \frac{1}{n^{q-p}}$: par les théorèmes de comparaison, la série est ACV.

- . si $q = p + 1$, $u_n = \frac{1}{b_{p+1}n} \left(a_p + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{a_p}{b_{p+1}} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série converge, comme somme de deux séries convergentes.

Exercice 24: CCP PC 2006

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$; on définit la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\alpha_0 > 0$ et la relation

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}.$$

Enfin, on suppose que $\lambda = a + b - c - d < -1$.

1. On note $\beta_n = \ln(n^{-\lambda} \alpha_n)$. Montrer que $\sum (\beta_{n+1} - \beta_n)$ converge.

2. En déduire qu'il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} k/n^{-\lambda}$ et en déduire que $\sum a_n$ converge.

 **Solution:**

1. On vérifie $\beta_{n+1} - \beta_n = O(1/n^2)$.

2. La suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente, on note ℓ sa limite, puis $k = e^\ell$.

Exercice 25: CCP PC 2003

On pose $b_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$. Quelle est la nature de la série de terme général $1/b_n$?

 **Solution:**

Le but est évidemment d'avoir un équivalent de b_n .

1^{re} méthode : on compare à des intégrales. De

$$\int_{k-1}^k \ln^2 t \, dt \leq \ln^2 k \leq \int_k^{k+1} \ln^2 t \, dt$$

on tire l'encadrement

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt \leq b_n \leq \int_2^{n+1} \ln^2 t \, dt$$

Or, en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^n \ln^2 t \, dt = n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n,$$

ce qui montre par encadrement par deux termes équivalents (ce qui se démontre aisément), que

$$b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

2^e méthode : faire apparaître des sommes de Riemann. Puisque $\ln k = \ln \left(\frac{k}{n} \right) + \ln n$, on a

$$\ln^2 k = \ln^2 \left(\frac{k}{n} \right) + \ln^2 n + 2 \ln(n) \ln \left(\frac{k}{n} \right),$$

ce qui montre

$$b_n = n\alpha_n + 2\beta_n n \ln n + n \ln^2 n,$$

avec

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln^2 \left(\frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha = 2$$

et

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta = -1$$

et donc

$$b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2 n.$$

Conclusion : la série $\sum 1/b_n$ converge par comparaison à une série de Bertrand (H.P, à savoir refaire).

Exercice 26: CENTRALE PSI 2021

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n n^a}{n^{2a} + (-1)^n}$.

1. Pour quelles valeurs de a , la série de terme général est-elle absolument convergente? convergente?
2. Déterminez un équivalent de u_n et commentez.

 **Solution:**

1. $|u_n| \sim \frac{1}{n^a}$ donc $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $a > 1$.

Si $a \leq 0$, $u_n \not\rightarrow 0$, la série diverge grossièrement.

Si $0 < a \leq 1$, on fait un développement limité : $u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{=v_n} - \frac{1}{n^{3a}} + O\left(\frac{1}{n^{5a}}\right)$. La série $\sum v_n$ converge, et

$u_n - v_n \sim -\frac{1}{n^{3a}}$ donc $\sum u_n - v_n$ converge si et seulement si $a > \frac{1}{3}$ donc $\sum u_n$ aussi.

2. Pour $0 < a \leq \frac{1}{3}$, on a $\sum u_n$ divergente, pourtant $u_n \sim v_n$ avec $\sum v_n$ convergente.

Exercice 27: CCP PSI 2011 2013 2018, IMT PSI 2016

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

Nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$?

 **Solution:**

$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$. Cela montre déjà que $\sum u_n$ diverge.

Ensuite $u_{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n+1} \sim \frac{u_n}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$ d'où $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 28: MINES-PONTS PSI 2018

1. Convergence et somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
2. Convergence et somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right)$ ($n \in \mathbb{N}$).

 *Solution:*

1. On connaît le DSE :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arc} \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La série ci-dessus vérifie le CSSA (vérification facile), ce qui prouve de plus qu'elle converge en fait pour $x \in [-1; 1]$. On peut donc majorer son reste :

$$\forall x \in [-1; 1], |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

donc $\|R_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$; ainsi la série converge uniformément sur tout le segment $[-1; 1]$. Le théorème de la double limite donne alors

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arc} \tan 1 = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Arc} \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

2. On introduit les nombres harmoniques : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Il fallait commencer par redémontrer que $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$; je ne le refais pas, c'est classique et fait maintes fois (par exemple à l'aide d'une comparaison série-intégrale).... On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(H_{2n+2} - \frac{1}{2} H_{n+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\ln(2n+2) - \frac{1}{2} \ln(n+1) + \frac{1}{2} \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n \ln n}{2(n+1)} + cste \cdot \frac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc $\sum u_n$ converge comme somme de trois séries convergentes (les 2 premières pas le CSSA).

Exercice 29: MINES-PONTS 1991

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Soit w_n le terme général de la série produit de Cauchy des deux séries de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum w_n$.

 *Solution:*

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}.$$

En décomposant la fraction rationnelle (de k) en éléments simples, on trouve :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \quad (*) \end{aligned}$$

Par comparaison série-intégrale on montre que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc le premier terme de la somme (*) est égal à $(-1)^n \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et le second à $2(-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$. La série de terme général w_n est donc convergente, mais pas absolument convergente.

Exercice 30: CCP PSI 2016 2018 2021

On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrez que $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, étudiez la série $\sum u_n^2$.

 **Solution:**

1. $u_{n+1} \leq u_n$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ donc la suite converge. $\sin \ell = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$ donc $\lim u_n = 0$.
2. La suite (u_n) converge donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge, et $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}u_n^3$.
3. Maintenant, la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge car la suite $(\ln u_n)$ diverge, et $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) \sim -\frac{1}{6}u_n^2$.

Exercice 31: MINES-PONTS PSI 2021

Soit $a > 1$. On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{(n+1)^a} + \frac{1}{(n-1)^a} - \frac{2}{n^a}$.

1. Montrez la convergence de la série $\sum u_n$ puis calculez la somme de cette série.
2. On pose, pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$. Montrez $S_n = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{(n+1)^a} - \frac{1}{n^a}$.
3. Trouvez un équivalent de $R_n = S - S_n$.

 **Solution:**

1. On fait un DL et on trouve : $u_n \sim \frac{a(a+1)}{n^{a+2}}$.
2. On obtient la relation demandée par télescopage (à faire proprement, avec es changements d'indice...). Cela reprouve d'ailleurs la convergence et par passage à la limite $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2^a}$ (c'est curieux que cette question ait été posée en n°2!)
3. $R_n \sim \frac{-a}{n^{a+1}}$ (il est facile de calculer R_n par télescope!)

III. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 32: CCP PSI 2013

On pose $h_n(x) = x^{2n+1} \ln x$. Étudiez la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (h_n) .

 **Solution:**

CVS vers la fonction nulle sur $]0;1]$ (on peut aussi prolonger en 0).

On calcule la dérivée et on obtient $\|h_n\|_\infty = h_n(e^{-1/(2n+1)}) = \frac{1}{e} \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ donc il y a CVU.

Exercice 33: CCP PSI 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$. Étudier la convergence simple de (u_n) sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? sur $[a; +\infty[$ pour $a > 0$?

Exercice 34: CCP PC 2001

Étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in [0; \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}; 1]$. (convergence simple, uniforme?). Sur quel ensemble a-t-on convergence uniforme ?

 **Solution:**

On vérifie que $\|f_n\|_\infty = n/4$ donc on n'a pas convergence uniforme. En revanche, on a convergence uniforme sur tout $[a, 1]$ pour $a > 0$.

Exercice 35: CCINP PSI 2021

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $G_n : \begin{cases} [0;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto (1 - \frac{t}{n})^n e^t. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;1], |G'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;1], \left| (1 - \frac{t}{n})^n e^t - 1 \right| \leq \frac{te^t}{n}$.

3. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$, $I_n(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t dt$. Montrer que la suite de fonctions (I_n) converge simplement sur $[0;1]$.

4. Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 36: ENSAE MP 2002 etc...

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 n^2 (t^n - t^{n+1}) f(t) dt.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

 **Solution:**

On a $\lim I_n = f(1)$.

Méthode 1 : On commence par remarquer que

$$\int_0^1 n^2 (t^n - t^{n+1}) dt = \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

En considérant $f - f(1)$, on se ramène au cas où $f(1) = 0$. On coupe alors l'intégrale en $\int_0^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^1$, le premier morceau tend vers 0 car inférieur à $n^2(1-\delta)^n \|f\|_\infty$ et le second est plus petit que $\sup_{x \in [1-\delta, 1]} |f(x)|$ qui tend vers

0 quand $\delta \rightarrow 0$ par continuité de f en 1.. Le résultat vient alors en écrivant la définition de la limite : si $\varepsilon > 0$ est donné, on en déduit δ tel que le second morceau soit majoré par $\varepsilon/2$, puis on majore le premier par $\varepsilon/2$ pour n assez grand...

Méthode 2 : On effectue le changement de variable $u = t^n$:

$$I_n = \int_0^1 n u^{\frac{1}{n}} (1 - u^{\frac{1}{n}}) f(u^{\frac{1}{n}}) du$$

Or, pour $u \in]0, 1]$, $n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = n(1 - e^{\frac{1}{n} \ln u}) \rightarrow -\ln u$ quand $n \rightarrow \infty$. La suite de fonctions dans l'intégrale converge donc simplement sur $]0, 1]$ vers $u \mapsto -\ln u \cdot f(1)$, et on peut utiliser le th. de convergence dominée (utiliser l'inégalité $1 - e^{-x} \leq x$ et f bornée pour vérifier l'hypothèse de domination) pour conclure.

Exercice 37: TPE MP 2002

Soit $\alpha > 1$. On pose, pour tout entier n et tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) = \frac{nx \sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha}.$$

1. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.
2. En déduire la nature de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 f_n$.
3. Redémontrer le résultat précédent avec le théorème de convergence dominée.
4. On suppose que $\alpha \leq 1$. Étudier la nature de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

 **Solution:**

1. Il y a convergence uniforme vers 0 sur $[a, 1]$ car $|f_n(x)| \leq \frac{n}{1 + (na)^\alpha}$.
2. On vérifie facilement que $|f| \leq 1$ (séparer selon que $\alpha > 2$ ou $\alpha \leq 2$. En décomposant $a_n = \int_0^a f_n + \int_a^1 f_n$, il vient $0 \leq a_n \leq a + b_n^\alpha$ avec $\lim b_n^\alpha = 0$, donc $a_n \rightarrow 0$ en écrivant la définition de la limite.
3. f_n converge simplement vers 0 et est dominée par 1.
4. Par la concavité du sinus

$$a_n \geq \frac{2}{\pi} \int \frac{nx^2}{1 + n^\alpha} dx \geq \frac{n}{\pi(1 + n^\alpha)},$$
 donc si $\alpha > 1$, la suite diverge, et si $\alpha = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \sin x dx = \cos(1)$.

Exercice 38: CCP MP 2001 etc...

Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$? puis de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

 **Solution:**

Si on connaît le résultat classique sur les intégrales de Wallis, on sait que $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ donc la série diverge. Sinon, on peut dire que si cette série positive converge, alors en vertu du théorème du cours sur l'intégration terme à terme d'une série, et puisque la série $\sum \sin^n x$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 - \sin x}$, on aurait intégrabilité de f , ce qui n'est pas le cas (en $\pi/2$, $1 - \sin x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x) \sim \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x)^2$).

Exercice 39: CCP PSI 2013

Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx} + e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

 **Solution:**

| Pour l'existence, considérer un équivalent en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$.

Il y a CVN sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0; +\infty[$ car pour $x > 0$, $f_n(x) \leq x^2 e^{-3nx}$ donc $\|f_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leq b^2 e^{-3na}$, terme général d'une série convergente. Cela implique la CVU puis la continuité de la somme sur $\mathbb{R}_+^*$ en vertu d'un th. du cours.

On a de la même façon la continuité sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour $x > 0$ $f(x) \leq x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3nx} = \frac{x^2}{1 - e^{-3x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - e^{-3x}} = 0$ puisque $1 - e^{-3x} \underset{0}{\sim} 3x$. Il en résulte

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ ce qui prouve la continuité à droite en 0.

Enfin, on démontre de la même façon la continuité en 0^- .

Exercice 40: IMT PSI 2016

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \text{ et } S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 41: IMT PSI 2016

Soit a un réel fixé et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n : x \mapsto a^n \frac{\cos nx}{n!}$.

1. Étudier la CVS et la CVU de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Calculer sa somme S .
3. Pour $p \in \mathbb{N}$ calculer $\int_0^{2\pi} S(x) \cos(px) dx$ et $\int_0^{2\pi} S(x) \sin(px) dx$.

Exercice 42: CCINP PSI 2021

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de la fonction f .
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 1^- .

Indication : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution:

Merci à Laure pour cet exercice

1. Il s'agit en fait d'une série entière, donc il serait très maladroit d'utiliser les théorèmes généraux sur les séries de fonctions!!!

La suite $(x^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc $R = 1$, et la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$.

Il y a divergence grossière pour $x = \pm 1$ donc le domaine de définition se limite à $] -1; 1[$.

- 2.
3. Banale comparaison série intégrale + changement de variable

Exercice 43: IMT PSI 2021

On définit $\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$ avec $x > 0$ et $t \in [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$.

1. Déterminez la nature et valeur de $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$. (Indication : décomposer en élément simples)
2. Quel est le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$?
3. Étudiez la continuité de S .
4. Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

 **Solution:**

1. On trouve $\frac{\ln(1+x)}{x}$
2. Puisque l'on suppose $x > 0$, f_n est bien définie et la série converge (car $\sim \frac{1}{n^2}$).
3. Sur tout intervalle $[a; +\infty[$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n(n+a)}$ donc convergence normale sur $[a; +\infty[$ etc...
4. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^3}$ donc convergence normale donc uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum f'_n$ etc...

Exercice 44: CENTRALE PSI 2021

Soit $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n}(t) dt$.

1. Montrez que la suite (a_n) est bien définie et déterminez sa limite.
2. Trouvez une relation entre a_n et a_{n-1} .
3. Soit $b_n = \sqrt{n}a_n$. Établir la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.

 **Solution:**

1. $f_n(t) \rightarrow 0$ si $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $e^{-t} \sin^{2n}(t) \leq e^{-t}$; on utilise le théorème de CVD et on obtient $\lim a_n = 0$
2. Faire des IPP. On trouve $a_n = 2n(2n-1)a_{n-1}$.
3. $u_n = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{-1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 45: CENTRALE PC 2002

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + x^2}$ pour tout $x \geq 0$.

1. Domaine de définition et calcul de $f(0)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

 **Solution:**

f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ grâce au CSSA.

On a $f(0) = \ln 2$ (résultat sur les séries entières par exemple, en montrant la CVU grâce à une majoration des restes par le CSSA).

On pose ensuite $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a alors $f_n(x) = \frac{1}{n}g(x/n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^+$.

Soit $[0, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}^+$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n^{k+1}}g^{(k)}(x/n),$$

donc, sur $[0, b]$,

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[0,b]} \leq \frac{1}{n^{k+1}} \|g^{(k)}\|_{\text{infty}}^{[0,b]},$$

ce qui assure la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[0, b]$.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0, b]$.

Ceci étant vrai pour tout b et pour tout k , F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 46: CCINP PSI 2021

On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt$.

1. Prouvez l'existence de I .
2. Donnez le développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ et ramenez I à une intégrale de somme.
3. Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ définie sur $[0;1[$ par $f_n(x) = \frac{x^{2n-2} \ln x}{n}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$. Montrez la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur $[0;1[$.
4. Calculer $J_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrez $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

 **Solution:**

| Corrigé en classe

Exercice 47: MINES-PONTS MP 2005

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels, non majorée. Prouver que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Retrouver ainsi la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

IV. SÉRIES ENTIÈRES**Exercice 48: X PC 2001**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n P(n) z^n$?

 **Solution:**

Si P n'est pas de degré 0 (qui est un cas trivial), on a, pour tout n suffisamment grand, $|P(n)| \geq 1$ ce qui montre que $R' \leq R$.

Soit $0 \leq \rho < R$. On peut trouver $\rho < r < R$ donc la suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée. De plus,

$$|P(n) a_n \rho^n| \leq \underbrace{P(n) \frac{\rho^n}{r^n}}_{\rightarrow 0} a_n r^n,$$

et le terme tendant vers 0 est donc borné, ce qui montre par comparaison avec la série $\sum a_n r^n$, qui est absolument convergente, que $\sum P(n) a_n \rho^n$ converge, et donc $R' \geq \rho$.

On en déduit que R' est supérieur à tout élément de $[0, R[$ donc $R' \geq R$.

Conclusion : $R' = R$.

Exercice 49: CCP MP 2001

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum u_n$ et le domaine de convergence.
2. Montrer que la somme de cette série est continue sur $[0, 1]$.
3. Calculer cette somme, et en déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

 **Solution:**

On décompose en éléments simples pour obtenir, avec un rayon $R = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -\frac{1}{2} \left(-x + (x^2 + 1) \operatorname{Arc} \tan x \right)$.

On a bien sûr continuité sur $[0, 1[$ d'après les théorèmes généraux sur les séries entières. La continuité sur $[0, 1]$ se montre en remarquant que l'on a affaire à une série alternée et que, par conséquent, on a une majoration très efficace du reste par le théorème de Leibniz. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|R_n\|_{\infty} = \sum_{x \in [0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2 - 1}$$

donc $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers 0. Puisque la série entière converge uniformément sur $[0, 1]$, on a donc continuité en 1 (ou aussi le théorème d'inversion des limites)... ce qui nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 50: IMT PSI 2016

Rayon de convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$.

 **Solution:**

Le terme $\frac{n+2}{n+1} x^n$ est borné si et seulement si $|x| \leq 1$ donc par définition, $R = 1$.

On peut préciser que, le terme général ne tendant pas vers 0 lorsque $|x| = 1$, le domaine de définition de S est exactement l'intervalle $] -1; 1[$.

$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ donc pour $x \in] -1; 1[$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

donc pour $x \neq 0$, $S(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$.

Exercice 51: CCP PSI 2013 2021

Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrez que $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ pour tout n .

2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrez f définie sur $] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ et solution de l'équation $y' = y^2$.

3. En déduire une expression de u_n

 **Solution:**

Q1 recur. sr n . Q2 $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} u_k \frac{1}{(n-k)!} u_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u_{n+1} x^n$. Ok sur $] -R, R[$. Q1 donne $R \geq \frac{1}{4}$. Q3 $\frac{y'}{y^2} = 1$ ps $y = \frac{-1}{x+k}$ ps $f(x) = \frac{1}{1/3-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1} x^n$ dc $u_n = 3^{n+1} n!$.

Exercice 52: CCP PC 2006, ENSEA PSI 2015, CCP PSI 2018

On pose $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq a_n \leq n^2$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c) On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; trouver une équation différentielle satisfaite par f .

d) Comment peut-on déterminer les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

 **Solution:**

1. Récurrence.

$$a_{n+1} \leq n^2 + \frac{(n-1)^2}{n+1} = n^2 + \frac{(n+1)^2 - 4n}{n+1}$$

$$n^2 + n + 1 - \frac{4n}{n+1} \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

2. Rayon 1, directement grâce à l'encadrement précédent.

3. Multiplier la relation par $n+1$. Après calculs, on trouve que

$$(x-1)f'(x) + (x+1)f(x) = 0.$$

On en déduit $f(x) = C \cdot e^{\int \frac{x+1}{1-x} dx} = C \cdot e^{\int (-1 + \frac{2}{1-x}) dx}$ et compte tenu de $f(0) = 1$, on trouve $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

4. On peut alors avoir une expression (pas très jolie!) des a_n en faisant le DSE de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$ (produit de Cauchy de deux séries entières). Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 1[; \left[\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \right.$$

$$\left. \text{d'où } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n+1-k) \right.$$

Exercice 53: CCP MP 2002

On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$

a) Montrer l'existence, la continuité et la dérivabilité de y .b) Montrer que y satisfait à une équation différentielle du premier ordre.c) En déduire une expression de y en fonction de $x \mapsto F(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$. **Solution:**

Le rayon est infini, la continuité et la dérivabilité s'ensuivent.

On vérifie que $y' = 1 - xy$. L'équation homogène $y' = -xy$ a pour solution $y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ puis la méthode de variation de la constante donne $y(x) = F(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 54: TPE PSI 2016

1. Donner le DSE de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$

2. En déduire celui de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$

3. À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}.$

Exercice 55: TPE PC 2001

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos tx \, dt.$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est DSE sur $\mathbb{R}$ et calculer les coefficients, sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

3. En déduire une nouvelle expression de F .4. Donner une autre méthode pour obtenir F .

 *Solution:*

On développe le cosinus. Il faut ensuite intervertir la somme et l'intégrale. Le mieux est d'utiliser le théorème : si $\sum \int |f_n|$ converge, alors on peut intervertir.

Ici, à x fixé, on pose $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2/2}$, alors

$$\int |f_n| = \frac{x^{2n}}{2^n n!} \sqrt{\pi/2}$$

(calcul détaillé ci-dessous) donc la série est convergente.

On intervertit donc la somme et l'intégrale :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2/2} dt}_{I_k}.$$

On calcule ensuite I_n par récurrence : $I_n = (2n-1) I_{n-1}$ donc

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2}.$$

On pouvait aussi calculer F' et montrer par IPP que satisfait une certaine équation différentielle :

Par convergence dominée, F est définie sur $\mathbb{R}$ et $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq t e^{-t^2}$ qui est intégrable, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2/2} \sin(tx) dt.$$

On intègre par parties avec $u = \sin(tx)$ et $v = e^{-t^2/2}$, donc

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2/2} \sin(tx) dt = \left[e^{-t^2} \sin(tx) \right]_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt = -x F(x).$$

On en déduit que F est solution de $y' + xy = 0$ soit

$$F(x) = \alpha \exp \left\{ - \int x dx \right\} = \alpha e^{-x^2/2}.$$

De la valeur de $F(0) = \sqrt{\pi/2}$ on tire

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

V. INTÉGRATION

Exercice 56: IMT PSI 2022

On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

1. Soit f vérifiant (*).

a) En considérant des valeurs particulières de n , montrez $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1)$.

b) Montrez que $\int_x^{x+1} f'(t) dt$ ne dépend pas de x , puis que f' est constante.

2. Donnez toutes les solutions du problème posé.

 *Solution:*

1. a) Pour $n = 1$ $f'(x) = f(x+1) - f(x)$ puis pour tout n :

$$\begin{aligned} f'(x+1) &= \frac{f(x+n+1) - f(x+1)}{n} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{f(x+n+1) - f(x)}{n+1} - \frac{f(x+1) - f(x)}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+1}{n} \left(f'(x) - \frac{f'(x)}{n+1} \right) = f'(x) \end{aligned}$$

- b) $\left(\int_x^{x+1} f' \right)' = f'(x+1) - f'(x) = 0$ donc $\int_x^{x+1} f' = k = f(x+1) - f(x)$ puis $f'(x) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k+1) - f(x+k) \right)$

2. Réciproquement toutes les f telles que $f(x) = kx + b$ conviennent.

Exercice 57: CENTRALE PC 2001

Donner un équivalent de $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$, où E désigne la partie entière.

 *Solution:*

| Encadrer la partie entière puis utiliser des sommes de Riemann, la limite vaut $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Exercice 58: CCP PC 2002

Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intégrale suivante existe :

$$I = \int_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/x} - a - \frac{b}{x} \right] dx.$$

 *Solution:*

| Simple exercice sur les équivalents, $a = e$ et $b = -e/2$.

Exercice 59:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos \theta \cos t} \quad \text{b) } \int_0^a \frac{x \, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1 + x^2)}} \quad (a > 0) \quad \text{c) } \int_0^{\pi/4} \cos x \ln(\cos x) \, dx$$

Exercice 60: IMT PSI 2019 2021

Justifiez la convergence et calculez $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan \frac{1}{t}\right) dt$.

 *Solution:*

| Corrigé en classe.

Exercice 61: MINES-PONTS PSI 2021

Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrez f définie sur $I =]0, +\infty[$. Montrez f dérivable sur I et déterminez f'
2. Déterminez un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
3. Montrez que $\int_0^{+\infty} f$ existe et la calculer.

Exercice 62:

Soit $a \in [0, 1]$. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_a^1 \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Exercice 63:

Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$.

1. Relation entre I_n et I_{n-2}
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.
3. Équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$.

 **Solution:**

1. Pour $n \geq 2$, $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^{n-2} (1 + \tan^2 x) dx = \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \right]_0^1 = \frac{1}{n-1}$.
2. L'application du théorème de CVD ne pose pas de problème.
3. On fait le changement de variable $t = \tan x$: $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ puis le changement de variable $u = t^n$:
 $I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} du$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{1/n} = 1$ pour tout $u \in]0;1]$, l'application du théorème de CVD donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} du = \frac{1}{2}$ puis $I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
4. Donc le RCV de la série entière $\sum I_n x^n$ est le même que celui de la série entière $\sum \frac{x^n}{2n}$, c'est-à-dire 1.
 Pour $|x| < 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} (x \tan t)^n dt$. Posons $f_n(t) = (x \tan t)^n$. La série géométrique $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; \pi/4]$ vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-x \tan t}$. Il y a CVN (donc CVU) car $\|f_n\|_{[0; \pi/4]}^{[0; \pi/4]} = |x|^n$ terme général d'une série convergente. On peut donc intervertir sans problème, et l'on obtient $f(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1-x \tan t}$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale (poser $u = \tan t$ etc...)

Exercice 64: CCINP PSI 2021

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4 x^3} dx$.

1. Montrez l'existence de I_n .
2. Montrez $I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3} dt$.
3. Montrez $\lim J_n = K$ avec $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$
4. A l'aide d'un changement de variables, montrez $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$
5. Prouvez $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$ et en déduire $I_n \sim \frac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{5/3}}$.

Exercice 65: CENTRALE PC 2002

On considère $f: x \mapsto \frac{x^2}{1-x} \ln x$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

2. Calculer $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx$.

3. Trouver un équivalent de $\int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx - L$ en $+\infty$.

4. Montrer que $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

 **Solution:**

1. Simple calcul de limite et th. de prolongement de la dérivée ($\tilde{f}(1) = -1$).
2. On majore $|f|$ par une constante pour aboutir à $L = 0$ par le th. de CVD.
3. On intègre par parties, le même raisonnement que ci-dessus donne $\int_0^1 x^n \tilde{f}(x) dx \sim \frac{f(1)}{n}$.
4. On utilise $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Les théorèmes d'inversion série intégrale permettent de conclure.

Exercice 66:

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan^n t}{1 + \tan^n t} dt$.

 **Solution:**

Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, la limite est nulle par convergence dominée sur un segment. Sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, l'intégrande tend vers 1. La limite de l'intégrale vaut donc $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 67: TPE PSI 2016

Pour $p \in \mathbb{N}$ on note $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^{2p+1} t}$.

1. Existence de I_p ?
2. Calculer I_0 .
3. Trouver une relation entre I_p et I_{p+1} et en déduire I_p .

Exercice 68: CCP PSI 2013

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t} dt$.

 **Solution:**

Existence : pas de problème

Par $u = e^{-t}$ on obtient $I = -2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$. Puis le DSE de $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ donne $I = -2 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t \right) dt$ et il ne reste plus qu'à justifier l'interversion pour obtenir après quelques calculs $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 69:

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 f(x) e^{-nx} dx$.

Exercice 70: CCP PC 2001

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{1+x^2}$.

1. Discuter l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite.

 **Solution:**

On a

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy.$$

Montrons que cela tend vers $+\infty$, résultat donné par l'intuition car $y \mapsto \frac{\ln(1+y)}{y^2}$ non intégrable.

Méthode 1

$$u_n \geq \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy \geq \int_0^1 \ln(2) \cdot \frac{y}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy$$

par inégalité de convexité ($y \mapsto \ln(1+y)$ est au-dessus de la corde entre 0 et 1), cela suffit à conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Méthode 2

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit elle tend vers $+\infty$, ce que l'on veut montrer, soit elle converge dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On choisit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \ell &\geq u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy \\ &\geq \int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy, \end{aligned}$$

donc, en prenant $n \rightarrow \infty$, ce qui est parfaitement licite grâce au théorème de convergence dominée sur $]a, +\infty[$ où la fonction est parfaitement intégrable :

$$\ell \geq \int_a^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} dy;$$

ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on peut faire tendre a vers 0 et on obtient $\ell = +\infty$. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Méthode 3 (peut-être moins jolie car moins généralisable).

Soit $M \geq 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{y^2} dy \geq 2M$. Alors, pour tout $n \geq 1/\alpha$, on a

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{\frac{1}{n^2} + y^2} dy \geq \int_\alpha^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{2y^2} dy \geq M,$$

donc $u_n \geq M$.

Exercice 71: CCP PSI 2013

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ puis un équivalent de I_n .

 **Solution:**

1. L'existence ne pose pas de problème : la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une limite finie en 0^+ $\left(\frac{1}{n}\right)$ et est majorée en valeur absolue par $1/t^3$...

2. Le th. de CVD donne $\lim I_n = 0$ (prendre pour fonction dominante : $\frac{1}{1+t^2}$ après avoir utilisé $\left| \sin \frac{t}{n} \right| \leq \left| \frac{t}{n} \right|$).
- $nI_n = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t/n)}{1+t^2} dt$ avec $\varphi : u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ qui est bornée donc le th. de CVD donne $\lim nI_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 72:

- a) Justifier l'existence de $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch} t)^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.
- d) Préciser la nature de la série obtenue lorsque $z = R$ puis $z = -R$, et, en cas de convergence, calculer sa somme.

Exercice 73:

Montrer que, pour $a, b > 0$: $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

 Solution:

Justifier d'abord l'existence de l'intégrale (continue, équivalent en 0).

Pour $t \in [0; 1[$, $\frac{1}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (t^b)^n$ d'où $\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}$. Il faut donc justifier l'intervention série-intégrale ; le théorème de convergence en norme 1 ne peut s'appliquer ici puisque $\int_0^1 t^{a+nb-1} dt = \frac{1}{a+nb}$, terme général d'une série divergente. On peut donc soit appliquer le théorème de CVD aux sommes partielles, soit majorer le reste...

Exercice 74: ENSAM 2013

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{t} e^{-t} dt$.

- a) Domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de f ?
- b) Calculer $f(x)$.

 Solution:

Le domaine est $] -1; 1[$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine (th. « usuels »...)

Puis en dérivant sous le signe $\int$ on trouve $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ d'où $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Exercice 75: MINES-PONTS MP 2007

Calculer pour $t \geq 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx$.

 Solution:

Attention : rôles de t et x changés par rapport au cours...

- Posons $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$, $f(t, x) = \frac{\sin(xt)}{x(1+x^2)}$, alors clairement f est de classe $\mathcal{C}^{n,1}$, et :

- $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, $f(t, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} t$, $|f(t, x)| \leq \frac{1}{x(1+x^2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$)
- f admet en tout point $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$
- $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)$ est continue
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, x)$ est continue

- $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| = \left| \frac{\cos(xt)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$
- $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (clair)

D'après le théorème relatif à la dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction $g : t \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x) dx$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $\forall t \geq 0, g'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} dx$.

• On ne peut pas calculer cette intégrale, on va donc plutôt chercher une équation différentielle vérifiée par g , pour cela on veut dériver une fois de plus, et pour que ça marche bien on va faire une IPP, pour élever la puissance au dénominateur, en fixant donc $t > 0 : g'(t) = \left[\frac{\sin xt}{t} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$ (IPP justifiée car le terme entre crochets admet une limite, d'ailleurs nulle, en $+\infty$). Ainsi $g'(t) = \frac{2}{t} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xt}{(1+x^2)^2} dx$, on applique à nouveau le théorème de dérivation sous le signe intégrale (hypotheses faciles à vérifier comme précédemment), on obtient :

$$\begin{aligned} g''(t) &= -\frac{2}{t^2} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xt}{(1+x^2)^2} dx + \frac{2}{t} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos xt}{(1+x^2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{t} g'(t) + \frac{1}{t} \left[-\frac{1}{1+x^2} \cdot x \cos xt \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} -\frac{1}{1+x^2} (\cos xt - tx \sin xt) dx \text{ (IPP justifiée...)} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{t} g'(t) + \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+x^2} dx}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{x \sin xt}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

On en déduit $g''(t) + g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+x^2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{x} dx$, on effectue le changement de variable $u = xt$ qui fournit $du = t dx$ et :

$$g''(t) + g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \text{ (résultat classique).}$$

On en déduit $g(t) = \frac{\pi}{2} + \lambda \cos t + \mu \sin t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et par continuité de g cette formule reste valable pour $t = 0$. Comme clairement $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ on en déduit finalement : $\boxed{g(t) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos t + \sin t)}$.

Exercice 76:

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$.

- Domaine de définition, continuité, dérivabilité.
- Calculer F .

 *Solution:*

On pose $g(x, t) = \frac{1 - \cos xt}{t^2} e^{-t}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$. On utilise alors deux fois le théorème relatif à la dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. g est de classe $\mathcal{C}^2$, et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}$, ces deux fonctions se dominent sans difficulté en supposant $x \in [-a, a]$ (penser à utiliser l'inégalité $|\sin X| \leq |X|$).

Ainsi $f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-1}{ix-1} \right) = \frac{1}{1+x^2}$ d'où $f'(x) = f'(0) + \operatorname{Arc tan} x = \operatorname{Arc tan} x$, et $f(x) = f(0) + \int_0^x \operatorname{Arc tan} t dt = \left[t \operatorname{Arc tan} t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \operatorname{Arc tan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Exercice 77: MINES-PONTS PSI 2019 2021

Soit $x > 0$ et on pose $f(x) = \int_0^1 \ln(t) \ln(1 - t^x) dt$.

1. Montrez que f est définie.
2. Écrire f comme somme d'une série de fonctions.
3. Donnez un équivalent de f lorsque $x \rightarrow +\infty$.
4. Limite de f en 0?

VI. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**Exercice 78: CCP MP 2003**

Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $x(1-x)y' + y = x$.
Solutions maximales?

Exercice 79: CCP PSI 2016

Soit $\lambda > 0$ et (E) l'équation différentielle : $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$.

- a) Exprimer à l'aide d'une intégrale les solutions de (E) .
- b) Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de 0.

Exercice 80: CCP PSI 2016

On considère l'équation différentielle $(*) : x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

- a) Déterminer les fonctions développables en série entière solutions de $(*)$. Pourquoi y a-t-il d'autres solutions?
- b) Déterminer toutes les solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$ (on soignera les raccords).

Exercice 81: classique

Soit f une application continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + y = f(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

 **Solution:**

On connaît les solutions de l'équation homogène : $Y(x) = \lambda e^{-x}$; on trouve donc une solution particulière par la méthode de variation de la constante et au final

$$x \mapsto e^{-x} \left[\int_0^x e^t f(t) dt + cste \right]$$

est solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution 1

Montrons que la solution particulière tend vers 0. On commence par l'écrire plutôt sous la forme $y(x) = \int_0^x f(x-u) e^{-u} du$.

La fonction f étant continue par morceaux et admettant une limite en $+\infty$, elle est bornée. On peut donc dominer l'intégrande sur $\mathbb{R}_+$ par $\|f\|_\infty e^{-u}$. Le théorème de convergence dominée (avec caractérisation séquentielle de la limite) montre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \int_0^{+\infty} \ell e^{-u} du = \ell.$$

Solution 2 (à la Césaro)

Supposons que $\lim f = 0$, et posons $h(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq A \quad \forall x \geq 0$.

Si $\varepsilon > 0$, il existe $X \geq 0$ tel que pour tout $t \geq X$, on a $|f(t)| \leq \varepsilon$. Alors

$$\forall x \geq 2X, \quad |h(x)| \leq A \int_0^{x/2} e^{t-x} dt + \varepsilon \int_{x/2}^x e^{t-x} dt = Ae^{-x/2} + \varepsilon,$$

qui est plus petit que 2ε pour x suffisamment grand. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Dans le cas général, si f a pour limite ℓ , on considère $f - \ell$ et on montre que h a pour limite ℓ .

Exercice 82: MINES-PONTS PSI 2021

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

 *Solution:*

| Chercher les solutions développables en série entière, ou utiliser le changement de variable $x = \pm t^2$.

Exercice 83: TPE 2003

Résoudre $x^2y'' - xy' + y = x \ln x$ à l'aide du changement de variable $t = \ln |x|$.

Exercice 84: CCINP 2021

Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$.

1. Donnez les éléments propres de $A(t)$.
2. En déduire il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

 *Solution:*

$\chi_A = X^2 - 2X + 1 - t^2$. Valeurs propres $1-t$ et $1+t$, vecteurs propres associés : $(-1, 1)$ et $(1, -2)$
On diagonalise et on trouve à la fin :

$$x(t) = Ce^{t+1/2t^2} + De^{t+1/2t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = -Ce^{t+1/2t^2} - 2De^{t+1/2t^2}$$

Exercice 85: IMT PSI 2013 2021

Soit le système différentiel : (S) $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales

$x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1. Existence et unicité des solutions de (S).
2. Montrez que si (x, y, z) est une solution, alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
3. Résoudre (S).

VII. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES**Exercice 86: CCINP PSI 2021**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrez que f est continue
2. Exprimez les dérivées partielles de f .
3. Montrez f est de classe C^1 .
4. Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Exercice 87: CCP PSI 2007

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \quad (E)$$

- a) Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, y + x^2)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que φ et son inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$.
- b) À l'aide d'un changement de fonction inconnue, déterminer toutes les solutions de (E) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 88: CCP PSI 2007

Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2$.

Trouver les extrema de f sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 \leq 8\}$.

Exercice 89: CCP PSI 2016

Soit $f : (x, y) \in [-1; 1]^2 \mapsto y^3 x^4 + \ln(1 + y^4)$. Cette fonction admet-elle des extrema globaux ? locaux ?

Exercice 90: CENTRALE PSI 2014, MINES-PONTS PSI 2021

Déterminez les extremums de $(x, y) \mapsto y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

 *Solution:*

| Corrigé en classe

VIII. PROBABILITÉS

Exercice 91: CCINP PSI 2021

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1. Soit B_i l'événement « on tire i boules blanches ». Calculez $\mathbb{P}(B_i)$

2. Montrez $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2} ((1+x)^n + (1-x)^n)$.

3. Calculez la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

 *Solution:*

1. Si Y est le nombre de boules blanches alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ donc $P(B_i) = P(Y=i) = \binom{n}{i} \left(\frac{a}{a+b}\right)^i \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i}$.

2. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i + \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = (1+x)^n + (1-x)^n$.

3. L'événement considéré est $B = \bigcup_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} B_{2i}$ donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{(a+b)^n} \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} a^{2i} b^{n-2i} = \frac{b^n}{(a+b)^n} \frac{1}{2} ((1+a/b)^n + (1-a/b)^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n$$

Exercice 92: MINES-PONTS PSI 2017

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , que l'on tire sans remise.

Quelle est la probabilité que la boule 1 soit tirée au k -ième tirage ?

On suppose que, sur les n boules, m sont rouges et les autres blanches; quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse au k -ième tirage ?

 *Solution:*

Soit R le rang de sortie de 1. Par probabilités composées $P(R=k) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k}{n-k+1} \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}$

Si on considère le tirage jusqu'à épuisement, il y a $n!$ éléments dans Ω et les événements élémentaires donnant une boule rouge en k sont $\binom{n-1}{m-1} \times m! \times (n-m)!$ (choix des emplacements des autres boules rouges $\times$ ordre des boules rouges $\times$ ordre des boules blanches) ou $\binom{n}{1} \times (n-1)!$ (choix de la boule rouge $\times$ ordre des autres boules) donc $P(T_k = r) = \frac{m}{n}$

Exercice 93: CCP MP 2016

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .

2. Déterminer la loi de Y .

 *Solution:*

1. $X(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.

$\forall i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.

On pose $E = \{B_1, B_2, \dots, B_n, N_1, N_2\}$.

Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

$(X=1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.

On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X=1) = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}.$$

$(X=2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.

$$\text{Donc } P(X=2) = \frac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}.$$

$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.

On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.

$$\text{Donc } P(X=3) = \frac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

2. $Y(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est B_1 ou N_1 .

On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées, $\binom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$

possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ème}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{\binom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2 \frac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}.$$

$$\text{Donc } P(Y=k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 94: ENSAM PSI 2018

Trois enfants A, B, C jouent à la balle :

- A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité $\frac{1}{4}$;
- B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité $\frac{1}{4}$;
- C envoie toujours la balle à B .

On note a_n, b_n, c_n les probabilités que A, B, C aient la balle à la n -ième étape.

1. Exprimez a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

2. Trouvez une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

3. Déterminez la limite de (a_n, b_n, c_n) quand $n \rightarrow +\infty$ et montrez que cette limite est indépendante des conditions initiales.

 **Solution:**

1. On note A_n, B_n, C_n les événements : A, B, C a la balle à étape n , de sorte que $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ etc.. (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements puis probas totales : $a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$, $b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + c_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n$.

$$2. M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Éléments propres : $E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$, $E_{-3/4}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_{-1/4}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puis $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$. On peut écrire $M = P_1 - \frac{3}{4}P_2 - \frac{1}{4}P_3$ où P_1 est la matrice de la projection sur $E_1(M)$

parallèlement à $E_{-1/4}(M) \oplus E_{-3/4}(M)$ etc.. d'où $M^n = P_1 + \left(\frac{-3}{4}\right)^n P_2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^n P_3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_1$.

Or P_1 est de la forme $\begin{bmatrix} aU & bU & cU \end{bmatrix}$ et comme elle est stochastique (par passage à la limite de matrices

stochastiques) on a $P_1 = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ puis $\lim a_n = \frac{12}{35}$, $\lim b_n = \frac{16}{35}$ et $\lim c_n = \frac{1}{5}$.

Exercice 95: CCP MP 2016

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

 Solution:

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.

$$\text{Alors, } \forall i_0 \in I, P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

$$\text{Preuve : } P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{P(B)} \quad (1).$$

$$\text{Or } (A_i)_{i \in I} \text{ un système complet d'événements donc } P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B).$$

$$\text{Donc } P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B) \quad (2).$$

(1) et (2) donnent le résultat souhaité.

- On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
Notons T l'événement : « le dé choisi est pipé ».
Notons A l'événement : « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
On demande de calculer $P_A(T)$.
Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a d'ailleurs,
 $P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$.
Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note A_k l'événement : « on tire le chiffre 6 au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On pose $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$.

On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.

Le système $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. On a d'ailleurs,

$$P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ et donc } P(\bar{T}) = \frac{3}{4}.$$

Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\bar{T}}(A)P(\bar{T})}.$$

$$\text{Donc } p_n = \frac{\frac{1}{4} \times (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{4} + (\frac{1}{6})^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

- Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a toutes les chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

Exercice 96: CCP MP 2016

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .

2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

 **Solution:**

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1 .

Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2 .

(U_1, U_2) est un système complet d'événements.

Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.

$$\text{Donc } p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$$

$$\text{On a donc } p_1 = \frac{17}{35}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$. Alors en

tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

On résout l'équation $\ell = -\frac{6}{35}\ell + \frac{4}{7}$ et on trouve $\ell = \frac{20}{41}$.

On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - \ell$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.

$$\text{Or } u_1 = p_1 - \ell = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}.$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = u_n + \ell$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

Exercice 97: CCINP PSI 2021

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

- Donner la loi de X . Précisez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
 - Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre (on utilisera, après l'avoir vérifiée, la relation

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket, \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

- Déterminer l'espérance et la variance de Z .

 Solution:

- L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes. De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec). La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p) .

C'est-à-dire $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

- Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in \llbracket 0; n-i \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $Z(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(Z = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i \cap Y = k-i) = \sum_{i=0}^k P(Y = k-i | X = i) P(X = i)$.

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

Or

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)! (k-i)!} \frac{n!}{i! (n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)! (n-k)! i!} = \frac{k!}{(k-i)! i!} \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$

$$\text{Donc } P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p} \right)^i$$

Donc d'après le binôme de Newton,

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p} \right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}.$$

On vérifie que $1 - p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :

Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

- D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :

$$E(Z) = np(2-p) \text{ et } V(Z) = np(2-p)(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2.$$

Exercice 98: CENTRALE PSI 2018

Soit a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne.

On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages » et on pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.
- Déterminez la limite de la suite (p_n) .

 **Solution:**

- On note B_k : « boule blanche au k -ième tirage ». Alors $A_n = B_1 \cap \dots \cap B_n$ puis

$$P(A_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap A_n) = P(B_{n+1} | A_n) P(A_n) = \frac{b+na}{2b+na} P(A_n).$$
- (p_n) décroissante minorée par 0 donc converge.
 On prend le log des produits partiels, la série diverge, forcément vers $-\infty$ donc $a_n \xrightarrow{0}$.

Exercice 99: MINES-PONTS PSI 2018

Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p . On considère une urne contenant une boule bleue et une boule verte. On effectue N tirages avec remise et on note X le nombre de boules vertes tirées.

- Soit $f: x \rightarrow \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n$. Trouvez le rayon de convergence et l'expression de f .
- Trouvez la loi de X .

 **Solution:**

- $R = 1$, par ex. par d'Alembert.
 On dérive m fois le DSE de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ce qui permet de trouver $f(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$.
- $X|_{(N=n)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P((X=k)|(N=n))P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p^n (1-p) = \frac{2(1-p)p^k}{(2-p)^{k+1}}$$

Exercice 100: CCP PSI 2018

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Calculez $v_n = \frac{\mathbb{P}(X = n+1)}{\mathbb{P}(X = n)}$.
- Montrez que la série de terme général $w_n = v_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

 **Solution:**

- $v_n = \frac{\lambda}{n+1}$.
- $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$ par le CSSA puis $|w_n| \leq \frac{\lambda}{(n+1)^2}$.

Exercice 101: MINES-PONTS PSI 2021

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Déterminez la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (A-1)y' + B^2y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

 **Solution:**

- Équation caractéristique : $r^2 + (A-1)r + B^2 = 0$.
 – Si $\Delta > 0$ il y a deux racines réelles r_1, r_2 et elles doivent être < 0 (car solutions $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$)

- Si $\Delta = 0$ il y a une racine double r qui doit être < 0 (car solutions $(\lambda x + \mu)e^{rx}$)
- Si $\Delta < 0$, on aura deux solutions complexes conjuguées $r \pm i\omega$ et la solution générale de l'équation est $e^{rx}(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$ donc il faut $r < 0$.

En utilisant le produit $p = B^2$ des racines et leur somme $s = 1 - A$ l'évènement cherché est donc :

$$(\Delta > 0 \text{ et } p = r_1 r_2 > 0 \text{ et } s = r_1 + r_2 < 0) \text{ ou } (\Delta \leq 0 \text{ et } s < 0)$$

ou encore :

$$((A - 1)^2 > 4B^2 \text{ et } B^2 > 0 \text{ et } A > 1) \text{ ou } ((A - 1)^2 \leq 4B^2 \text{ et } A > 1)$$

C'est donc tout simplement l'évènement : $(A > 1)$, de probabilité $1 - \mathbb{P}(A = 1) = 1 - p$.

Exercice 102: X PSI 2021

Soient A, B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0; n \rrbracket$. Déterminez la

probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & A-1 & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

 *Solution:*

Exercice 103: CCP MP 2016

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P(X = j, Y = k) = \frac{(j+k)(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

 *Solution:*

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P(Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = j) \cap (Y = k)) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!}.$$

$$\text{Or, } \sum_{j \geq 0} \frac{j(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{e k!} \sum_{j \geq 1} \frac{(\frac{1}{2})^{j-1}}{(j-1)!} \text{ donc } \sum_{j \geq 0} \frac{j(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} \text{ converge et}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{e k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{e k!} e^{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k! \sqrt{e}} (*)$$

$$\text{De même, } \sum_{j \geq 0} \frac{k(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} = \frac{k(\frac{1}{2})^k}{e k!} \sum_{j \geq 0} \frac{(\frac{1}{2})^j}{j!} \text{ donc } \sum_{j \geq 0} \frac{k(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} \text{ converge et}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k(\frac{1}{2})^{j+k}}{e^j k!} = \frac{k(\frac{1}{2})^k}{e k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^j}{j!} = \frac{k(\frac{1}{2})^k}{e k!} e^{\frac{1}{2}} = \frac{k(\frac{1}{2})^k}{k! \sqrt{e}} (**)$$

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :

$$P(Y = k) = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k! \sqrt{e}} + \frac{k(\frac{1}{2})^k}{k! \sqrt{e}} = \frac{(\frac{1}{2} + k)(\frac{1}{2})^k}{k! \sqrt{e}}.$$

Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall j \in \mathbb{N}, P(X = j) = \frac{(\frac{1}{2} + j)(\frac{1}{2})^j}{j! \sqrt{e}}$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \text{ et } P(X = 0)P(Y = 0) \neq 0.$$

2. Posons $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, a_{j,k} = 2^{j+k} P(X = j, Y = k)$.

On a $a_{j,k} = \frac{j+k}{e^j k!} = \frac{j}{e^j k!} + \frac{k}{e^j k!}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j \geq 0} \frac{j}{e^j k!} = \frac{1}{e k!} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{e^j k!} = \frac{1}{e k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} = \frac{1}{k!}$. De même, $\sum_{j \geq 0} \frac{k}{e^j k!} = \frac{k}{e k!} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k}{e^j k!} = \frac{k}{e k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{k}{k!}$.

Ensuite, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = e$. Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

On en déduit que $E(2^{X+Y})$ existe et $E(2^{X+Y}) = \sum j, k a_{j,k} = 2e$.

Exercice 104: MINES-PONTS PSI 2018

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une variance. Montrez que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
2. Soit N et n dans $\mathbb{N}^*$. On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N . On réalise n tirages avec remise et on note X_N la variable donnant le plus grand numéro tiré. Calculez $\mathbb{E}(X_N)$ puis un équivalent quand N tend vers $+\infty$.
3. Montrez que $\mathbb{E}(X_N^2) = \sum_{k=0}^N (2k+1) \mathbb{P}(X_N > k)$ puis donnez un équivalent de la variance de X_N lorsque N tend vers $+\infty$.

 Solution:

1. $|X| \leq 1 + X^2$ donc l'espérance existe. On fait une transformation d'Abel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^p k P(X = k) = \sum_{k=1}^p k (P(X > k-1) - P(X > k)) = \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) - p P(X > p).$$

Par positivité, $\sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \leq \mathbb{E}(X)$ donc la série converge puis

$$0 \leq p P(X > p) \leq p \sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} k P(X = k) \rightarrow 0$$

comme reste d'une série convergente, puis passage à la limite.

2. $X_N(\Omega) = \llbracket 1; N \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, $(X_N > k) = \llcorner$ tous les numéros tirés sont dans $\llbracket k+1; N \rrbracket \lrcorner$, donc $P(X_N > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$ puis $\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N k^n$.

Ensuite :

$$\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=1}^N k^n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

(somme de Riemann) donc $\mathbb{E}(X_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N}{n+1}$.

Rem : si on note Y_i = numéro du i ème tirage, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et $X_N = \max(Y_1, \dots, Y_n)$.

3. Comme dans la question 1, on fait une transformation d'Abel :

$$\mathbb{E}(X_N^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 P(X > k) - \sum_{k=1}^N k^2 P(X > k) = \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1) P(X > k) + P(X > 0) = \sum_{k=0}^N (2k+1) P(X > k)$$

donc

$$\mathbb{E}(X_N^2) = \sum_{k=0}^N (2k+1) \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^N (2N-2k+1) k^n = \frac{2N+1}{N^n} S_n - \frac{2}{N^n} S_{n+1}$$

en notant $S_i = \sum_{k=0}^N k^i$. A l'aide d'une somme de Riemann, on démontre facilement que $S_i \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{i+1}}{i+1}$ donc par

addition d'équivalents *ici licite* on obtient $\mathbb{E}(X_N^2) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{2N^2}{(n+1)(n+2)}$.

Puis par addition d'équivalents *encore licite*, $\mathbb{V}(X_N) = \mathbb{E}(X_N^2) - \mathbb{E}(X_N)^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} N^2$.

Exercice 105: CENTRALE PSI 2021

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, justifiez que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Montrez $\mathbb{E}(\exp(tX_n)) \leq e^{t^2/2}$ pour tous $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.
2. Justifiez que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer. Déterminez la limite de $\mathbb{E}(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand $n \rightarrow +\infty$.

 *Solution:*

1. X_n est une variable aléatoire finie donc l'espérance existe et $\mathbb{E}(\exp(tX_n)) = e^{-t}\frac{1}{2} + e^t\frac{1}{2} = \cosh t$.
 $(2n)! \geq (2n)(2n-2) \dots 2 = 2^n n!$ donc $\cosh t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}$.
2. $\mathbb{E}(\exp(tS_n)) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp(tX_i)\right) = \prod_{i=1}^n \cosh t$ par indépendance.
 $u_n = \mathbb{E}(\exp(tS_n/\sqrt{n})) = \cosh^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ d'où $\ln u_n = n \ln \cosh \frac{t}{\sqrt{n}} \sim n \left(\cosh \frac{t}{\sqrt{n}} - 1\right) \sim \frac{1}{2}t^2$ donc $u_n \rightarrow \exp(t^2/2)$ si $t \neq 0$ (et c'est immédiat pour $t = 0$).

Exercice 106: IMT PSI 2021

1. Soient $c \in \mathbb{R}^+$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}.$$

Que vaut la constante c ?

2. Jacques et Isabelle jouent à un jeu. Si X prend une valeur k paire, Isabelle donne k euros à Jacques. Si X prend une valeur impaire k , Jacques donne k euros à Isabelle. Déterminez l'espérance de gain de Jacques.

 *Solution:*

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ par télescopage donc $c = 1$.
2. $Y = (-1)^X X$ représente le gain algébrique de Jacques et $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - 1$.

Exercice 107: CCINP PSI 2021

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
 - b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

 *Solution:*

1. Soit $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$
Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$.
2. a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \dots \cap (X_N > n)).$$

Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^N P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \dots, X_N$ sont mutuellement indépendantes. Donc

$$P(Y > n) = \prod_{i=1}^N q^n = q^{nN}.$$

Or $P(Y \leq n) = 1 - P(Y > n)$ donc $P(Y \leq n) = 1 - q^{nN}$.

Calcul de $P(Y = n)$:

– Premier cas : si $n \geq 2$.

$$P(Y = n) = P(Y \leq n) - P(Y \leq n-1).$$

$$\text{Donc } P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N).$$

– Deuxième cas : si $n = 1$.

$$P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.

b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.

C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = (1 - (1 - q^N))^{n-1}(1 - q^N)$.

On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$. Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$.

Exercice 108: CCINP PSI 2021

Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminez la loi de N .
2. Pour tous $(k, n) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \mathbb{N}^*$, calculez $\mathbb{P}(X = k, N = n)$.
3. Calculez $\mathbb{P}(X = k)$. En déduire la loi de X .
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

 Solution:

1. $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{6}{10}\right)$
2. $\mathbb{P}(X = k, N = n) = \mathbb{P}(X = k | N = n)P(N = n) = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \frac{6}{10}$
3. $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k, N = n) = \frac{1}{6}$. X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$.
4. Oui : $P(X = k, N = n) = P(X = k)P(N = n)$

Exercice 109: CCINP PSI 2021

On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1, 2, 3 et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z celle correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminez la loi de Y .
2. Quelle est la loi de $Y - 1$? En déduire l'espérance et la variance de Y .
3. Déterminez la loi du couple (Y, Z) .
4. En déduire la loi de Z .

 Solution:

1. $Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, et pour tout n : $P(Y = n) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \frac{2}{3}$. (en effet, l'évènement $(Y = n)$ est la réunion des 6 évènements de la forme $(i, i, \dots, i, j)$ où $j \neq i$ et où il y a $n - 1$ fois le i ; chacun de ces évènements est de probabilité $\left(\frac{1}{3}\right)^n$).

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y - 1 = k) = P(Y = k + 1)$ donc $Y - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. $E(Y) = E(Y - 1) + 1 = \frac{5}{2}$,
 $V(Y) = V(Y - 1) = \frac{3}{4}$
3. Si $2 \leq n < k$, $P(Y = n, Z = k) = P(Z = k | Y = n)P(Y = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \frac{2}{3}$ (et sinon, vaut 0).
4. Pour $k \geq 3$, $P(Z = k) = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} \sum_{n=2}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

Exercice 110: CCP MP 2016

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
 Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
- b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .
 On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .
 Déterminer la loi de X .

 **Solution:**

1. a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^n ((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k))$ (union d'événements deux à deux disjoints). Donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

- b) $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k)P(Y = m)$.

Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 111: ENSAM PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

- Déterminer les lois de X et de Y .
- a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
b) Déterminer l'espérance et la variance de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- Calculer $P(X = Y)$.

 **Solution:**

$$1. \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) \text{ donc } P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Donc } P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{2ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2ej!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{ej!}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \frac{1}{ej!}.$$

2. a) On pose $Z = X + 1$. $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z = n) = P(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$\text{Donc d'après le cours, } E(Z) = \frac{1}{p} = 2 \text{ et } V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2.$$

$$\text{On en tire } E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 1 \text{ et } V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2.$$

b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

$$\text{Donc, d'après le cours, } E(Y) = V(Y) = \lambda = 1.$$

3. On a : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4. $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2e} e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc } P(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Exercice 112: CENTRALE PSI 2018

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrez que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie

2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrez que $\frac{1}{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

3. Montrez cette inégalité dans le cas général.

 **Solution:**

1. $X \geq 1$ donc $\frac{1}{X} \leq 1$
2. Théorème de transfert : $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (1-p)^n = \frac{-p \ln p}{1-p}$.
Comme $\ln p \leq p-1$, on a bien $\frac{-p \ln p}{1-p} \leq p = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.
3. Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}^2(YZ) \leq \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2)$ avec $Y = \sqrt{X}$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{X}}$.

Exercice 113: MINES-PONTS PSI 2018

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p . On considère la matrice aléatoire $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Donnez la loi du rang et de la trace de M .
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

 *Solution:*

1. – Les colonnes de M sont toutes proportionnelles à $(X_1, \dots, X_n)$ donc $\text{rg } M \leq 1$, et ce rang est nul si et seulement si $X_1 = \dots = X_n = 0$.
Donc $\mathbb{P}(\text{rg} = 0) \stackrel{\text{indépendance}}{=} \prod_i \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$, et $\mathbb{P}(\text{rg} = 1) = 1 - \mathbb{P}(\text{rg} = 0)$.
– $\text{tr } M = \sum_i X_i^2$ prend ses valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.
Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $(\sum X_i^2 = k) \Leftrightarrow (\sum X_i = k)$. Or la variable aléatoire $\sum X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, donc $\mathbb{P}(\text{tr}(M) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. $\text{rg } M = 1$ donc $M^2 = \text{tr}(M)M$ (classique..) donc p projecteur si et seulement si $\text{tr}(M) = 1$.

Exercice 114: CCP PSI 2019 2021

1. Donnez le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$ avec $0 < p < 1$ et $q = 1-p$. Montrez que la suite (p_k) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.
3. On définit la loi d'une variable aléatoire par $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k$. Déterminez la fonction génératrice de X .
4. Calculez l'espérance et la variance de X .

 *Solution:*

1. On dérive $n-1$ fois le DSE de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et on trouve
$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$
2. $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1$
3. $G_X(t) = \frac{p^n}{(1-qt)^n}$ pour $|t| < \frac{1}{q}$.
4. On calcule $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{nq}{p}$, $G''_X(1) = \frac{n(n+1)q^2}{p^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = \frac{nq}{p^2}$

Exercice 115: CCP PSI 2018 2019 2021

Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Déterminez l'espérance et la variance de X .
2. Calculez la fonction génératrice de X .
3. Reconnaitre la loi de X .

 *Solution:*

1. $E(Z) = 2E(X) + 1 = \frac{1}{p}$ donc $E(X) = \frac{1-p}{2p}$.
 $V(Z) = V(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}$ car indépendantes donc $V(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$.
2. $G_Z(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t} = E(tt^X t^Y) = t(G_X(t))^2$ par indépendance de X et Y puis $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1 - (1-p)t}}$ car ≥ 0 sur $[0; 1]$.
3. On fait un DSE : $\sqrt{\frac{p}{1 - (1-p)t}} = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} (1-p)^n t^n$ donc $P(X = n) = \frac{\sqrt{p}(2n)!}{2^{2n} n!^2} (1-p)^n$.
On ne reconnaît pas grand chose...
Rem : $(1+x)^{-1/2} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!^2} x^n$ pour $x \in]0; 1[$.

Exercice 116: IMT PSI 2021

Soit $f : t \rightarrow \frac{t}{2 - t^2}$.

1. Développez f en série entière, précisez le rayon de convergence.
2. Donnez la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f .
3. Calculez l'espérance de X .
4. Déterminez la loi de la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2}$.

 *Solution:*

1. $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$, $R = 1$.
2. $P(X = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $P(X = 2n) = 0$.
3. $E(X) = f'(1) = 3$.
4. $Y(\Omega) = \mathbb{N} + \frac{1}{2}$, $P\left(Y = n + \frac{1}{2}\right) = P(X = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}$

