FORMULES DE NEWTON, FONCTION DZETA

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes; seul sont utilisés dans la partie B les résultats de A.1 et A.5, qui pourront être admis, ou démontrés d'une manière différente de celle proposée.

PARTIE A :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, normalisé, de racines $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (distinctes ou non). On note $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de ces racines, de sorte que :

$$P = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \;=\; X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n \;=\; \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \sigma_p X^{n-p}$$

(où l'on a posé de plus $\sigma_0 = 1$).

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$, et on pose $S_0 = n$.

1°) Calculer S_1 et S_2 en fonction de σ_1 et σ_2.

2°) Montrer que : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{P(X)}{X - x_k}$ (1).

3°) En remarquant que $P(X) = P(X) - P(x_k)$, démontrer la relation :

$$\frac{P(X)}{X - x_k} \;=\; \sum_{p=0}^{n-1} a_{p,k} X^{n-1-p}$$

où $a_{p,k} \;=\; \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (x_k)^{p-j} \sigma_j$ (2).

4°) Déduire de (1) et (2), pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k \sigma_k \;=\; 0$$

(formules de Newton)

5°) Démontrer, à l'aide de ces formules, les relations :

$$S_3 = (\sigma_1)^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \quad \text{et} \quad S_4 = (\sigma_1)^4 - 4(\sigma_1)^2\sigma_2 + 4\sigma_3\sigma_1 + 2(\sigma_2)^2 - 4\sigma_4$$

6°) *Application :* Soient $x_1,x_2,\ldots,x_n$ n nombres complexes vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 0 \\ (x_1)^2 & + & (x_2)^2 & + & \ldots & + & (x_n)^2 & = & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (x_1)^n & + & (x_2)^n & + & \ldots & + & (x_n)^n & = & 0 \end{array}\right.$$

Démontrer que : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Question subsidiaire : (pour les 5/2 uniquement) Donner une autre démonstration de ce résultat, en utilisant les systèmes de VanDerMonde...

PARTIE B :

On pose, pour tout réel $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^x}$. (fonction zeta de Riemann).

Rem. pour les 3/2 : Cette somme désigne la limite : $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}$, et on admettra que cette limite existe.

Le but de cette partie est de calculer $\zeta(x)$ pour $x = 2{,}4{,}6{,}8$ (*et plus, si vous aimez!*)

n désigne un entier naturel non nul. On note P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right]$$

1°) Exprimer P en fonction des X^k. Quel est le degré de P, son coefficient dominant, sa parité ?

2°) Déterminer les racines de P. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

3°) **a)** Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré n tel que : $Q(X^2) = P(X)$.
Exprimer Q en fonction des X^k.
Factoriser Q en produit de polynômes de degrés 1 à coefficients réels.

b) Calculer les fonctions symétriques élémentaires σ_i du polynôme Q en fonction de n, pour $i \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$.

c) Déduire de A.1 et A.5 les valeurs des sommes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 ,\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)^4 ,$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)^6 ,\ S_4 = \sum_{k=1}^{n} \left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)^8$$

4°) En utilisant l'encadrement (<u>que l'on démontrera</u>) :
$\forall x \in]0,\pi/2[\ ,\ \cot x < 1/x < 1/\sin x,$
ainsi que l'égalité : $1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x,$
déduire de la question précédente un encadrement de chacune des sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 ,\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^4 ,\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^6 ,\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^8$$

5°) En déduire les valeurs de : $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$.
