DM N°1 (pour le 14/09/2012)

NOTATIONS :

- Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $[-1,1]$.
- Si f est une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, on notera $\|f\|_\infty$ le réel $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathrm{I}\}$. On notera alors $\mathrm{E}(f)$ l'ensemble des points extrémaux de f, c'est-à-dire $\mathrm{E}(f) = \{x \in \mathrm{I} \text{ tq } |f(x)| = \|f\|_\infty\}$.
- On confondra les notions de « polynôme » et de « fonction polynôme ».

PARTIE 1 : Polynômes de Tchebychev

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel.

1. **a)** Établir l'existence d'un polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (*)$$

(on pourra remarquer que $\cos\theta$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

b) Montrer qu'un polynôme vérifiant $(*)$ est unique.

T_n s'appelle le polynôme de Tchebychev de première espèce d'indice n.

2. **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathrm{T}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_n(\mathrm{X})$$

(on pourra calculer $\mathrm{T}_{n+2}(\cos\theta) + \mathrm{T}_n(\cos\theta)$).

b) Calculer $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$.

c) Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.

d) Préciser la parité de T_n.

3. Déterminer les racines du polynôme T_n pour $n \geqslant 1$.

4. **a)** Établir l'existence d'un polynôme $\mathrm{U}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \sin\theta \cdot \mathrm{U}_n(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta \quad (**)$$

(un tel polynôme U_n est unique (on ne demande pas de le démontrer); il s'appelle le polynôme de Tchebychev de seconde espèce d'indice n.

b) Établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathrm{T}_n'(\mathrm{X}) = n\mathrm{U}_{n-1}(\mathrm{X}).$$

5. Déterminer les racines du polynôme T_n' pour $n \geqslant 2$; en déduire la valeur de $\|\mathrm{T}_n\|_\infty$, et montrer que l'ensemble $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \{x \in \mathrm{I},\ |\mathrm{T}_n(x)| = \|\mathrm{T}_n\|_\infty\}$ est égal à l'ensemble $\left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\ ,\ k \in [\![0,n]\!]\right\}$.

PARTIE 2 : Caractérisation des polynômes de Tchebychev à l'aide des points extrémaux

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Montrer que $\|\mathrm{P}\|_\infty > 0$, et que l'ensemble $\mathrm{E}(\mathrm{P}) = \{x \in \mathrm{I},\ |\mathrm{P}(x)| = \|\mathrm{P}\|_\infty\}$ est un ensemble fini non vide, dont le cardinal est inférieur ou égal à $n+1$.

2. On se propose ici de déterminer tous les polynômes P à coefficients réels, de degré n, tels que :

$$\|\mathrm{P}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{card}\big(\mathrm{E}(\mathrm{P})\big) = n+1.$$

P désignant un tel polynôme, on note $\mathrm{E}(\mathrm{P}) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant 1$.

a) Montrer que : $x_0 = -1$ et que : $x_n = 1$.

b) Montrer que, pour $0 < i < n$, x_i est racine double du polynôme $1 - \mathrm{P}^2$.

c) En déduire que : $1 - \mathrm{P}^2 = \dfrac{1}{n^2}(1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}'^2(\mathrm{X})$.

d) Montrer que, pour tout $x \in]x_{n-1}, 1[$: $\dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\sqrt{1 - \mathrm{P}^2(x)}} = \dfrac{\varepsilon n}{\sqrt{1 - x^2}}$ où $\varepsilon = \pm 1$.

e) En déduire que $\mathrm{P} = \pm \mathrm{T}_n$.

3. En déduire quels sont tous les polynômes P à coefficients réels, de degré n, tels que : $\mathrm{card}\big(\mathrm{E}(\mathrm{P})\big) = n+1$.

PARTIE 3 : Une autre caractérisation des polynômes de Tchebychev

n désigne ici un entier naturel non nul.

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant : $\begin{cases} \text{Le coefficient de } \mathrm{X}^n \text{ dans P est égal à } 2^{n-1} \\ \forall x \in [-1, 1]\ ,\ \mathrm{P}(x) \in [-1, 1] \end{cases}$

On note alors $\mathrm{Q} = \mathrm{T}_n - \mathrm{P}$, et, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}$.

a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, comparer les signes de $\mathrm{Q}(x_k)$ et de $\mathrm{Q}(x_{k+1})$.

b) En déduire que Q possède au moins n racines dans I (comptées avec leur ordre de multiplicité). Que peut-on en déduire ?

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, normalisé, non constant.

Démontrer que $\|\mathrm{P}\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (on raisonnera par l'absurde).

Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

PARTIE 4 :

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. a) Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

b) En déduire, si l'on pose $\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$:

$$\begin{cases} a_{n-1} & = & 0 \\ a_k & = & \dfrac{(k+1)(k+2)}{k^2 - n^2} a_{k+2} \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n-2. \end{cases}$$

c) En déduire une expression des coefficients de T_n.

2. a) Déterminer toutes les fonctions polynomiales solutions de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

b) En déduire que les seules solutions polynomiales non constantes de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'^2 - n^2(1 - y^2) = 0$ sont $\pm \mathrm{T}_n$.

3. a) Démontrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_q = \mathrm{T}_{pq}$.

b) n désignant un entier $\geqslant 2$, on cherche ici les polynômes non constants $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que

$$\mathrm{P} \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n \circ \mathrm{P} \quad (***)$$

i) Démontrer que, si P non constant vérifie $(***)$, alors :

$$\frac{(\mathrm{P}' \circ \mathrm{T}_n)^2 (1 - \mathrm{T}_n^2)}{1 - (\mathrm{P} \circ \mathrm{T}_n)^2} = \frac{\mathrm{P}'^2 (1 - \mathrm{X}^2)}{1 - \mathrm{P}^2}$$

ii) On note R la fraction rationnelle $R = \dfrac{P'^2(1-X^2)}{1-P^2}$. L'égalité précédente s'écrit donc : $R \circ T_n = R$.

En déduire que R est constante.

iii) Démontrer enfin que les seuls polynômes non constants $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \circ T_n = T_n \circ P$ sont les polynômes T_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ si n est pair, et les polynômes $\pm T_k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ si n est impair.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆