LOCALISATION DES RACINES D'UN POLYNÔME

Le but de ce problème est d'étudier une méthode permettant de localiser les racines réelles d'un polynôme P d'une variable réelle.

Le problème est composé de deux parties indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude d'une fonction construite à partir de P appelée fonction d'exclusion, la seconde partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines du polynôme P soient contenues dans l'intervalle $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$.

La dernière partie du problème, non reproduite ici, était consacrée à l'étude d'un algorithme qui utilise la fonction d'exclusion présentée dans la première partie. Cet algorithme permet de calculer une approximation aussi fine que l'on veut de toutes les racines réelles du polynôme P.

A - Fonction d'exclusion associée à un polynôme

Soient n un entier strictement positif et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ nombres réels avec a_n différent de 0.

On considère le polynôme de degré n défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Pour k entier strictement positif, on désignera par $\mathrm{P}^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Enfin, on notera Z l'ensemble fini des racines réelles de P que l'on supposera non vide.

A.1 Pour x réel **fixé**, on considère la fonction polynomiale qui à t réel associe $\mathrm{M}(x,t)$ définie par

$$\mathrm{M}(x,t) = |\mathrm{P}(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!} t^k$$

Montrer que cette fonction est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et en déduire l'existence d'un unique réel positif pour lequel cette fonction s'annule

Comme ce réel dépend de x, on le notera $m(x)$ et on aura donc $\mathrm{M}(x, m(x)) = 0$ soit

$$|\mathrm{P}(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!} m(x)^k = 0 \tag{1}$$

La fonction m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $m(x)$ est appelée la *fonction d'exclusion* associée au polynôme P. La question **A.5** donne la propriété caractéristique de cette fonction [1].

A.2 Déterminer $m(x)$ lorsque P est le polynôme défini pour tout x réel par

$$\mathrm{P}(x) = x^2 - 1.$$

A.3 Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que $m(x) = 0$ si et seulement si $\mathrm{P}(x) = 0$.

A.4 **a)** Montrer que pour tout x et tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\left|\mathrm{P}(y)\right| \geqslant |\mathrm{P}(x)| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!} |y-x|^k = \mathrm{M}\left(x, |y-x|\right).$$

b) Soit x tel que $\mathrm{P}(x)$ est non nul. Montrer que pour tout y tel que $|y-x| < m(x)$, $\mathrm{M}\left(x, |y-x|\right) > 0$ et donc que $\mathrm{P}(y)$ est aussi non nul.

A.5 Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note

$$d(x,\mathrm{Z}) = \min_{z\in\mathrm{Z}} |x-z| \quad \textit{(distance de x à Z).}$$

Montrer en utilisant la question précédente que pour tout x réel

$$m(x) \leqslant d(x,\mathrm{Z}).$$

1. Dans l'énoncé original, la fin de la partie A, nettement plus difficile, était consacrée à l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction m.

B - Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P.

Cette partie est consacrée à la recherche d'un réel R strictement positif tel que toutes les racines du polynôme P soient contenues dans l'intervalle $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$.

On note

$$x_0 = \max_{x\in \mathrm{Z}} |x|$$

On supposera désormais que $a_n = 1$ et que les n réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ne sont pas tous nuls.

B.1 Soit Q la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$\mathrm{Q}(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k.$$

Montrer l'existence d'un unique réel strictement positif pour lequel cette fonction s'annule (on pourra considérer, pour $x > 0$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Q}(x)}{x^n}$).

B.2 Montrer que si r est un réel strictement positif tel que $\mathrm{Q}(r)$ est aussi strictement positif alors on a

$$x_0 \leqslant r.$$

B.3 Montrer que

$$x_0 \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

B.4 Montrer également que

$$x_0 \leqslant |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k-1}| + |a_0|.$$

On pourra utiliser pour cela le polynôme P_1 défini pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}_1(x) = (x-1)\mathrm{P}(x)$.

B.5 Montrer enfin que si on suppose que tous les a_k pour k variant de 0 à $n-1$ sont non nuls, on a

$$x_0 \leqslant \max\left(2|a_{n-1}|, 2\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}, \ldots, 2\frac{|a_1|}{|a_2|}, \frac{|a_0|}{|a_1|}\right)$$

On pourra raisonner par l'absurde.

B.6 Donner un exemple de polynôme pour lequel la question **B.4** donne une meilleure estimation de x_0 que la question **B.5**.

Donner de même un exemple de polynôme pour lequel la question **B.5** donne une meilleure estimation de x_0 que la question **B.4** .

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆