DEUX PETITS PROBLÈMES SUR LES POLYNÔMES

EXERCICE 1 :

On se propose de déterminer les couples (A,B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, et vérifiant la relation :

$$X(A'B - AB') + X(A^2 - B^2) + aAB = 0 \quad (a \in \mathbb{R}_+^*) \quad \textbf{(1)}$$

1°) **a)** En supposant l'existence d'un tel couple, établir les propriétés suivantes :

i. X divise un et un seul des polynômes A et B

ii. $\deg(A) = \deg(B)$, et les coefficients dominants de A et B sont égaux ou opposés.

iii. Si X divise B, montrer que $B - A'$ est divisible par A.

iv. En déduire alors : $B - A' = \varepsilon A \quad$ (où $\varepsilon \in \{-1,1\}$) **(2)**.

b) Montrer que l'on a alors :

$$X(A - B') + aB = \varepsilon XB \quad \textbf{(3)}$$

$$\text{puis : } X(2\varepsilon A' + A'') = a(\varepsilon A + A') \quad \textbf{(4)}$$

c) En déduire que a est nécessairement un entier naturel pair.

d) Conclure que, nécessairement, X divise B.

2°) On suppose dans cette question que X divise B, et que a est un entier naturel pair. On posera : $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit alors (A,B) un couple de polynômes vérifiant **(2)** et **(4)**, avec A non nul.

a) Montrer que, pour tout entier $k \in [\![2,n]\!]$, on a :

$$XA^{(k)} = 2\varepsilon(n - k + 2)A^{(k-2)} + (2n - k + 2 - 2\varepsilon X)A^{(k-1)} \quad \textbf{(5)}$$

b) Montrer que $A(0) \neq 0$.

c) Montrer que, si un polynôme divise A et B, il divise les dérivées successives de A.
En déduire que A et B sont premiers entre eux.

3°) **a)** Déterminer les polynômes normalisés de degré $n \in \mathbb{N}^*$ qui satisfont à la relation **(4)** (avec toujours $a = 2n$) (on pourra déterminer par récurrence les coefficients de A).
Vérifier que les polynômes trouvés sont à coefficients entiers.

b) Déterminer les couples (A,B) solutions de **(1)**. Expliciter les solutions obtenues pour $n = 2$.

EXERCICE 2 :

Question préliminaire :

Démontrer que, si $z_1,z_2,\ldots,z_n$ sont n nombres complexes ($n \in \mathbb{N}^*$), avec $z_n \neq 0$, l'égalité : $\left|z_1+z_2+\ldots z_n\right| = |z_1|+|z_2|+\ldots|z_n|$ est possible si et seulement si il existe des réels positifs $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ tels que $z_i=\lambda_i z_n$ pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$.
(on pourra procéder par récurrence sur n).

Exercice :

On considère un polynôme S de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) défini par :

$$S = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ et $a_0 \neq 0$.

A ce polynôme S, on associe le polynôme R à coefficients réels défini par :

$$R = X^n - A_{n-1}X^{n-1} - \ldots - A_1 X - A_0$$

avec $A_i = |a_i|$ pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$.

1°) Démontrer qu'il existe un unique réel r strictement positif tel que : $R(r)=0$.
Étudier le signe de $R(x)$ pour $x \geqslant 0$, et en déduire l'inégalité : $r < 1+A$, où $A = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} A_i$.

2°) **a)** Établir la relation : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|S(z)\right| \geqslant R(|z|)$.
En déduire que le module de toute racine complexe du polynôme S est inférieur ou égal à r.

b) Montrer que, si on suppose de plus $a_{n-1} \neq 0$, le polynôme S a au plus une racine complexe de module r.
Montrer que ce résultat peut tomber en défaut si on ne suppose pas $a_{n-1} \neq 0$.

3°) *Application :* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$,
avec $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.
En appliquant les résultats précédents au polynôme $S = \dfrac{1}{\alpha_n}(X-1)P$, démontrer que, pour toute racine complexe z de P, on a : $|z| < 1$.

(Extrait et adapté de : ENS St Cloud, 1969, P')