# POLYNÔMES À COEFFICIENTS ±1. PAIRES DE RUDIN-SHAPIRO

*Les polynômes étudiés dans ce problème ont été introduits lors de recherches sur la spectroscopie multi-fentes. Ils ont donné lieu à des développements mathématiques en combinatoire, théorie des codes, analyse harmonique, et à de très nombreuses applications en optique, télécommunications, théorie des radars et acoustique.*

Soit $\ell$ un entier au moins égal à 1. Dans ce problème, un vecteur $\underline{a}$ de $\mathbb{R}^\ell$ sera appelé *séquence de longueur* $\ell$ si chacune de ses $\ell$ coordonnées vaut 1 ou $-1$. Les coordonnées d'une séquence $\underline{a}$ de longueur $\ell$ seront numérotées de 0 à $\ell-1$, $\underline{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{\ell-1})$. On notera $\mathscr{S}_\ell$ l'ensemble des séquences de longueur $\ell$. On appellera simplement *séquence*, tout vecteur qui est une séquence de longueur $\ell$, pour un certain entier $\ell \geqslant 1$.

On dira que des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une *paire complémentaire* si elles ont même longueur $\ell$ (qui sera appelée dorénavant *longueur de la paire*) et si elles vérifient, dans le cas où $\ell>1$, pour tout entier $j$ tel que $1 \leqslant j \leqslant \ell-1$, la $j$-ième condition de corrélation :

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j}(a_i a_{i+j}+b_i b_{i+j})=0.$$

Par convention, tout couple de séquences de longueur 1 est une paire complémentaire. Ainsi, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, la complémentarité d'une paire de longueur $\ell$ implique-t-elle $\ell-1$ conditions de corrélation.

## Première partie

On désigne par $\mathscr{L}$ l'ensemble des entiers $\ell$ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur $\ell$. Autrement dit, $\mathscr{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathscr{L}$.

**1.** Montrer que 2 appartient à $\mathscr{L}$ et que 3 n'appartient pas à $\mathscr{L}$.

Soit $\ell$ un entier au moins égal à 1. Pour toute séquence, $\underline{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{\ell-1})$, de longueur $\ell$, on définit le polynôme $\mathrm{P}_{\underline{a}}$ par la formule

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(\mathrm{X})=\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i \mathrm{X}^i.$$

Un tel polynôme est appelé *polynôme séquentiel*.

**2.a)** Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences. On considère la fonction définie pour $x$ réel, $x \neq 0$, par

$$x \mapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1})+\mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}).$$

Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, cette fonction n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$.

Montrer que deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur forment une paire complémentaire si et seulement si cette fonction est constante. Exprimer cette constante en fonction de la longueur $\ell$ de la paire complémentaire $\underline{a}$, $\underline{b}$.

**2.b)** Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur, $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)$ et $\mathrm{P}_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité. En déduire que tout élément de $\mathscr{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

**2.c)** Montrer que le complémentaire de $\mathscr{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini [on pourra étudier le reste de la division par 4 d'un carré d'entier].

**3.a)** Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose $\mathrm{U}=\frac{1}{2}(\mathrm{P}_{\underline{a}}+\mathrm{P}_{\underline{b}})$ et $\mathrm{V}=\frac{1}{2}(\mathrm{P}_{\underline{a}}-\mathrm{P}_{\underline{b}})$. Montrer que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentairesi et seulement si la fonction

$$x \mapsto \mathrm{U}(x)\mathrm{U}(x^{-1})+\mathrm{V}(x)\mathrm{V}(x^{-1})$$

est constante sur son domaine de définition.

**3.b)** Les séquences, de longueur 10,

$$\underline{a} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1)$$

et

$$\underline{b} = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$$

forment-elles une paire complémentaire ?

**4.** Démontrer, pour toute séquence $\underline{v}$ de longueur paire $2m$ ($m \in \mathbb{N}$, non nul), l'équivalence des assertions suivantes :

(i) 4 divise la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_{2m-1}$,

(ii) le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à $-1$ a la même parité que $m$,

(iii) $v_0 v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$.

**5.** Soit $\ell \in \mathscr{L}$, $\ell \geqslant 2$, et soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences qui forment une paire complémentaire de longueur $\ell$. Pour tout entier $i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

**5.a)** Montrer que, pour tout entier $j$, $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

[considérer la somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$].

**5.b)** En déduire que, pour tout entier $j$, $0 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$x_j x_{\ell-1-j} = -1.$$

**5.c)** Montrer que tout élément $\ell$ de $\mathscr{L}$, $\ell \geqslant 2$, est pair.

## Deuxième partie

Si deux polynômes séquentiels sont associés à des séquences qui forment une paire complémentaire, on dit qu'ils forment une *paire complémentaire de polynômes*. Cette partie est consacrée à l'étude de certaines paires complémentaires de polynômes.

On définit deux suites de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions initiales

$$\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}_0(\mathrm{X}) = 1$$

et les relations de récurrence

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_n(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^{2^n} \mathrm{Q}_n(\mathrm{X}) \qquad (1)$$

$$\mathrm{Q}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_n(\mathrm{X}) - \mathrm{X}^{2^n} \mathrm{Q}_n(\mathrm{X}). \qquad (2)$$

**6.a)** Calculer $\mathrm{P}_1$ et $\mathrm{Q}_1$, puis $\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{Q}_2$.

**6.b)** Calculer les valeurs respectives de $\mathrm{P}_n(1)$, $\mathrm{Q}_n(1)$, $\mathrm{P}_n(-1)$ et $\mathrm{Q}_n(-1)$ en fonction de l'entier $n$.

**7.** Démontrer que, pour tout entier positif $n$, les polynômes $\mathrm{P}_n$ et $\mathrm{Q}_n$ sont des polynômes séquentiels et qu'ils forment une paire complémentaire. Qu'en déduire vis-à-vis de l'appartenance des entiers de la forme $2^k$, pour $k$ entier positif ou nul, à l'ensemble $\mathscr{L}$ ?

**8.** Démontrer, pour tout entier positif ou nul $n$ et tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}$, l'égalité

$$\mathrm{Q}_n(z) = (-1)^n z^{2^n - 1} \mathrm{P}_n(-z^{-1}).$$

**9.a)** Soit $\mathrm{T}$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, de degré exactement $d$, $d \geqslant 1$, qu'on écrit $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = t_0 + t_1 \mathrm{X} + \ldots + t_d \mathrm{X}^d$ (avec $t_d$ non nul). Montrer que les racines de $\mathrm{T}$ sont toutes majorées en module par la quantité $1 + \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant d-1} |t_i / t_d|$.

**9.b)** Démontrer, pour toute valeur de l'entier $n$, que toute racine (complexe) $z$ du polynôme $P_nQ_n$ vérifie

$$\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.$$

Peut-on remplacer chacune de ces deux inégalités larges par une inégalité stricte ?

**10.a)** Montrer qu'il existe une série entière, $S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p z^p$, dont les $P_n$ sont des sommes partielles. Identifier son rayon de convergence.

**10.b)** La somme de la série $S$ a-t-elle des zéros dans le disque ouvert de rayon $1/2$ centré à l'origine ?

---

*N.B : L'ensemble $\mathscr{L}$ étudié dans ce problème est encore actuellement l'objet de recherches.*

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆