DM N°1 (pour le 14/09/2010)

Définition 1 : Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $(n\in\mathbb{N})$ une suite finie de nombres réels. On note $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ le nombre de changements de signes effectif dans cette suite, en convenant d'omettre les éléments égaux à 0, tout en conservant l'ordre des éléments (et $\mathrm{V}(0,0,\dots,0)=0$).

Une définition plus formelle est la suivante :
— Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{V}(a)=0$.
— Si $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ est une suite de réels *tous non nuls* avec $n\geqslant 1$, on définit une suite $(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n)$ par $\varepsilon_i=\begin{cases}1 & \text{si } a_i>0\\ -1 & \text{si } a_i<0\end{cases}$ puis on pose $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}\right|$.
— Si $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ est une suite de réels non tous nuls avec $n\geqslant 1$, on forme la suite $(a'_0,\dots,a'_m)$ obtenue à partir de la précédente en supprimant tous les termes nuls, puis on pose $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)=\mathrm{V}(a'_0,a'_1,\dots,a'_m)$

Par exemple : $\mathrm{V}(-1,1,-2)=2$, $\mathrm{V}(-1,0,0,1)=1$, $\mathrm{V}(1,0,1)=0$.

Définition 2 : Si $\mathrm{P}(\mathrm{X})=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{X}^i$ désigne un polynôme à coefficients réels de degré n $(n\in\mathbb{N},\ a_n\neq 0)$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathrm{I})$ le nombre de racines réelles de P dans I, *chacune d'entre elles étant comptée avec son ordre de multiplicité*.

PARTIE A : Nombre de racines réelles d'un polynôme

1. Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ une suite finie de nombres réels.

a) Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ une suite de nombres réels, tous strictement positifs.
Comparer $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ et $\mathrm{V}(\lambda_0a_0,\lambda_1a_1,\dots,\lambda_na_n)$.
Même question si l'on suppose les λ_i tous strictement négatifs.

b) Si $a_r\neq 0$, vérifier que :

$$\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)=\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_r)+\mathrm{V}(a_r,a_{r+1},\dots,a_n)$$

c) Prouver que $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ est pair si $a_0a_n>0$ et impair si $a_0a_n<0$.

2. P désigne ici un polynôme à coefficients réels de degré n , $\mathrm{P}(\mathrm{X})=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i\mathrm{X}^i$, $(n\in\mathbb{N},\ a_n\neq 0)$.

a) On rappelle que la *valuation* du polynôme P désigne l'entier $\min\{k,\ 0\leqslant k\leqslant n,\ a_k\neq 0\}$.
Si r est la valuation de P, montrer que $\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*)$ est pair si $a_ra_n>0$, et impair si $a_ra_n<0$.
En déduire que $\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ et $\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*)$ ont même parité.

b) On désigne par P' le polynôme dérivé de P. Démontrer que :

$$\mathscr{R}(\mathrm{P}',\mathbb{R}_+^*)\geqslant\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*)-1$$

c) En déduire que : $\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_+^*)\leqslant\mathrm{V}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ (on pourra faire une démonstration par récurrence en utilisant le résultat de la question précédente).[1]

d) Montrer que : $\mathscr{R}(\mathrm{P},\mathbb{R}_-^*)\leqslant\mathrm{V}(a_0,-a_1,\dots,(-1)^na_n)$

1. Résultat obtenu par Descartes,1637

e) Démontrer que :

$$V(a_0, a_1, \dots, a_n) + V(a_0, -a_1, \dots, (-1)^n a_n) \leqslant n$$

et en déduire que, si toutes les racines de P sont réelles non nulles, alors :

$$\mathscr{R}(P, \mathbb{R}_+^*) = V(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

$$\text{et : } \mathscr{R}(P, \mathbb{R}_-^*) = V(a_0, -a_1, \dots, (-1)^n a_n)$$

PARTIE B : Suites de Sturm

Définition 3 : Soit $(f_0, \dots, f_m)$ une suite de polynômes à coefficients réels ($m \geqslant 3$).
On dira que c'est une suite de Sturm[2] pour l'intervalle $[a, b]$ ssi :

$$\begin{cases} \alpha) & f_0(a) \neq 0 \text{ , } f_0(b) \neq 0 \\ \beta) & \forall x \in [a, b],\ f_m(x) \neq 0 \\ \gamma) & \text{s'il existe } c \in [a, b] \text{ tq } f_0(c) = 0, \text{ alors } f_1(c) f_0'(c) > 0 \\ \delta) & \text{s'il existe } c \in [a, b] \text{ et } k \in [\![1, m-1]\!] \text{ tels que } f_k(c) = 0, \text{ alors } f_{k-1}(c) f_{k+1}(c) < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, si $(f_0, \dots, f_m)$ est une suite de Sturm pour un intervalle $[a, b]$, et si $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ est une suite de réels strictement positifs, alors $(\lambda_0 f_0, \dots, \lambda_m f_m)$ est encore une suite de Sturm pour l'intervalle $[a, b]$.

Définition 4 : Si A et B sont deux polynômes à coefficients réels, on notera Reste(A, B) le reste de la division euclidienne de A par B.
Soit P un polynôme à coefficients réels. On définit alors la suite de polynômes (P_k) par :

$$P_0 = P \quad , \quad P_1 = P' \quad , \quad P_{k+1} = -\text{Reste}(P_{k-1}, P_k) \ (k \geqslant 1)$$

2. Démontrer qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $P_{m+1} = 0$.
On choisira par la suite pour m le plus petit entier vérifiant cette propriété. Montrer que P_m divise tous les polynômes P_k pour $0 \leqslant k \leqslant m$, et que si un polynôme divise P et P′, il divise P_m.

3. On définit alors la suite de polynômes $f_k = \dfrac{P_k}{P_m}$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$.

a) Montrer que le polynôme f_0 n'a que des racines simples.

b) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, f_{k-1} et f_k n'ont pas de racine commune.

c) Démontrer que la suite $(f_0, \dots, f_m)$ est une suite de Sturm pour tout intervalle $[a, b]$ tel que $P(a)P(b) \neq 0$.

4. Soit P un polynôme à coefficients réels, et $[a, b]$ un intervalle tel que $P(a)P(b) \neq 0$.
En utilisant les notations de la partie A et de la question précédente, on se propose ici d'étudier la fonction :

$$h(x) = V(f_0(x), \dots, f_m(x))$$

pour $x \in [a, b]$.

a) Soit $c \in [a, b]$. A quelle condition la fonction h peut-elle éventuellement varier au voisinage de c ?

Montrer que, si c est racine de l'un des polynômes f_j avec $j \geqslant 1$, h est constante au voisinage de c.

Que peut-on dire de h au voisinage de c lorsque c est racine de f_0 ?

b) En déduire que le nombre de racines distinctes de P sur $[a, b]$ est égal à $h(a) - h(b)$.[3]

2. Charles Sturm (1803-1855)
3. Résultat démontré par Sturm en 1829.

c) Généraliser ce résultat lorsque $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, en donnant un sens à $h(-\infty)$ et à $h(+\infty)$.

5. *Application numérique :* Déterminer une suite de Sturm associée au polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 2$, et en déduire le nombre de racines de P sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE C : Localisation des racines d'un polynôme

Soit $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$ un polynôme à coefficients complexes de degré n $(n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0)$.
On notera $m(\mathrm{P}) = \max\left\{\left|a_i\right|,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\}$.

1. Si ξ est une racine complexe de P, majorer $\left|a_n\right| |\xi|^n$ en fonction de $m(\mathrm{P})$. En déduire que :

$$|\xi| \leqslant 1 + \frac{m(\mathrm{P})}{\left|a_n\right|}$$

2. Si ξ est une racine complexe de P, démontrer l'inégalité :

$$|\xi| \leqslant 2\max\left(\frac{\left|a_{n-1}\right|}{\left|a_n\right|}, \sqrt{\frac{\left|a_{n-2}\right|}{\left|a_n\right|}}, \ldots, \sqrt[n-1]{\frac{\left|a_1\right|}{\left|a_n\right|}}, \sqrt[n]{\frac{\left|a_0\right|}{\left|a_n\right|}}\right)$$

3. Décrire le *principe* d'un algorithme qui, étant donné un polynôme P à coefficients réels, permet de construire une suite d'intervalles contenant chacun une et une seule racine de P (on se contentera d'énoncer les diverses procédures à écrire, sans entrer dans les détails de celles-ci).

En déduire le principe d'un algorithme permettant de calculer toutes les racines réelles d'un polynôme à coefficients réels à une précision donnée.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆