CORRIGÉ DU DS°1 (le 18/09/2010)

PARTIE 1 : Étude des polynômes de Newton

1. Chaque N_k est évidemment de degré k. Étant tous de degrés différents, la famille $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.
Étant formée de $n+1$ éléments dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, c'en est une base.

La famille $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant formée de polynômes de degrés différents, elle est libre.
De plus, pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $P\in\mathbb{R}_n[X]$. P est donc, d'après la question précédente, combinaison linéaire des $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, donc la famille $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. **a)** Immédiat : $\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \Delta(P)\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, $\Delta(\lambda P+\mu Q)=\lambda\Delta(P)+\mu\Delta(Q)$...

b) Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$: car Δ_n est linéaire (cf. ci-dessus), et, si P est de degré inférieur ou égal à n, il en est de même de $\Delta(P)$.

On a : $\Delta(N_0)=0$ et, pour $k\geqslant 1$, $\Delta(N_k)=N_{k-1}$ car :

$$\begin{aligned}\Delta(N_k)&=\frac{1}{k!}(X+1)(X)\dots(X-k+2)-\frac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)\\&=\frac{1}{k!}X\dots(X-k+2)\big[(X+1)-(X-k+1)\big]\\&=\frac{1}{(k-1)!}X\dots(X-k+2)=N_{k-1}\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de Δ_n dans la base $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est égale à : $\begin{pmatrix}0&1&\dots&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\ddots&0&1\\0&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}$

c) Pour $n\geqslant 1$, $\mathrm{Im}(\Delta_n)=\mathrm{Vect}\{\Delta_n(N_k),\ 0\leqslant k\leqslant n\}=\mathrm{Vect}\{N_k,\ 0\leqslant k\leqslant n-1\}=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On en déduit, d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n))=1$. Puisque, facilement, $\mathbb{R}_0[X]\subset\mathrm{Ker}(\Delta_n)$, on en déduit : $\mathrm{Ker}(\Delta_n)=\mathbb{R}_0[X]$.

d) Si $P\in\mathbb{R}[X]$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{Im}(\Delta_n)$. Il existe donc $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P=\Delta_n(Q)$, donc $P=\Delta(Q)$.
On en déduit : $\mathrm{Im}(\Delta)=\mathbb{R}[X]$.

Si $P\in\mathbb{R}[X]$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $P\in\mathbb{R}_n[X]$, donc $P\in\mathrm{Ker}(\Delta)\Rightarrow P\in\mathrm{Ker}(\Delta_n)=\mathbb{R}_0[X]$, d'où $\mathrm{Ker}(\Delta)\subset\mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion réciproque étant facile, on a donc : $\mathrm{Ker}(\Delta)=\mathbb{R}_0[X]$

Autre démonstration possible : si $P\in\mathrm{Ker}(\Delta)$, on a $P(X+1)=P(X)$ d'où $\forall n\in\mathbb{Z}, P(n)=P(0)$. P coïncidant avec le polynôme constant égal à $P(0)$ pour une infinité de valeurs, il est constant...

3. **a)** $\Delta=\varphi-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$, où φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)=P(X+1)$ (il est facile de vérifier que c'est bien un endomorphisme).
Puisque φ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ commutent, la formule du binôme donne immédiatement :

$$\Delta^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\phi^i$$

et puisque : $\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \forall i\in\mathbb{N},\ \phi^i(P)=P(X+i)$ (récurrence facile), on en déduit la formule demandée.

b) On a vu que, si $P\in\mathbb{R}_k[X]$, $\Delta(P)\in\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $\Delta^{n-1}(P)\in\mathbb{R}_0[X]$ puis $\Delta^n(P)=0$. $\big[(\Delta_{n-1})^n=0$, i.e Δ_{n-1} nilpotent ; on pouvait aussi le démontrer en remarquant que la matrice de Δ_{n-1} dans la base $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls$\big]$.

Donc, d'après la formule précédente :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\ ,\ \Delta^n(P)(X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}P(X+i)=0.$$

En isolant le terme pour $i = 0$, on en tire : $(-1)^n \mathrm{P}(\mathrm{X}) = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\mathrm{P}(\mathrm{X}+i)$ d'où l'égalité : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{P}(\mathrm{X}+i)$, avec $a_i = (-1)^{i-1}\binom{n}{i}$.

Montrons maintenant que le n-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est unique : s'il existait un autre n-uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ tel que, pour *tout* polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, on ait :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{P}(\mathrm{X}+i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{P}(\mathrm{X}+i)$$

on aurait en particulier :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\mathrm{X}+i)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} b_i (\mathrm{X}+i)^{n-1}$$

Or on montre (*cf. feuille d'exercices n° 3*) que les polynômes $(\mathrm{X}+i)^{n-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. On en déduit alors : $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. CQFD.

4. **a)** Pour tous entiers k et l tels que $0 \leqslant k \leqslant l$, on a : $\Delta^k(\mathrm{N}_l) = \mathrm{N}_{l-k}$: cela découle directement du calcul déjà fait à la question 2.b.
Pour $l < k$, on a alors $\Delta^k(\mathrm{N}_l) = \Delta^{k-l}(\Delta^l(\mathrm{N}_l)) = \Delta^{k-l}(\mathrm{N}_0) = 0$.

b) Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, puisque $(\mathrm{N}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il existe des réels $\lambda_k (0 \leqslant k \leqslant n)$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{N}_k$.

Pour $l \leqslant n$, on a alors, d'après le résultat précédent : $\Delta^l(\mathrm{P}) = \sum_{k=l}^{n} \lambda_k \mathrm{N}_{k-l}$, d'où $\Delta^l(\mathrm{P})(0) = \sum_{k=l}^{n} \lambda_k \mathrm{N}_{k-l}(0)$.

Or $\mathrm{N}_0(0) = 1$ et $\mathrm{N}_i(0) = 0$ si $i \geqslant 1$, donc l'égalité précédente se réduit à : $\Delta^l(\mathrm{P})(0) = \lambda_l$, ce qui donne la formule demandée. [Pour ceux qui connaissent leur cours, noter l'analogie avec la démonstration de la formule de Taylor !]

5. **a)** Un calcul assez simple donne : $\mathrm{N}_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant k-1 \\ \binom{x}{k} & \text{si } x \geqslant k \\ (-1)^k \binom{k-x-1}{k} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

b) (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \dots, \mathrm{P}(n)$ sont des entiers, puisque $\Delta^k(\mathrm{P})(0) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\mathrm{P}(i)$ pour tout entier k d'après 3.a, on en déduit que les $\lambda_k = \Delta^k(\mathrm{P})(0)$ sont des entiers pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Le résultat découle alors de la formule de Grégory.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Le calcul de la question précédente montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{N}_k(x) \in \mathbb{Z}$. Donc si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{N}_k$ avec les λ_k entiers, on aura $\mathrm{P}(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

PARTIE 2 : Étude des polynômes de Bernoulli

1. Puisque, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\Delta(\mathrm{P}) = \Delta_n(\mathrm{P}) = n\mathrm{X}^{n-1}$.

On peut alors poser : $\mathrm{B}_n = \mathrm{P} - \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$, et on aura bien les deux relations voulues.

S'il existait un autre polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifiant les deux conditions de l'énoncé, on aurait alors : $\Delta(\mathrm{B}_n - \mathrm{Q}) = 0$ et $\int_0^1 (\mathrm{B}_n(t) - \mathrm{Q}(t))\,\mathrm{d}t = $. D'où $\mathrm{B}_n - \mathrm{Q} \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$, d'où $\mathrm{B}_n - \mathrm{Q} = cste$, et la condition sur l'intégrale donne directement $cste = 0$ soit $\mathrm{B}_n = \mathrm{Q}$, d'où l'unicité.

2. **a)** D'après ce qui a été dit ci-dessus, on a $\mathrm{B}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. De plus, si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\deg(\Delta(\mathrm{P})) < \deg(\mathrm{P})$ donc la condition $\Delta(\mathrm{B}_n) = n\mathrm{X}^{n-1}$ (pour $n \geqslant 1$) implique $\deg(\mathrm{B}_n) = n$ (et cela reste vrai pour $n = 0$). En écrivant ensuite (pour $n \geqslant 1$) $\mathrm{B}_n = a_n\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}$ avec $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n-1$, l'égalité $\Delta(\mathrm{B}_n) = n\mathrm{X}^{n-1}$ donne facilement $a_n = 1$. Ainsi, les B_n sont normalisés (et cela reste vrai pour $n = 0$).

b) D'après ce qui précède, il suffit de chercher les polynômes B_1, B_2 et B_3 sous la forme : $B_1 = X+\alpha$, $B_2 = X^2+\beta X+\gamma$ etc... et le calcul des intégrales permet de trouver :

$$B_1 = X - \frac{1}{2}\ ,\ B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}\ ,\ B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

3. **a)** Pour $n \geqslant 2$, on a : $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ d'où, pour $X = 0$, $B_n(1) = B_n(0)$ (il faut $n \geqslant 2$ pour que l'exposant dans X^{n-1} soit supérieur à 1 !).

b) Posons, pour $n \geqslant 2$, $C_n = \dfrac{B_n'}{n}$. Alors :

$$\Delta(C_n) = \frac{1}{n}[B_n'(X+1) - B_n'(X)] = \frac{1}{n}[B_n(X+1) - B_n(X)]' = (n-1)X^{n-2}$$

De plus, $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,dt = \frac{1}{n}[B_n(1) - B_n(0)] = 0$.

Ainsi, C_n vérifie les mêmes hypothèses que B_{n-1}, d'où, par unicité, $C_n = B_{n-1}$ soit $\underline{B_n' = nB_{n-1}}$ pour $n \geqslant 2$, et un calcul direct montre que cela reste vrai pour $n = 1$.

4. **a)** On pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Pour $n \geqslant 1$:
$\Delta(C_n) = (-1)^n[B_n(-X) - B_n(1-X)] = (-1)^n[-\Delta(B_n)(-X)] = (-1)^n[-n(-X)^{n-1}] = nX^{n-1}$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\,du = 0$ (en posant $u = 1-t$), d'où, par unicité de B_n, $\underline{B_n = C_n}$ pour $n \geqslant 1$ (et cela reste vrai pour $n = 0$).

b) On en déduit que la courbe représentative de B_n est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ si n est pair, et symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ si n est impair.

c) et que, pour tout entier $k \geqslant 1$, B_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\dfrac{1}{2}$.

5. **a)** La formule de Taylor (pour les polynômes) donne, puisque B_n est de degré n :

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B_n^{(k)}(x) y^k \quad (*)$$

Mais $B_n' = nB_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, donc, par récurrence, pour $k \leqslant n$, $B_n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)B_{n-k}$ soit encore $B_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$.
En remplaçant dans (*), on obtient bien :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x) y^k$$

b)
- En faisant $x = 0$ dans la formule précédente, on obtient le résultat demandé.
- A l'ordre $n+1$ et pour $y = 1$, la formule précédente donne :

$$B_{n+1}(x+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x) = B_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x)$$

Puisque $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient bien :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n$$

- Pour $n \geqslant 1$, et en prenant $x = 0$, on en déduit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$

c) Cette égalité permet de calculer, par un algorithme très simple, b_n lorsqu'on connaît les b_k pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, puisqu'elle s'écrit aussi, après simplification par $(n+1)!$:

$$\frac{b_n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!}$$

Voilà ce que donne Maple :

```
> restart;
> b[0] := 1:
> deb := time():
> for i to 700 do
> b[i] := -factorial(i)*(sum(b[k]/(factorial(k)*factorial(i+1-k)), k = 0 .. i-1))
> end do:
> print(‘temps passé :‘, time()-deb); 1; b[4]; 1; b[6];
```

‘temps passé :‘, 13.587

$-1/30$

$1/42$

On peut diviser le temps d'éxécution presque par deux, en calculant plutôt les $\dfrac{b_k}{k!}$; voici le programme correspondant :

```
> restart;
> b[0] := 1: c[0] := 1:
> deb := time():
> for i to 700 do c[i] := -(sum(c[k]/factorial(i+1-k), k = 0 .. i-1));
> b[i] := factorial(i)*c[i]
> end do:
> print(‘temps passé :‘, time()-deb); b[4]; b[6];
```

temps passé :, 8.720

$-1/30$

$1/42$

6. a) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{C}_n(\mathrm{X}) = p^{n-1} \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{B}_n\left(\frac{\mathrm{X}+j}{p}\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{C}_n) &= p^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{B}_n\left(\frac{\mathrm{X}+j+1}{p}\right) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{B}_n\left(\frac{\mathrm{X}+j}{p}\right)\right] \\ &= p^{n-1}\left[\mathrm{B}_n\left(\frac{\mathrm{X}+p}{p}\right) - \mathrm{B}_n\left(\frac{\mathrm{X}}{p}\right)\right]\end{aligned}$$

(les termes se "télescopent") soit $\Delta(\mathrm{C}_n) = p^{n-1}\Delta(\mathrm{B}_n)\left(\dfrac{\mathrm{X}}{p}\right) = p^{n-1} n \left(\dfrac{\mathrm{X}}{p}\right)^{n-1} = n\mathrm{X}^{n-1}$.

De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{C}_n(t)\,\mathrm{d}t &= p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^1 \mathrm{B}_n\left(\frac{t+j}{p}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= p^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{j/p}^{(j+1)/p} \mathrm{B}_n(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

(en ayant effectué les changements de variable $u = \dfrac{t+j}{p}$)

soit $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{C}_n(t)\,\mathrm{d}t = p^{n-1} \int_0^1 \mathrm{B}_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

Ainsi, par unicité de B_n, $\underline{\mathrm{B}_n = \mathrm{C}_n}$ pour $n \geqslant 1$ (et cela reste vrai pour $n = 0$).

b) • Pour $p=2$ et $X=0$, la formule précédente donne : $B_n(0)=2^{n-1}\left(B_n(0)+B_n(1/2)\right)$ d'où $\boxed{B_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=(2^{1-n}-1)b_n}$.

• Pour $p=3$ et $X=0$, on a : $b_n=3^{n-1}(b_n+B_n(1/3)+B_n(2/3))$.
puisque n *est pair*, on a $B_n(2/3)=B_n(1/3)$ d'où finalement : $\boxed{B_n\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{b_n}{2}(3^{1-n}-1)}$.

• Pour $p=2$ et $X=1/2$, on a : $B_n(1/2)=2^{n-1}(B_n(1/4)+B_n(3/4))$.
puisque n *est pair*, on a $B_n(3/4)=B_n(1/4)$, d'où : $\boxed{B_n\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{b_n(2^{1-n}-1)}{2^n}}$.

• Pour $p=2$ et $X=1/3$, on a : $B_n(1/3)=2^{n-1}(B_n(1/6)+B_n(2/3))$.
puisque n *est pair*, on a $B_n(1/3)=B_n(2/3)$, d'où : $\boxed{B_n\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{b_n(2^{n-1}-1)(3^{n-1}-1)}{(2^n)(3^{n-1})}}$.

7. a) Soit la propriété $\mathscr{H}_n$, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

- B_{2n} admet sur l'intervalle $[0,1]$ exactement deux racines α_n et β_n qui vérifient $0<\alpha_n<\dfrac{1}{2}<\beta_n<1$
- les seules racines de B_{2n+1} dans $[0,1]$ sont $0, \dfrac{1}{2}$ et 1
- le signe de B_{2n+1} sur $]0,\dfrac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{n-1}$.
- b_{2n} est non nul et est du signe de $(-1)^{n-1}$

Démontrons cette propriété par récurrence sur n :

- Pour $n=1$, c'est facile (reprendre les valeurs trouvées de B_2 et B_3, et faire les calculs, simples).
- Supposons $\mathscr{H}_n$ vérifiée à un ordre $n\geqslant 1$, et démontrons $\mathscr{H}_{n+1}$.

En supposant par exemple n *impair*, on a le tableau de variations suivant, le signe de B_{2n+1} sur $]\dfrac{1}{2},1[$ se déduisant de celui sur $]0,\dfrac{1}{2}[$ à l'aide de la relation vue en 4.a, et en utilisant le fait que $B'_{2n+2}=(2n+2)B_{2n+1}$:

x	0		$1/2$		1
B_{2n+1}		$+$		$-$	
B_{2n+2}	b_{2n+2}	$\nearrow$	$B_{2n+2}(1/2)$	$\searrow$	b_{2n+2}

De plus, B_{2n+1} ne s'annulant qu'en 0, $1/2$ et 1, B_{2n+2} est strictement monotone sur chacun des deux intervalles. D'après la relation trouvée en 5.a, $B_{2n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right)=(2^{-2n-1}-1)b_{2n+2}$ donc est de signe différent de b_{2n+2} (et ne peut être nul,car sinon, b_{2n+2} le serait aussi alors que B_{2n+1} est strictement croissante sur $]0,1/2[$).
Ainsi, dans le tableau ci-dessus, on a $b_{2n+2}<0$ et $B_{2n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$.
Le théorème appelé ordinairement "théorème de bijection" prouve que B_{2n+2} admet sur $[0,1]$ exactement deux racines α_{n+1} et β_{n+1}, telles que $0<\alpha_{n+1}<\dfrac{1}{2}<\beta_{n+1}<1$.
On en déduit alors le signe de B_{2n+2}, puis le tableau suivant, compte tenu de la relation
$B_{2n+3}=(2n+3)B'_{2n+2}$:

x	0	α_{n+1}	$1/2$	β_{n+1}	1
B_{2n+2}	$-$	0	$+$	0	$-$
B_{2n+3}	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Là encore, sur chaque intervalle, B_{2n+3} est strictement monotone. Le tableau ci-dessous prouve donc que B_{2n+3} ne peut s'annuler qu'en $0, 1/2$ et 1, et que, de plus, elle est négative sur $]0,1/2[$.

Cela établit donc le résultat à l'ordre $n+1$.
(*Rem* : la démonstration dans le cas n pair est similaire : seuls les signes et les sens de variation sont changés).

- Enfin, on a $\alpha_n + \beta_n = 1$, d'après la relation $B_{2n}(1-\alpha_n) = B_{2n}(\alpha_n)$.

b) Les calculs faits en 6.b montrent que $B_n\left(\dfrac{1}{6}\right)$ et $B_n\left(\dfrac{1}{4}\right)$ sont de signes contraires (signe qui dépend de celui de b_n), pour *n pair*.
Les tableaux de variations ci-dessus donnent donc directement : $\dfrac{1}{6} < \alpha_n < \dfrac{1}{4}$

8. a) Les tableaux de variations ci-dessus montrent que $\left|B_{2n}\right|$ ne peut atteindre son maximum sur $[0,1]$ qu'en 0 ou $1/2$. Or, d'après le calcul fait en 6.b, $\left|B_{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| < |b_{2n}|$. Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|B_{2n}(x)\right| \leqslant |b_{2n}|$.

b) Là encore, les tableaux de variations ci-dessus montrent que $\left|B_{2n+1}\right|$ ne peut atteindre son maximum qu'en α_n ou β_n (puisque ses valeurs en 0, $1/2$ et 1 sont nulles). Or $\alpha_n + \beta_n = 1$, donc $\left|B_{2n+1}(\alpha_n) = \right|B_{2n+1}(\beta_n)\big|$ d'après la relation vue en 4.a.
Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|B_{2n+1}(x)\right| \leqslant \left|B_{2n+1}(\alpha_n)\right|$.

c) Il s'agit ici d'appliquer <u>l'inégalité des accroissements finis</u> : si $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $M = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$, alors $\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant M|b-a|$.

- Puisque $B'_{2n+1} = (2n+1)B_{2n}$, compte tenu de la majoration obtenue précédemment pour $|B_{2n}|$, on a :

$$\left|B_{2n+1}(\alpha_n) - B_{2n+1}(\beta_n)\right| \leqslant (2n+1)|\alpha_n - \beta_n||b_{2n}|$$

Mais $B_{2n+1}(\beta_n) = -B_{2n+1}(\alpha_n)$, donc l'inégalité ci-dessus implique, puisque $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant 1$: $\left|B_{2n+1}(\alpha_n)\right| \leqslant \dfrac{2n+1}{2}\left|b_{2n}\right|$

- Puisque $B'_{2n+2} = (2n+2)B_{2n+1}$, et compte tenu de la majoration obtenue précédemment pour $|B_{2n+1}|$, on a :

$$\left|B_{2n+2}(1/2) - B_{2n+2}(0)\right| \leqslant \frac{1}{2}(2n+2)\left|B_{2n+1}(\alpha_n)\right|$$

Mais le calcul fait en 6.b donne $B_{2n+2}(1/2) = (2^{-2n-1} - 1)b_{2n+2}$, donc l'inégalité ci-dessus implique : $\dfrac{1}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{2n+1}}\right)\left|b_{2n+2}\right| \leqslant \left|B_{2n+1}(\alpha_n)\right|$.

PARTIE 3 : Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

<u>Note pour les 5/2</u> : cette partie revient à trouver le développement en série de Fourier des B_n, prolongées correctement sur $\mathbb{R}$, à partir de leur valeur sur $[0,1]$, pour devenir 1-périodiques et paires ...

1. La formule proposée peut se démontrer par récurrence sur N, mais un calcul direct (*qu'il faut absolument savoir faire !*) est possible :

$$\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t) = \mathscr{R}e\left(\sum_{k=1}^{N} e^{2ik\pi t}\right) = \mathscr{R}e\left(e^{2i\pi t}\frac{1-e^{2iN\pi t}}{1-e^{2i\pi t}}\right)$$

(somme des termes d'une suite géométrique de raison $\neq 1$, car $t \in]0,1[$)

$$= \mathscr{R}e\left(e^{2i\pi t}\frac{e^{iN\pi t}\left(e^{-iN\pi t} - e^{iN\pi t}\right)}{e^{i\pi t}\left(e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}\right)}\right)$$

$$= \mathscr{R}e\left(e^{i(N+1)\pi t}\frac{\sin(N\pi t}{\sin(\pi t)}\right) = \frac{\cos((N+1)\pi t)\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

$$= \frac{\sin((2N+1)\pi t) - \sin(\pi t)}{2\sin(\pi t)}$$

d'où on déduit : $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t) = \frac{\sin\left((2N+1)\pi t\right)}{\sin(\pi t)}$

2. On supposera $n > 1$. (*il y a un problème en $t = 1$ pour $n = 1$*).
D'après la question II.4.a, on a $\varphi_n(1-t) = \pm\varphi_n(t)$ (selon la parité de n), donc il suffit de montrer que φ_n se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.
On utilisera pour cela le célèbre <u>théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$</u> (φ_n étant déjà de classe $\mathscr{C}^1$

sur $]0,1[$ d'après les théorèmes usuels) :

- Tout d'abord, φ_n est prolongeable par continuité en 0 : en effet, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{B_n(t)-B_n(0)}{t}=B_n'(0)=nB_{n-1}(0)$ existe,

et $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin(\pi t)}=\dfrac{1}{\pi}$, d'où $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_n(t)$ existe.

Notons encore φ_n la fonction ainsi prolongée, continue sur $[0,1[$.

- Il reste à démontrer que $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_n'(t)$ existe. Or, pour $t\in]0,1[$, le calcul donne :

$$\varphi_n'(t)=\frac{B_n'(t)\sin(\pi t)-[B_n(t)-B_n(0)]\pi\cos(\pi t)}{(\sin(\pi t))^2}.$$

Un développement limité donne alors :

$$\varphi_n'(t)=\frac{[B_n'(0)+tB_n''(0)+o(t)][\pi t+o(t^2)]-[tB_n'(0)+\frac{t^2}{2}B_n''(0)+o(t^2)][\pi+o(t)]}{\pi^2t^2+o(t^4)}$$

En utilisant $B_n'=nB_{n-1}$ et $B_n''=n(n-1)B_{n-2}$, cela permet de trouver :

$$\lim_{t\to 0}\varphi_n'(t)=\frac{n(n-1)B_{2n-2}(0)}{2\pi}\quad \text{CQFD.}$$

3. Il s'agit ici du fameux lemme de Lebesgue (*Rem : le résultat reste valable si l'on suppose seulement f continue par morceaux, mais la démonstration est plus difficile, voir un prochain cours...*)

Une simple intégration par parties (puisque l'on suppose f de classe $\mathscr{C}^1$) donne, pour $x\neq 0$:

$$\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt=\left[\frac{-1}{x}f(t)\cos(xt)\right]_0^1+\frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,dt$$

Or :

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{|x|}\int_0^1|f'(t)||\cos(xt)|\,dt\leqslant\frac{1}{|x|}M_1$$

où $M_1=\sup\{|f'(t)|,\ t\in[0,1]\}$ (qui existe car f' est continue sur un segment)
donc :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,dt=0\quad(a)$$

De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left|\left[\frac{-1}{x}f(t)\cos(xt)\right]_0^1\right|=\left|\frac{-1}{x}\,[f(1)\cos x-f(0)]\right|\leqslant\frac{2M_0}{|x|}$$

où $M_0=\sup\{|f(t)|,\ t\in[0,1]\}$ (qui existe car f est continue sur un segment)
donc :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-1}{x}f(t)\cos(xt)\right]_0^1=0\quad(b)$$

De (a) et (b), on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt=0$$

4. • Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k}=\int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,dt$$

Pour $n\geqslant 2$, une double intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
I_{n,k}&=\int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,dt\\
&=\left[-B_n(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1+\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 B_n'(t)\sin(2k\pi t)\,dt\\
&=0+\frac{1}{2k\pi}\left(\left[B_n'(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1-\frac{1}{2k\pi}\int_0^1 B_n''(t)\cos(2k\pi t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

Or $B_n' = nB_{n-1}$ donc $B_n'(1) = B_n'(0)$ pour $n \geqslant 2$, puis $B_n'' = n(n-1)B_{n-2}$ donc il reste :

$$\boxed{I_{n,k} = \frac{-n(n-1)}{(2k\pi)^2} I_{n-2,k}}$$

.

- On calcule alors :

$$I_{1,k} = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})\cos(2k\pi t)\,dt = 0$$

(on peut faire une intégration par parties, ou, plus astucieusement, faire le changement de variable $t = 1-u$ qui amène à $I_{1,k} = -I_{1,k}$).
Par une récurrence immédiate, on en déduit alors : $I_{n,k} = 0$ pour n impair.

- On calcule ensuite :

$$I_{2,k} = \int_0^1 (t^2 - t + 1/6)\cos(2k\pi t)\,dt = \frac{2}{(2k\pi)^2}$$

(intégrer deux fois par parties, par exemple)

et la relation précédente permet alors d'obtenir par récurrence : $\boxed{I_{2n,k} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}}$.

5. Il suffit de remplacer par tout ce qui a été trouvé avant :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_{2m}\sin\big((2N+1)\pi t\big)\,dt &= \int_0^1 \frac{[B_{2m}(t) - b_{2m}]\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,dt \\
&= \int_0^1 [B_{2m}(t) - b_{2m}]\left[1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t)\right]dt \\
&= \int_0^1 B_{2m}(t)\,dt - b_{2m} + 2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 B_{2m}(t)\cos(2k\pi t)\,dt \\
&= 2\sum_{k=1}^{N} I_{2m,k} - b_{2m} = \boxed{2\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{(2k\pi)^{2m}} - b_{2m}}
\end{aligned}$$

(les intégrales $b_{2m}\displaystyle\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 B_{2m}(t)\,dt$ étant nulles).

6. De l'égalité précédente, on déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}2^{2m-1}}{(2m)!}\Big(b_{2m} + \int_0^1 \varphi_{2m}\sin\big((2N+1)\pi t\big)\,dt\Big)$.

Puisque : $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \varphi_{2m}\sin\big((2N+1)\pi t\big)\,dt$ existe et est égale à 0 d'après III.3, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2m}}$ existe et que cette limite est égale à :

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}b_{2m}\frac{\pi^{2m}2^{2m-1}}{(2m)!}$$

En particulier, puisque $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_4 = \dfrac{-1}{30}$, $b_6 = \dfrac{1}{42}$, $b_8 = \dfrac{-1}{30}$ et $b_{10} = \dfrac{5}{66}$, cela permet de trouver les résultats célébrissimes :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}}$$ etc....

7. **a)** C'est immédiat : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \leqslant 2.$

La majoration : $\dfrac{|b_{2m}|}{(2m)!} \leqslant \dfrac{4}{(4\pi^2)^m}$ découle alors directement de cette inégalité et de la relation trouvée en III.6.

b) L'"encadrement judicieux" dont parle l'énoncé est plus connu sous le nom de comparaison série-intégrale.

Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2m}}$ décroît sur $]1,+\infty[$, on a, pour $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^{2m}} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2m}}$.

D'où, en sommant : $\displaystyle\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \int_1^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2m}} = \frac{1-\mathrm{N}^{-2m+1}}{2m-1}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient : $1 \leqslant \mathrm{S}_{2m} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2m-1}$, d'où ensuite : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \mathrm{S}_{2m} = 1$.

De l'égalité trouvée en III.6, on en déduit l'équivalent de b_{2m} quand $m \to +\infty$:

$$\boxed{b_{2m} \sim \frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{\pi^{2m}2^{2m-1}}}$$

PARTIE 4 : Formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin

1. • $\mathrm{R}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)\mathrm{B}_2(t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\left[f'(t)\mathrm{B}_2(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\mathrm{B}_2'(t)\,\mathrm{d}t\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(f'(1)\mathrm{B}_2(1) - f'(0)\mathrm{B}_2(0) - \left[f(t)\mathrm{B}_2'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f(t)\mathrm{B}_2''(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Or $\mathrm{B}_2(0) = \mathrm{B}_2(1) = b_2$, $\mathrm{B}_2'(t) = 2t-1$ et $\mathrm{B}_2''(t) = 2$ donc on trouve :

$\boxed{\mathrm{R}_1 = \dfrac{b_2}{2}[f'(1) - f'(0)] - \dfrac{f(1)+f(0)}{2} + \mathrm{R}_0}$, puisque $\mathrm{R}_0 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Puis, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{R}_{k+1} = \int_0^1 \frac{f^{(2k+2)}(t)\mathrm{B}_{2k+2}(t)}{(2k+2)!}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left(\left[f^{(2k+1)}(t)\mathrm{B}_{2k+2}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2k+1)(t)}\mathrm{B}_{2k+2}'(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{(2k+2)!}\left(b_{2k+2}[f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(0)] - (2k+2)\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)\mathrm{B}_{2k+1}(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{b_{2k+2}}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(0)] - \frac{b_{2k+1}}{(2k+1)!}[f^{(2k)}(1) - f^{(2k)}(0)] + \mathrm{R}_k$$

(en ayant intégré une nouvelle fois par parties la 2ème intégrale).

Mais, pour $k \geqslant 1$, $b_{2k+1} = 0$ d'où finalement : $\boxed{\mathrm{R}_{k+1} = \dfrac{b_{2k+2}}{(2k+2)!}[f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(0)] + \mathrm{R}_k}$.

2. La formule : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right] + \mathrm{R}_n$

est vraie pour $n = 1$ d'après le premier calcul fait dans la question précédente, et elle se démontre ensuite facilement par récurrence sur n en utilisant le deuxième calcul.

3. Il suffit de majorer l'intégrale : $|\mathrm{R}_n| = \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{f^{(2n)}(t)\mathrm{B}_{2n}(t)}{(2n)!}\,\mathrm{d}t\right|$

$\leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{|f^{(2n)}(t)||\mathrm{B}_{2n}(t)|}{(2n)!}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{M}|b_{2n}|}{(2n)!}\,\mathrm{d}t$, en utilisant II.7.a, puis en utilisant III.7.a

et on obtient bien : $\boxed{|\mathrm{R}_n| \leqslant \dfrac{4\mathrm{M}}{(4\pi^2)^n}}$.

4. Applications : (il fallait ici supposer $a \neq 0$, petit oubli d'énoncé)

a) Pour $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, la formule sommatoire d'Euler- Mac-Laurin s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $f^{(j)}(t) = a^j f(t)$) :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{e}^a}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!}[a^{2j-1}\mathrm{e}^a - a^{2j-1}] + \mathrm{R}_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!} a^{2j-1}[\mathrm{e}^{a}-1] = \frac{1+\mathrm{e}^{a}}{2} + \frac{1-\mathrm{e}^{a}}{a} + \mathrm{R}_n$

puis : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{2j}}{(2j)!} a^{2j} = \frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{a}+1}{\mathrm{e}^{a}-1} - 1 + \frac{\mathrm{R}_n}{\mathrm{e}^{a}-1} \quad (*)$.

Or : $|\mathrm{R}_n| \leqslant \dfrac{4\mathrm{M}}{(4\pi^2)^n}$, avec ici $\mathrm{M} = \sup\limits_{t\in[0,1]} |a^{2n}\mathrm{e}^{at}| = |a|^{2n}\mathrm{e}^{|a|}$.

Puisque $|a| < 2\pi$, on a $\dfrac{|a|^2}{(4\pi)^2} < 1$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{R}_n = 0$, d'où, en passant à la limite dans l'égalité (*), on obtient bien :

$$\boxed{\frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{a}+1}{\mathrm{e}^{a}-1} \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_{2k}}{(2k)!} a^{2k}}$$

b) En appliquant le résultat précédent avec $a = 2ix$ avec $x \in]-\pi, \pi[$, on obtient, après calculs :

$$\boxed{x\cot x = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_{2k} \frac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}}$$

Par troncature, on retrouve ainsi, par exemple, le développement limité (bien connu) :

$$x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \frac{1}{4725}x^8 - \frac{2}{93555}x^{10} + \mathbf{O}(x^{12})$$

$$\boxed{\text{FIN}}$$