LE CORPS DES QUATERNIONS - TH. DE FROEBENIUS

PARTIE 1 : Le corps des quaternions

On notera $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}), + , \times ,.)$, pour les lois usuelles sur les matrices, est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre, donc également d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre.

Si $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, on notera $\mathrm{tr}(M)$ la trace de M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On notera $\mathbb{H}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices M de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} z & z' \\ -\overline{z'} & \overline{z} \end{pmatrix}, \text{ avec } (z,z') \in \mathbb{C}^2$$

.

1°) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

2°) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\underline{\mathbb{R}}$-espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, et que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{H} \\ (z,z') & \mapsto & \begin{pmatrix} z & z' \\ -\overline{z'} & \overline{z} \end{pmatrix} \end{cases}$$ est un isomorphisme de $\underline{\mathbb{R}}$-espaces vectoriels .

$\mathbb{H}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

3°) On note : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que (E,I,J,K) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

b) Montrer que l'ensemble $\{E,I,J,K, - E, - I, - J, - K\}$ est un groupe non abélien pour la loi $\times$.

4°) Pour toute $M = \begin{pmatrix} z & z' \\ -\overline{z'} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, on note $s(M) = \begin{pmatrix} \overline{z} & -z' \\ +\overline{z'} & z \end{pmatrix}$.

a) Montrer que s est un automorphisme involutif du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

b) Montrer que : $\forall (M,N) \in \mathbb{H}^2$, $s(MN) = s(N)s(M)$.

c) Montrer que : $\forall M \in \mathbb{H}$, $s(M) = -M + \mathrm{tr}(M)E$. En déduire que s est une symétrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$, dont on précisera les éléments caractéristiques.

d) Calculer, pour $M \in \mathbb{H}$: $s(M)M$ et $Ms(M)$. En déduire que tout élément $M \in \mathbb{H}$, non nul, admet un inverse M^{-1} dans $\mathbb{H}$, et exprimer M^{-1} à l'aide de M.

e) Que peut-on en déduire pour la structure de $\mathbb{H}$?

5°) **a)** Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}$ qui, à tout réel x, associe la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Montrer que φ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-algèbres.
(*ce morphisme permet donc d'identifier* $\mathbb{R}$ *à une sous-algèbre de* $\mathbb{H}$).

b) Soit ψ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ qui, à tout complexe z, associe la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$.

Montrer que ψ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-algèbres.
(*ce morphisme permet donc d'identifier* $\mathbb{C}$ *à une sous-algèbre de* $\mathbb{H}$).

PARTIE 2 :

Question préliminaire :

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, et $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k X^k$, où $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ à support fini, et pour tout $a \in \mathcal{A}$, on pose $P(a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k a^k$ (avec $a^0 = 1_{\mathcal{A}}$, élément unité de $\mathcal{A}$).

Dites pourquoi cette écriture a un sens.

Montrer que, pour $a \in \mathcal{A}$ fixé, l'application $\varphi_a \ : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to \ \mathcal{A} \\ P & \mapsto \ P(a) \end{cases}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

PARTIE 2.A : Étude des $\mathbb{C}$-algèbres intègres de dimension finie.

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de dimension finie (c'est-à-dire que l'anneau $\mathcal{A}$ est intègre, et que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ est de dimension finie).

On notera $0_{\mathcal{A}}$ l'élément neutre de $\mathcal{A}$ pour l'addition, et $1_{\mathcal{A}}$ l'élément neutre de $\mathcal{A}$ pour la multiplication interne.

1°) Soit a un élément de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, non nul, tel que $P(a) = 0_{\mathcal{A}}$ (considérer l'ensemble $\{a^k, k \in \mathbb{N}\}$).

2°) En considérant la décomposition de P en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a = \alpha.1_{\mathcal{A}}$.

3°) En déduire que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

PARTIE 2.B : Étude des $\mathbb{R}$-algèbres intègres commutatives de dimension finies.

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie,commutative, de dimension strictement supérieure à 1.

1°) Montrer que $\mathcal{A}$ est un corps commutatif (on pourra considérer, pour $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0_{\mathcal{A}}$, l'application $x \mapsto ax$).

2°) Soit $x_0 \in \mathcal{A}$, tel que $x_0 \notin \mathbb{R}.1_{\mathcal{A}}$.

a) Justifier l'existence d'un tel x_0, et montrer que la famille $(1_{\mathcal{A}}, x_0)$ est libre.

b) Montrer qu'il existe un polynôme irréductible de degré 2, appartenant à $\mathbb{R}[X]$, tel que $P(x_0) = 0_{\mathcal{A}}$.

c) En déduire qu'il existe $y_0 \in \mathcal{A}$ tel que $y_0^2 = -1_{\mathcal{A}}$.

3°) **a)** Soit θ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{A}$ qui, à tout complexe $a+ib$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) associe $a.1_{\mathcal{A}}+b.y_0$. Montrer que θ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-algèbres, et que son image $\mathbb{K} = \theta(\mathbb{C})$ est un sous-corps de $\mathcal{A}$.

b) Vérifier que $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie.

c) Par une méthode analogue à celle de la partie 2.A, montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

PARTIE 2.C : Étude des $\mathbb{R}$-algèbres intègres non commutatives de dimension finies.

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie, non commutative, de dimension strictement supérieure à 1.

1°) Montrer que $\mathcal{A}$ est un corps non commutatif.

On montre, exactement comme dans la partie 2.B, qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u^2 = -1_{\mathcal{A}}$, et que l'ensemble $\mathbb{K}$ des éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $a.1_{\mathcal{A}} + b.u$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est un sous-corps de $\mathcal{A}$, isomorphe à $\mathbb{C}$.

On pose alors, pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x) = uxu^{-1}$.

2°) Montrer que σ est un automorphisme involutif de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{A}$.

3°) Montrer que $\mathcal{A}' = \{x \in \mathcal{A} \,,\, \sigma(x) = x\}$ et $\mathcal{A}'' = \{x \in \mathcal{A} \,,\, \sigma(x) = -x\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.

4°) **a)** Montrer que $\mathcal{A}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}'$ contient $\mathbb{K}$.

c) Montrer que $\mathcal{A}'$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, et en déduire $\mathcal{A}' = \mathbb{K}$.

5°) Soit $z_0 \neq 0 \in \mathcal{A}''$.

a) Justifier l'existence d'un tel z_0.

b) Montrer que : $\mathcal{A}'z_0 \subset \mathcal{A}''$, puis que $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'z_0$.
Que peut-on en déduire pour la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$?

6°) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{A}''$ tel que $v^2 = -1$ (s'inspirer de la méthode vue en 2.B).

7°) On note $w = uv$. Prouver que $(1_{\mathcal{A}},u,v,w)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.

8°) En déduire que la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{H}$.

On a ainsi démontré le théorème de Frobenius (1880) : toute $\mathbb{R}$-algèbre intègre de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.
