CORRIGÉ : LOCALISATION DES RACINES D'UN POLYNÔME (extrait de ENS, PC, 2009)

A - Fonction d'exclusion associée à un polynôme

A.1 $x \in \mathbb{R}$ est fixé. $\mathrm{M}(x,t) = |\mathrm{P}(x)| - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!} t^k$

P est un polynôme de degré n, $\mathrm{P}^{(n)}$ est donc un polynôme constant égal à $a_n n!$.

La fonction $\mathrm{F} : t \mapsto \mathrm{M}(x,t)$ est une fonction polynôme de degré n, de coefficient dominant $-|a_n|$.

Sa dérivée est $\mathrm{F}' : t \mapsto -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!} t^{k-1}$. Si $t > 0$, $\mathrm{F}'(t) \leqslant -n|a_n|t^{n-1} < 0$, donc F est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

La fonction F est continue, strictement monotone sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0,+\infty[$ donc réalise une bijection de I sur $\mathrm{F(I)}$.

Mais $\mathrm{F}(t) \underset{+\infty}{\sim} -|a_n|t^n$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = -\infty$. De plus $\mathrm{F}(0) = |\mathrm{P}(x)| \geqslant 0$.

$0 \in \mathrm{F(I)}$ et possède donc un antécédent unique par F, c'est $m(x)$.

A.2 $\mathrm{P}(x) = x^2 - 1$. $\mathrm{M}(x,t) = |x^2-1| - |2x|t - t^2 = -\left((t+|x|)^2 - |x|^2 - |x^2-1|\right)$.

L'unique racine positive est $m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2-1|}$.

A.3 La fonction $t \to \mathrm{M}(x,t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule de manière unique en $t = m(x)$. Donc pour $t \geqslant 0$, $t = m(x) \Leftrightarrow \mathrm{M}(x,t) = 0$.

Or $\mathrm{M}(x,0) = |\mathrm{P}(x)|$. Donc $m(x) = 0 \Leftrightarrow |\mathrm{P}(x)| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x) = 0$.

A.4 Soit x, y deux réels. Appliquons la formule de Taylor pour le polynôme P entre x et y :

$\mathrm{P}(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$ et $\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(y) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$.

On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$|\mathrm{P}(x)| \leqslant |\mathrm{P}(y)| + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|\mathrm{P}^{(k)}(x)|}{k!}|y-x|^k$ d'où $\left|\mathrm{P}(y)\right| \geqslant |\mathrm{P}(x)| - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\mathrm{P}^{(k)}(x)\right|}{k!}|y-x|^k = \mathrm{M}\left(x, |y-x|\right)$.

Si $\mathrm{P}(x) \neq 0$, le réel $m(x)$ est strictement positif. Vu la stricte décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{M}(x,t)$ la condition $|y-x| < m(x)$ implique $\mathrm{M}(x,|y-x|) > 0$.

L'inégalité précédente permet alors de conclure que $|\mathrm{P}(y)| > 0$ et en particulier $\mathrm{P}(y) \neq 0$.

A.5 Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $\mathrm{P}(x) \neq 0$. D'après la question précédente, l'intervalle $]x - m(x), x + m(x)[$ ne contient pas de racine de P. Donc $d(x,\mathrm{Z}) \geqslant m(x)$.

Si $\mathrm{P}(x) = 0$, $m(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Z}$ donc $d(x,\mathrm{Z}) = 0$. Dans tous les cas : $m(x) \leqslant d(x,\mathrm{Z})$.

B - Détermination d'un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant toutes les racines de P.

B.1 $\mathrm{Q}(x) = x^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k$.

Pour $x \neq 0$, $\mathrm{Q}(x) = x^n \left(1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^{k-n}\right) = x^n \mathrm{F}(x)$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée strictement positive car l'un au moins des a_k est non nul.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$. F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, 1[$.

Il existe donc un unique $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{F}(r_0) = 0$. Or pour $x \neq 0$, $\mathrm{Q}(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{F}(x) = 0$ d'où r_0 est l'unique réel strictement positif pour lequel Q s'annule.

B.2 Si $x_0=0$, toutes les égalités à démontrer sont vérifiées. On supposera donc dans la suite $x_0>0$.
Il existe un élément $x_i \in Z$ tel que $x_0=|x_i|$. Mais $P(x_i)=0$ donc
$x_i^n=-\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_i^k \Rightarrow |x_i|^n = x_0^n = \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_i^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k||x_i|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|x_0^k$.
On obtient $Q(x_0)\leqslant 0$, d'où $F(x_0)\leqslant 0$ et donc $x_0\leqslant r_0$.
Si $r>0$ vérifie, $Q(r)>0$ alors $F(r)>0$ et d'après les variations de F, $r>r_0$.
Donc en résumé si $r>0$ vérifie $Q(r)>0$ alors on a $x_0\leqslant r$.

B.3 — ou bien $x_0\leqslant 1$ et l'inégalité demandée est vraie
— ou bien $x_0>1$ et pour tout k avec $0\leqslant k\leqslant n-1$, $x_0^k\leqslant x_0^{n-1}$.
L'inégalité de **B.2** donne : $x_0^n \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)x_0^{n-1}$.
Comme $x_0>0$ on a : $x_0\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|$.
On a donc toujours : $x_0\leqslant \max\left(1,\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)$.

B.4 Si $P(x)=0$, $P_1(x)=(x-1)P(x)=0$.
En développant on obtient : $P_1(x)=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)x^k-a_0$.
Soit alors Z_1 l'ensemble des racines de P_1. $Z_1=Z\cup\{1\}$.
Notons $x_0'=\sup_{x\in Z_1}|x|$. On a : $x_0\leqslant x_0'$ et $x_0'\geqslant 1$.En appliquant le résultat de la question précédente à x_0' et P_1 on obtient :

$$x_0\leqslant x_0'\leqslant |a_{n-1}-1|+\sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k-1}|+|a_0|.$$

B.5 Supposons par l'absurde que $x_0>2|a_{n-1}|$, $x_0>2\dfrac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|},\dots,x_0>2\dfrac{|a_1|}{|a_2|}$ et $x_0>\dfrac{|a_0|}{|a_1|}$.
On a alors : $|a_{n-1}|<\dfrac{x_0}{2},|a_{n-2}|<\dfrac{x_0^2}{2^2},\dots,|a_1|<\dfrac{x_0^{n-1}}{2^{n-1}},|a_0|<\dfrac{x_0^n}{2^{n-1}}$.
Mais : $x_0^n\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|x_0^k\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_0^n}{2^{n-k}}+\dfrac{x_0^n}{2^{n-1}}\right)$.
Comme $x_0>0$, $1<\dfrac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}2^k+2\right)=\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{2^n-1}{2-1}-1+2\right)=1$.
Contradiction. Donc x_0 est inférieur à au moins l'un des réels utilisés plus haut et :

$$x_0\leqslant \max\left(2|a_{n-1}|,2\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|},\dots,2\frac{|a_1|}{|a_2|},\frac{|a_0|}{|a_1|}\right)$$

B.6 — $P(x)=1+x+x^2+x^3$ (P possède bien une racine réelle puisqu'il est de degré impair)
Par **B.4**, $x_0\leqslant 1$ et par **B.5** $x_0\leqslant 2$.
— $P(x)=x^3+2x^2+x+2$. Par **B.4**, $x_0\leqslant 5$ et par **B.5** $x_0\leqslant 4$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆