CORRIGÉ DU DM N°6 : EXERCICES SUR LES POLYNÔMES

EXERCICE 1 : Polynômes de Hilbert.

1. Par un calcul direct : $H_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \dbinom{k}{n} & \text{si } k \geqslant n \\ (-1)^n \dbinom{n-k-1}{n} & \text{si } k < 0. \end{cases}$

Cela montre que $H_n(k)$ est bien un nombre entier.

On remarque que $k \cdot (k+1) \cdots (k+n-1) = n! H_n(k+n-1)$. Ce produit est donc bien un multiple de $n!$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété donnée. Soit $n = \deg A$.
Notons $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes élémentaires de Lagrange associés à la suite $(0, 1, \ldots, n)$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \ , \ L_i(j) = \delta_{ij} .$$

On sait les écrire (je ne rappelle pas les formules, cf. cours) et, par construction, ils sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Or, on a $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A(k) L_k$, donc $A \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Non, voir par exemple les polynômes H_n.

4.
- On a clairement $(a) \Rightarrow (b)$ et $(a) \Rightarrow (c)$.
- Si P est combinaison linéaire à coefficients entiers de $H_0, \ldots, H_n$, alors la première question montre que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, donc $(d) \Rightarrow (a)$.
- Montrons $(b) \Rightarrow (d)$:
  La famille $H_0, \ldots, H_n$ étant échelonnée en degrés, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc il existe des réels λ_k tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.
  On a $P(0) = \lambda_0 \in \mathbb{Z}$. Ensuite, puisque $P(1) = \lambda_0 H_0(1) + \lambda_1 H_1(1) = \lambda_0 H_0(1) + \lambda_1$ est dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que λ_1 est dans $\mathbb{Z}$ aussi. Et ainsi de suite, par récurrence, tous les λ_k sont entiers.
- Enfin, montrons $(c) \Rightarrow (a)$:
  Supposons la propriété (c) vérifiée pour un certain k, et posons $Q(X) = P(X+k)$. Alors Q vérifie $Q(j) \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$. Il vérifie donc la propriété (b), donc aussi la propriété (a) d'après ce qui précède. Donc $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, d'où $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2 : Polynômes de Tchebychev de 1ère espèce.

1. a) $\cos(n\theta) = \mathscr{R}e\,(e^{in\theta}) = \mathscr{R}e\,((e^{i\theta})^n) = \mathscr{R}e\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathscr{R}e\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k}\right)$

d'où : $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin^2\theta)^k (\cos\theta)^{n-2k}$

et finalement, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ avec $\boxed{T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}}$, qui est bien un polynôme.

Cela prouve l'existence demandée.

b) Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et S_n vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = S_n(\cos\theta)$. Alors, pour tout $x \in [-1,1]$ on aura $T_n(x) = S_n(x)$ soit $(T_n - S_n)(x) = 0$.
Le polynôme $T_n - S_n$ ayant une infinité de racines est le polynôme nul, donc $T_n = S_n$, ce qui prouve l'unicité.

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos((n+2)\theta)+\cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta$ (on utilise la formule de trigonométrie bien connue $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$).

Donc $T_{n+2}(\cos\theta)+T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta)$ pour tout θ réel, d'où, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_{n+2}(x)+T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.

Cette égalité entre fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $\boxed{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).}$

d) $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et la formule de récurrence précédente donne $T_2 = 2X^2-1$ puis $T_3 = 4X^3-3X$.

La relation de récurrence précédente permet alors de démontrer facilement par récurrence sur n la propriété :

$$\mathscr{H}_n : \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n \\ \text{son coefficient dominant est } 2^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1 \\ \text{sa parité est celle de } n \end{cases}$$

(on démontre les trois propriétés en même temps dans une seule récurrence, il serait maladroit de faire trois récurrences séparées !).

e) Pour $n \geqslant 1$: $T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$.

Or, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, les nombres $\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$ dont n réels distincts de l'intervalle $]0,\pi[$. La fonction cos étant une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, on en déduit que les nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n réels distincts tels que $T_n\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)\right) = 0$.

Il s'agit donc de n racines distinctes de T_n. Celui-ci étant de degré n, ce sont exactement les n racines de T_n.

La décomposition de T_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors directement (pour $n \geqslant 1$) :

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$$

2. Il est facile de vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\mathrm{ch}((n+2)x)+\mathrm{ch}(nx) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}((n+1)x)$$

ce qui permet, compte tenu de la relation de récurrence sur les T_n démontrée auparavant, de démontrer par récurrence sur n la relation $\boxed{T_n(\mathrm{ch}\,x) = \mathrm{ch}(nx).}$

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ d'où, en dérivant

$$-\sin x T_n'(\cos x) = -n\sin(nx)$$

puis en dérivant de nouveau :

$$(1-\cos^2 x)T_n''(\cos x) - \cos x T_n'(\cos x) + n^2 T_n''(\cos x) = 0$$

Ainsi, pour tout $y \in [-1,1]$, $(1-y^2)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2T_n(y) = 0$.

L'égalité entre ces deux fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $\boxed{(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0.}$

b) En posant $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $a_n = 2^{n-1}$), on a alors $T_n' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $T_n'' = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2}$, d'où, en remplaçant dans la relation précédente :

$$(1-X^2)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k + n^2\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} - \sum_{\substack{\cancel{k=2}\\ k=0}}^{n} k(k-1)a_kX^k - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{n} ka_kX^k + n^2\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_kX^{k-2} - \sum_{k=0}^{n}\left[k(k-1)+k-n^2\right]a_kX^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k - \sum_{k=0}^{n}(k^2-n^2)a_kX^k = 0$$

On en déduit : $\begin{cases} a_{n-1} &= 0 \\ a_k &= \dfrac{(k+1)(k+2)}{k^2-n^2}a_{k+2} \quad \text{pour } k \leqslant n-2 \end{cases}$

Donc :

- Tous les coefficients de la forme $a_{n-(2p+1)}$ sont nuls (ce qui est normal, compte tenu de la parité de T_n).
- Pour $p \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, $a_{n-2p} = -\dfrac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{4p(n-p}a_{n-2p+2}$ ce qui permet d'obtenir, par récurrence sur p la superbe formule :

$$\boxed{\forall \in [\![1, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor]\!] \quad , \quad a_{n-2p} = \frac{(-1)^p n(n-p-1)!}{4^p p!(n-2p)!}a_n \quad \text{avec } a_n = 2^{n-1}.}$$

EXERCICE 3 : Calcul de $\zeta(2)$.

1. $\sin(p\alpha) = \mathscr{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\alpha}) = \mathscr{Im}\,((\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^p)$

$$= \mathscr{Im}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{i}^k(\sin\alpha)^k(\cos\alpha)^{p-k}\right) = \mathscr{Im}\left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{i}^k(\sin\alpha)^k(\cos\alpha)^{p-k}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{p}{2j+1}(\sin\alpha)^{2j+1}(\cos\alpha)^{p-2j-1} \text{ (en ayant posé } k = 2j+1)$$

d'où, en divisant par $\sin^p\alpha$ (qui est non nul par hypothèse) :

$$\boxed{\frac{\sin(p\alpha)}{\sin^p\alpha} = \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{p}{2j+1}(\cot\alpha)^{p-2j-1}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction cot réalisant une bijection strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}_+$, il existe un et un seul $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \cot^2\alpha$. L'équation proposée équivaut donc, compte tenu du calcul précédent, à : $\sin\big((2n+1)\alpha\big) = 0$, d'où $\alpha = \dfrac{k\pi}{2n+1}, k \in \mathbb{Z}$

Or, lorsque k décrit $[\![1, n]\!]$, les n réels $\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont distincts et sont solutions de l'équation proposée. Celle-ci étant de degré n, c'en sont donc exactement *les* solutions.

D'après le cours, la somme des racines de l'équation est égale à $\dfrac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}$, c'est-à-dire à $\dfrac{2n(2n-1)}{6}$. On a donc obtenu la formule :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}.}$$

3. Des relations proposées (faciles à vérifier), il résulte, pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{\alpha^2} - 1 \leqslant \cot^2\alpha \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$

On applique alors ces inégalités pour $\alpha = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ puis on somme, en tenant compte de la relation démontrée à la question précédente :

$$\frac{(2n+1)^2}{k\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - n \leqslant \frac{2n(2n-1)}{6} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{k\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

ce qui donne l'inégalité de l'énoncé.

4. Le théorème des gendarmes prouve alors l'existence de $\zeta(2)$ et : $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}.}$

EXERCICE 4 : Polynômes de Bernoulli et quelques applications.

1. a) Si P est nul, on a nécessairement $Q = 1$. Sinon, soit n le degré de P : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

La relation $Q' = P$ équivaut à $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + c$ où c est une constante. La relation $\int_0^1 Q(x)\,dx = 0$ donne alors $c = -\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$, ce qui prouve l'existence et l'unicité du polynôme Q.

b) Les B_n sont donc construits par récurrence en utilisant le résultat précédent.

c) – La relation $B_1' = 1$ donne $B_1 = X + c$ et l'on a $\int_0^1 (x+c)\,dx = 0$ d'où $c = -\frac{1}{2}$. On a donc $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}\cdot$

– La relation $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$ donne $B_2 = X^2 - X + c$; la relation $\int_0^1 (x^2 - x + c)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$ donne $c = \frac{1}{6}$. On a donc $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}\cdot$

– On trouve ensuite, de la même façon : $\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X}$ et $\boxed{B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}}\cdot$

2. a) Il, est facile de démontrer par récurrence que B_n est de degré n et normalisé.

b) Pour $n \geqslant 2$: $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0$

c) – La formule proposée est vraie pour $n = 0, 1, \ldots$

– Si on la suppose vérifiée à l'ordre n alors $B_{n+1}' = (n+1)B_n = \sum_{k=0}^{n} (n+1)\binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

Compte tenu de la relation $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ on obtient

$$B_{n+1}' = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1} b_{n-k} X^k$$

d'où en intégrant :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k} X^{k+1} + c\,.$$

On a alors $c = B_{n+1}(0) = b_{n+1}$ donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k} X^{k+1} + b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k + b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k$$

ce qui donne la formule à l'ordre $n+1$ et achève la récurrence.

d) La relation $B_n(1) = B_n(0) = b_n$ pour $n \geqslant 2$ donne, en utilisant la relation précédente pour $X = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n$$

d'où $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$ soit $nb_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$. On a donc, pour $n \geqslant 2$:

$$\boxed{b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\,.}$$

Puisque $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$ on obtient :

$$b_5 = -\frac{1}{6}\left(\binom{6}{2}b_4 + \binom{6}{3}b_3 + \binom{6}{4}b_2 + \binom{6}{5}b_1 + b_0\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2} + \frac{15}{6} - 3 + 1\right) = 0$$

puis

$$b_6 = -\frac{1}{7}\left(\binom{7}{2}b_5 + \binom{7}{3}b_4 + \binom{7}{4}b_3 + \binom{7}{5}b_2 + 7b_1 + b_0\right) = -\frac{1}{7}\left(-\frac{35}{30} + \frac{21}{6} - \frac{7}{2} + 1\right) = \frac{1}{42}\cdot$$

e) Récurrence immédiate.

f) On a :

- $C_0 = B_0 = 1$;
- $\forall n \geqslant 1,\ C_n' = (-1)^{n+1} B_n'(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = n C_{n-1}$;
- $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^1 C_n(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$.

Ainsi, les polynômes C_n vérifient les mêmes relations que les polynômes B_n ; d'après l'unicité démontrée en **1.b**, on en déduit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = B_n}$.

g) D'après ce qui précède, on a donc $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$, et puisque $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geqslant 2$, on en déduit que $B_n(0) = 0$ pour n impair $\geqslant 3$, soit $\boxed{\forall n \geqslant 1\ ,\ b_{2n+1} = 0.}$

En prenant $X = \dfrac{1}{2}$ on obtient aussi $B_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^n B_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc $B_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ pour n impair soit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.}$

3. *Une application arithmétique*

a) La propriété $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ se démontre facilement par récurrence sur $n \geqslant 1$:

– Puisque $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$, elle est vraie pour $n = 1$.

– Supposons là vérifiée au rang $n \geqslant 1$. Alors $n(n+1)B_n(X+1) - (n+1)B_n(X) = (n+1)nX^{n-1}$ soit $B_{n+1}'(X+1) - B_{n+1}'(X) = (n+1)nX^{n-1}$ donc en intégrant, compte tenu de $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ on obtient $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$, ce qui est la propriété à l'ordre $n+1$ et ce qui achève la récurrence.

b) D'après le calcul précédent, en remplaçant n par $p+1$ et X par k :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ k^p = \frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\big)$$

donc la formule de l'énoncé découle d'un banal télescopage dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$.

c) Pour $p = 1$, $S_1(N) = \dfrac{1}{2}(B_2(N+1) - b_2) = \dfrac{1}{2}\big((N+1)^2 - (N+1)\big) = \dfrac{N(N+1)}{2}$ et l'on retrouve la formule bien connue...

Idem pour $p = 2$ et $p = 3$.

4. *Une application analytique*

a) Puisque $b_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à celui de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_{2n}}{(2n)!} t^{2n}$.

Posons alors, pour $t \neq 0$, $u_n = \dfrac{b_{2n}}{(2n)!} t^{2n}$. On a, en utilisant l'équivalent donné par l'énoncé :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{b_{2n+2}}{2n(2n+1)b_{2n}}\right| t^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{n+1}{\pi e}\right)^{2n+2}\sqrt{16\pi(n+1)}}{2n(2n+1)\left(\dfrac{n}{\pi e}\right)^{2n}\sqrt{16\pi n}} t^2 \sim \left(\frac{n}{\pi e}\right)^2 \frac{1}{4n^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} t^2$$

et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^2$ on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{t^2}{4\pi^2}$.

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge si $\dfrac{t^2}{4\pi^2} < 1$ et diverge si $\dfrac{t^2}{4\pi^2} > 1$, donc le rayon de convergence de la série entière est égal à 2π.

b) La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}$ a un rayon de convergence ∞, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} = t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n!} = t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}$ donc la formule du cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières donne, pour $|t| < 2\pi$:

$$\left(t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}t^n\right)=t\sum_{n=0}^{+\infty}c_nt^n$$

avec $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}b_{n-k}$.

Or, en utilisant la formule trouvée en **2.c**, on a, pour $n\geqslant 1$:

$$0=\int_0^1 \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}\cdot\frac{1}{k+1}$$

donc $c_n=0$ pour $n\geqslant 1$, et un calcul direct donne $c_0=1$.

Finalement on a trouvé, pour $|t|<2\pi$:

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}\frac{b_n}{n!}t^n\right)=t\ .}$$

Et puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}=\mathrm{e}^t-1$ on a bien (l'égalité se prolonge pour $t=0$!) :

$$\boxed{\forall t\in\,]-2\pi,2\pi[\ ,\ \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}t^n\,.}$$

c) La formule de l'énoncé se démontre en faisant le produit de Cauchy des deux séries entières $\displaystyle\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}t^n$ et $\mathrm{e}^{xt}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^nt^n}{n!}$, et en utilisant encore la relation démontrée en **2.c** (je vous laisse faire ce calcul sans grande difficulté).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆