CORRIGÉ DM N°10 CCP MP 2001

I. Propriétés générales

1. Par développement par rapport à la première ligne, on obtient directement

$$\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0).$$

Donc : $\boxed{C_P \text{ est inversible si et seulement si } P(0) \neq 0}$.

2. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X-a_{n-1} \end{vmatrix} = (-X-a_{n-1}) \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -X \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+k+1}(-a_k) \underbrace{\begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{developpement p.r colonne } k} \begin{array}{l} \updownarrow k \\ \\ \updownarrow n-1-k \end{array} + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & -X & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-X-a_{n-1})(-X)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+k+1}(-a_k)(-X)^k + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0)$$

$$= (-1)^n \left[X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_kX^k + \cdots + a_0\right]$$

soit $\boxed{\chi_{C_P} = (-1)^n P}$.

Rem : *Cette méthode est loin d'être la plus agréable, mais « bizarrement » tout le monde a fait ainsi...*

Il y a bien plus rapide : on multiplie la dernière ligne par X^{n-1}, l'avant-dernière par X^{n-2} etc... la seconde par X et on ajoute le tout à la première ligne ; la première ligne devient alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -P(X) \end{pmatrix}$ et il ne reste plus qu'à développer suivant cette ligne...

Une autre solution consiste à développer selon la première ligne puis à raisonner par récurrence...

3. Si $Q = \chi_A$ alors $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Réciproquement, si $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$, posons $P = (-1)^n Q$: on a alors $Q = \chi_{C_P}$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{Il existe } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } Q = \chi_A \text{ si et seulement si } Q \text{ a pour terme dominant } (-1)^n X^n.}$

4. a) $\chi_{{}^tC_P} = \chi_{C_P}$ (cf. cours) donne $\boxed{\mathrm{Sp}({}^tC_P) = \mathrm{Sp}(C_P).}$

b)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}({}^tC_P - \lambda I_n) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda x_1 & = & x_2\\ \lambda x_2 & = & x_3\\ & \vdots & \\ \lambda x_{n-1} & = & x_n\\ \lambda x_n & = & -a_0x_1-\cdots-a_{n-2}x_{n-1}-a_{n-1}x_n\end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{lcl}x_2 & = & \lambda x_1\\ x_3 & = & \lambda^2 x_1\\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda^{n-1}x_1\\ 0 & = & \mathrm{P}(\lambda)\,x_1\end{array}\right.$$

et on a $\mathrm{P}(\lambda)=0$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{C_P}-\lambda \mathrm{I}_n\right)=\mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}}$.

c) Si P est scindé à racines simples alors $\chi_{{}^t\mathrm{C_P}}$ aussi et donc ${}^t\mathrm{C_P}$ est diagonalisable (car $\chi_{{}^t\mathrm{C_P}}$ est annulateur de C_p d'après le th. de Cayley-Hamilton).

Réciproquement, si ${}^t\mathrm{C_P}$ est diagonalisable alors $\chi_{{}^t\mathrm{C_P}}$ est scindé donc P aussi et, pour tout λ racine de P, on a $\lambda\in \mathrm{Sp}\left({}^t\mathrm{C_P}\right)$ et la multiplicité de λ est égale à $\dim\Big(\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{C_P}-\lambda\mathrm{I}_n\right)\Big)$. Or, on a vu au **b)** que $\dim\Big(\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{C_P}-\lambda\mathrm{I}_n\right)\Big)=1$. Donc P est scindé à racines simples.

Ainsi $\boxed{{}^t\mathrm{C_P} \text{ est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.}}$

d) ⋄ Puisque $\deg \mathrm{P}=n$, si P a n racines deux à deux distinctes alors P est scindé à racines simples et donc $\boxed{{}^t\mathrm{C_P} \text{ est diagonalisable.}}$ d'après la question précédente.

⋄ La famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_1^{n-1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}1\\ \lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\right\}$ est formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Elle est donc libre et donc $\boxed{\text{on a bien : }\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq 0}$.

5. a) Il suffit de prendre $\boxed{n=2002,\quad \mathrm{P}=\mathrm{X}^{2002}-\mathrm{X}^{2001}-\mathrm{X}^{2000}-1999 \quad\text{et}\quad \mathrm{A}=\mathrm{C_P}.}$
On a $\chi_\mathrm{A}=\mathrm{P}$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $\mathrm{P(A)}=0_n$.

Question sans aucun intérêt, cela a déjà été fait dans le cas général à la question 3 !

b) Puisque $f^{n-1}\neq 0$, on a $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}\neq \mathrm{E}$ et on peut choisir $e_1\notin \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$ puis poser, pour $k\in [\![2,n]\!]$, $e_k=f^{k-1}(e_1)$. Montrons[1] que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E :

si il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k=0$, posons $r=\min\{k \text{ tq } \lambda_k\neq 0\}$; on a alors

$$\begin{aligned}0=f^{n-r}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)&=f^{n-r}\left(\sum_{k=r}^{n}\lambda_k e_k\right)=\sum_{k=r}^{n}\lambda_k f^{n-r+k-1}(e_1)\\ &=\lambda_r f^{n-1}(e_1)+f^n\left(\sum_{k=r+1}^{n}\lambda_k f^{k-r}(e_1)\right)=\lambda_r f^{n-1}(e_1)\end{aligned}$$

1. ou plutôt, re-montrons : cela a été fait en cours...

donc, puisque $f^{n-1}(e_1) \neq 0$, $\lambda_r = 0$ ce qui contredit la définition de r. Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E donc une base de E et, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_k) = f^k(e_1) = e_{k+1}$ et $f(e_n) = f^n(e_1) = 0$.

Donc $\boxed{\text{il existe une base } \mathscr{B} \text{ de E telle que Mat}\left(f, \mathscr{B}\right) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{C}_{\mathrm{X}^n}.}$

II. Localisation des racines d'un polynôme

6. On a $\lambda \mathrm{X} = \mathrm{AX}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$ donc

$$\left|\lambda x_i\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right| \left|x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right| \|\mathrm{X}\|_\infty$$

d'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left|\lambda x_i\right| \leqslant r_i \left\|\mathrm{X}\right\|_\infty.}$$

7. Appliquons le résultat de **6)** à i_0 tel que $\left|x_{i_0}\right| = \left\|\mathrm{X}\right\|_\infty$: on obtient $\left|\lambda\right| \left\|\mathrm{X}\right\|_\infty \leqslant r_{i_0} \left\|\mathrm{X}\right\|_\infty$ donc, puisque $\mathrm{X} \neq 0$, $\left|\lambda\right| \leqslant r_{i_0}$ donc $\lambda \in \mathrm{D}_{i_0}$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathrm{Sp(A)}$, $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$ tq $\lambda \in \mathrm{D}_{i_0}$ donc $\boxed{\mathrm{Sp(A)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k.}$

Rem : cela est moins précis que ce que l'on obtient grâce au théorème de Hadamard, cf. exercice n°x corrigé en TD.

8. On a vu au **2)** que les racines de P sont les valeurs propres de $\mathrm{C_P}$ et on peut appliquer **7)** à $\mathrm{A} = \mathrm{C}_p$ avec $r_1 = \left|a_0\right|$ et pour $i \in [\![2, n]\!]$, $r_i = 1 + \left|a_{i-1}\right|$. Or, $\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i$ donc

$$\boxed{\text{toutes les racines de P appartiennent à } \mathrm{B}_f\left(0, \mathrm{R}\right) \text{ où } \mathrm{R} = \max\left\{\left|a_0\right|, 1 + \left|a_1\right|, \ldots, 1 + \left|a_{n-1}\right|\right\}.}$$

9. Supposons par exemple que $a = \max\{a, b, c, d\}$. Si $n \in \mathbb{N}$ est solution de l'équation proposée, il est racine de $\mathrm{P} = \mathrm{X}^a + \mathrm{X}^b - \mathrm{X}^c - \mathrm{X}^d \in \mathbb{C}_a[\mathrm{X}]$ donc, avec les notations de **8)**, on a $|n| \leqslant \mathrm{R}$ avec $\mathrm{R} = 2$ car $\left|a_0\right| = 0$ et $1 + \left|a_k\right| = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in \{b, c, d\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Mais, si 2 était solution, on aurait, en supposant, par exemple, $c > d$, $2^b\left(2^{a-b} + 1\right) = 2^d\left(2^{c-d} + 1\right)$ donc, par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers (ou tout simplement en raisonnant sur la parité), $b = d$ ce qui est exclu. 0 et 1 étant clairement solutions, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{les seules solutions } n \in \mathbb{N} \text{ de } n^a + n^b = n^c + n^d \text{ sont 0 et 1.}}$$

III. Suites récurrentes linéaires

10. Si $u(n) = \lambda^n$ pour tout n (avec $\lambda \neq 0$)) alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) + a_{p-1} u(n+p-1) + \cdots + a_0 u(n) = \lambda^n \left(\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_0\right) = \lambda^n \mathrm{P}(\lambda).$$

Donc $\boxed{\text{la suite } n \mapsto \lambda^n \text{ appartient à F si et seulement si } \lambda \text{ est racine de P .}}$

11. $\diamond$ φ est clairement linéaire et si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, il existe une et une seule suite $u \in \mathrm{F}$ telle que $\varphi(u) = \alpha$: c'est la suite définie par $u(0) = \alpha_0, \dots$ $u(p-1) = \alpha_{p-1}$ et, pour $n \geqslant p$, $u(n) = -a_{p-1}u(n-1) - \dots - a_0 u(n-p)$.

Donc φ est bijective et donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de F sur } \mathbb{C}^p .}$

$\diamond$ On a donc $\dim \mathrm{F} = \dim \mathbb{C}^p$ soit $\boxed{\dim \mathrm{F} = p .}$

12. a) $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \dots - a_i e_i(i) - \dots - a_0 e_i(0)$ donc $\boxed{e_i(p) = -a_i .}$

b) Notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$. On a $e_i = \varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ donc la famille $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Ainsi

$$\boxed{(e_0, \dots, e_{p-1}) \text{ est une base de F .}}$$

c) Soit v la suite $v = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\, e_i$. Alors $v \in \mathrm{F}$ et $v(k) = u(k)$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ donc $v = u$, c'est-à-dire $\boxed{\forall u \in \mathrm{F},\ u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)\, e_i .}$

13. $\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$ est évident.

La relation de récurrence linéaire de l'énoncé étant vraie pour tout n elle l'est aussi pour $n+1$ donc est aussi vérifiée par $f(u)$ lorsque $u \in \mathrm{F}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{F est stable par } f .}$

14. Pour $u \in \mathrm{F}$, $f(u) \in \mathrm{F}$ donc **12.c** donne

$$f(u) = \sum_{k=0}^{p-1} f(u)(k)\, e_k = \sum_{k=0}^{p-1} u(k+1)\, e_k = \sum_{k=0}^{p-2} u(k+1)\, e_k + u(p)\, e_{p-1} = u(1)\, e_0 + \sum_{k=1}^{p-1} u(k)\, e_{k-1} + u(p)\, e_{p-1} .$$

En particulier, $f(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} - a_i\, e_{p-1} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ -a_0\, e_{p-1} & \text{si } i = 0 \end{cases}$ donc

$$\boxed{\operatorname{Mat}\left(f, (e_0, \dots, e_{p-1})\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{C_P} .}$$

15. a) D'après **4.d.**, une base de vecteurs propres pour ${}^t\mathrm{C_P}$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right\}$ donc une base de vecteurs propres pour g est $(v_0, \dots, v_{p-1})$ avec $v_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k\, e_k$. Mais la suite $w_i : n \mapsto \lambda_i^n$ appartient à F d'après **10.** et s'écrit $w_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k\, e_k$ d'après **12.**. Donc $v_i = w_i$ et $\boxed{\text{une base de vecteurs propres pour } g \text{ est } (v_0, \dots, v_{p-1}) \text{ avec } \forall n,\ v_i(n) = \lambda_i^n .}$

b) Donc $\forall u \in \mathrm{F},\ \exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p,\ u = \sum_{i=0}^{p-1} k_i\, v_i$ soit

$$\boxed{\exists (k_0,\dots,k_{p-1})\in\mathbb{C}^p,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u(n)=\sum_{i=0}^{p-1} k_i\,\lambda_i^n\ .}$$

Rem : *« comment faire simple quand on peut faire compliqué » !*

En effet, si P a p racines distinctes λ_i, les suites $n\mapsto\lambda_i^n$ sont dans F d'après la question **10** ; elles sont linéairement indépendantes par Vandermonde, et comme F est de dimension p, elles forment une base de F et c'est fini.

En fait, l'utilisation de cet endomorphisme f et de la matrice C_p n'ont justement de véritable intérêt que lorsqu'on ne peut pas conclure directement ainsi !

16. Ici, $P = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc=(X-a)(X-b)(X-c)$ avec a,b,c distincts donc **15.** donne :

$$\boxed{\text{une base de } F \text{ est } \left((a^n)_{n\in\mathbb{N}},(b^n)_{n\in\mathbb{N}},(c^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\ .}$$

Rem : *encore une question sans aucun intérêt !*

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U-V)=1$

17. $\boxed{\text{Non ! (si } n\geqslant 2)}$ car $\mathrm{rg}(C_A)\geqslant n-1$ donc si $\mathrm{rg}(A)<n-1$ alors A ne saurait être semblable à C_A (si $n=1$, $A=C_A$).

On peut aussi, selon **4.c.**, prendre A diagonalisable mais avec une valeur propre au moins double.

18. Si on a $(**)$ alors $U-V=P^{-1}(C_U-C_V)P$. Or, les $(n-1)$ premières colonnes de C_U-C_V sont nulles donc $\mathrm{rg}(C_U-C_V)\leqslant 1$ et si on avait $\mathrm{rg}(C_U-C_V)=0$ alors $C_U-C_V=0$ donc $U-V=0$ ce qui est exclu (U et V distinctes) donc $\mathrm{rg}(C_U-C_V)=1$. Donc $\mathrm{rg}(U-V)=1$. On a donc montré que $\boxed{(**)\Longrightarrow(*)\ .}$

19. $\boxed{U=I_2,\quad V=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{vérifient (*) mais pas (**)}}$:

On a bien $\mathrm{rg}(U-V)=1$ et, d'autre part $\chi_U=\chi_V$ donc $C_U=C_V$ et, si on avait (**), on aurait $U=V$ ce qui n'est pas.

20. $\mathrm{rg}(u-v)=\mathrm{rg}(U-V)=1$ et le théorème du rang donne $\dim\big(\mathrm{Ker}(u-v)\big)=n-1$: $\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E\ .}$

21. a) Si on avait $F\subset H$ alors $\forall x\in F$, $(u-v)(x)=0$ donc $\forall x\in F$, $u(x)=v(x)$ c'est-à-dire que $u_F=v_F$. On a donc $\chi_{u_F}=\chi_{v_F}$. Posons $P=\chi_{u_F}=\chi_{v_F}$, on a $\deg P=\dim F\geqslant 1$ et P divise χu et χv ce qui contredit le fait que χ_u et χ_v sont premiers entre eux. Donc $\boxed{F\not\subset H\ .}$

b) ⋄ On a donc $F\neq F\cap H$ donc $\dim F>\dim(F\cap H)$ et donc $\dim(F+H)=\dim H+\dim F-\dim(F\cap H)>\dim H=n-1$ donc $\dim(F+H)=n$ et $\boxed{F+H=E\ .}$

⋄ Notons $p=\dim F$. Soit $\mathscr{B}_F=(u_1,\dots,u_p)$ une base de F, $\mathscr{B}_H=(v_1,\dots,v_{n-1})$ une base de H. Tout élément de E s'écrit $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j v_j$ donc $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_{n-1})$ est génératrice de E et $(u_1,\dots,u_p)$ est libre donc le théorème de la base incomplète montre que

$$\boxed{\text{on peut compléter } \mathscr{B}_F \text{ par des vecteurs de } H \text{ en une base } \mathscr{B}' \text{ de } E\ .}$$

⋄ On a donc $\mathscr{B}'=(u_1,\dots,u_p,u_{p+1},\dots,u_n)$ avec $u_k\in H$ pour $k\geqslant p+1$. Or, si $x\in H$, $u(x)=v(x)$ et F est stable par u et par v donc on a

$$\mathrm{Mat}\,(u,\mathscr{B}')=\begin{bmatrix}A_1&B\\O&C\end{bmatrix}\qquad \mathrm{Mat}\,(v,\mathscr{B}')=\begin{bmatrix}A_2&B\\O&C\end{bmatrix}\qquad \text{avec } A_i\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})\,.$$

Donc $\chi_C\mid\chi_U$, $\chi_C\mid\chi_V$ et $\deg(\chi_C)=n-p\geqslant 1$ puisque $F\neq E$, ce qui contredit le fait que χ_u et χ_v sont premiers entre eux. Donc $\boxed{F=E\ .}$

c) $\{0\}$ et E sont stables par u et par v et on vient de montrer que si F est stable par u et par v et $\mathrm{F} \neq \{0\}$ alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. Donc $\boxed{\text{les seuls sous-espaces stables par } u \text{ et par } v \text{ sont } \mathrm{E} \text{ et } \{0\}}$.

22. a) Par définition, $\mathrm{G}_j = (u^j)^{-1}(\mathrm{H})$ et $\mathrm{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et donc $u^j \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ donc $\dim \mathrm{G}_j = \dim \mathrm{H}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N},\ \mathrm{G}_j \text{ est un hyperplan de } \mathrm{E}}$.

b) On a donc $\mathrm{G}_j = \operatorname{Ker} \varphi_j$ où φ_j est une forme linéaire non nulle sur E.

On a alors $\dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j\right) = \dim\left(\bigcap_{j=0}^{n-2} \operatorname{Ker} \varphi_j\right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-2}) \geqslant n - (n-1) = 1$. Donc $\boxed{\bigcap_{j=0}^{n-2} \mathrm{G}_j \neq \{0\}}$.

c) Supposons le résultat faux, i.e $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ liée, et considérons comme le suggère l'énoncé, $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}\{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y))$ est libre (p est bien défini car $\{k \geqslant 1 \text{ tq } (y, u(y), \ldots, u^{k-1}(y)) \text{ est libre}\}$ est non vide car (y) est libre, et majoré par $n-1$).

Par définition de p, $(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y))$ est libre et $(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y), u^p(y))$ est liée donc $\exists (\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(y)$. Ceci montre que $u^p(y) \in \mathrm{F}$ et donc $u(\mathrm{F}) = \operatorname{Vect}\{u(y), u^2(y), \ldots, u^p(y)\} \subset \mathrm{F}$.

D'autre part, $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $y \in \mathrm{G}_k$ donc $u^k(y) \in \mathrm{H}$ et et donc $v(u^k(y)) = u(u^k(y))$ donc, puisque $p - 1 \leqslant n-2$, $v(\mathrm{F}) = \operatorname{Vect}\{u(y), u^2(y), \ldots, u^p(y)\} = u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. On a donc F stable par u et par v avec $1 \leqslant \dim \mathrm{F} \leqslant n-1$ ce qui impossible d'après **21.**. Donc $\boxed{\mathscr{B}'' \text{ est une base de } \mathrm{E}}$.

d) On a $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ donc $\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}'') = \mathrm{C}_\mathrm{P}$ où $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - \sum_{k=0}^{n-1} e_k^*(u(e_{n-1}))\,\mathrm{X}^k$. Mais alors, d'après **2.**, $\mathrm{P} = (-1)^n \chi_u$ donc $\mathrm{C}_\mathrm{P} = \mathrm{C}_\mathrm{U}$. D'autre part, comme vu au **(c)**, $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $v(e_k) = u(e_k) = e_{k+1}$ donc $\operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}'')$ est aussi une matrice compagnon et, de même que ci-dessus, c'est C_V.

On a donc $\boxed{\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}'') = \mathrm{C}_\mathrm{U} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}'') = \mathrm{C}_\mathrm{V}}$.

e) En notant P la matrice de passage de $\mathscr{B}''$ à $\mathscr{B}$, on a donc $\mathrm{U} = \mathrm{P}^{-1} \mathrm{C}_\mathrm{U} \mathrm{P}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P}^{-1} \mathrm{C}_\mathrm{V} \mathrm{P}$. On peut donc conclure que : $\boxed{\forall (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \Big((*) \text{ et } \chi_u, \chi_v \text{ premiers entre eux}\Big) \Longrightarrow (**)}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆