# DM N°5 ( pour le 30/11/2012)

## Notations et objectifs.

Dans tout ce problème, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension fine $n$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels.
$\mathcal{L}(\mathrm{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.
On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.
Pour tout endomorphisme $f$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de $f$.
L'ensemble des valeurs propres de $f$ sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ donné par $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \mathrm{X}^k$, on définit $\mathrm{P}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{k fois}}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent $q$ endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.
Pour tout entier $p$ non nul, $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à $p$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
$\mathrm{I}_p$ est la matrice identité de $\mathbb{M}_p(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme $f$ et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

## Partie I

**A)** On désigne par $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $f$ est diagonalisable.

2) Déterminer une base $(v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $f$ et donner la matrice D de $f$ dans cette nouvelle base.

3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $(v_1, v_2, v_3)$. Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer $\mathrm{A}^m$ en fonction de D, P et $\mathrm{P}^{-1}$.

4) Calculer $\mathrm{P}^{-1}$, puis déterminer la base de $f^m$ dans la base canonique.

5) Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

6) Montrer que si $\mathrm{H} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{H}^2 = \mathrm{D}$, alors H et D commutent.

7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes $h$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

**B)** Soient $f$ et $j$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $J^m$ pour tout entier $m \geqslant 1$.

2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$ ?

3) Montrer que $f$ admet deux valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple $(p, q)$ d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes $p$ et $q$ sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé $p^2$, $q^2$, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes $h$, combinaisons linéaires de $p$ et $q$ qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que $f$ est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de $f$. Ecrire la matrice D de $f$, puis la matrice de $p$ et de $q$ dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme $h$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de $p$ et $q$.

9) Montrer que tous les endomorphismes $h$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

## Partie II

Soit $f$ un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls $p$ et $q$ de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \mathrm{id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda \mathrm{id}) \circ (f - \mu \mathrm{id})$. En déduire que $f$ est diagonalisable.

2) Montrer que $\lambda$ et $\mu$ sont valeurs propres de $f$ et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que $f$ est un isomorphisme et écrire $f^{-1}$ comme combinaison linéaire de $p$ et $q$.

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ :

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q.$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $p$ et $q$. Déterminer la dimension de F.

7) On suppose dans la suite de cette partie que $\lambda$ et $\mu$ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F}$.

8) Soit $k$ un entier supérieur ou égal à $2$. Déterminer une matrice K de $\mathbb{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $\mathrm{K}^2 = \mathrm{I}_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda$ est supérieur ou égal à $2$, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \setminus \mathrm{F}$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(\mathrm{E}) \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

## Partie III

Soient $p_1, \ldots, p_m$, $m$ endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m$ nombres réels distincts. Soit $f$ un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ :

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.$$

1) Montrer que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a :

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_i) p_i.$$

2) En déduire que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$, puis que $f$ est diagonalisable.

3) Pour tout entier $\ell$ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme :

$$\mathrm{L}_\ell(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ i \neq \ell}} \frac{(\mathrm{X} - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$

Montrer que pour tout entier $\ell$, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = \mathrm{L}_\ell(f)$.
En déduire que $\mathrm{Im}(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_\ell \mathrm{id})$, puis que le spectre de $f$ est :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers $(i, j)$ tels que $1 \leqslant i, j \leqslant m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les $p_i$.

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ engendré par $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F}$ dans le cas où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.
   a) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de $f$.
   b) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de $f$ est également vecteur propre de $h$.

c) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset \mathrm{F}$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les $\lambda_i$ pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les $\lambda_i$ sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset \mathrm{F}$.

## Partie IV

**A)** Soit $f$ un endomorphisme non nul de $\mathrm{E}$ tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \mathrm{O}(x^n)$ au voisinage de $0$. Dans la suite,

$\mathrm{P}_n$ désigne le polynôme défini par $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction $\eta$ bornée au voisinage de $0$ telle que l'on ait $\mathrm{P}_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que $\mathrm{X}^n$ divise $\mathrm{P}_n^2 - \mathrm{X} - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$.

Plus généralement, montrer que pour tout réel $\alpha$ réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout $\beta$ réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \mathrm{id}) \neq \emptyset$.

**B)**

1) Soit $\mathrm{T} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel $\lambda$.
Montrer que $(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que $f$ est un endomorphisme de $\mathrm{E}$ dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre $\lambda$. Déduire de la question précédente que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆