DM N^{o}2 (pour le 30/09/2008)

Racine carrée d'un endomorphisme

NOTATIONS :

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $L(V)$.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \quad ; \quad f^{k+1} = f^k \circ f$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbb{R}[X] \quad ; \quad E_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet et du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

Les troisième et quatrième parties sont réservées aux 5/2 !

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés :

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1°) Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k, k = 0, 1, 2, ...$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboîtée croissante :

$$\mathrm{Ker} f^0 \subset \mathrm{Ker} f^1 \subset \mathrm{Ker} f^2 \subset ... \subset \mathrm{Ker} f^k \subset \mathrm{Ker} f^{k+1} \subset ...$$

2°) Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux ($\mathrm{Ker} f^p = \mathrm{Ker} f^{p+1}$), pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux ($\mathrm{Ker} f^q = \mathrm{Ker} f^{q+1}$) ; en déduire la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } p, \quad \mathrm{Ker} f^k = \mathrm{Ker} f^p.$$

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n ($p \leqslant n$). En particulier les noyaux $\mathrm{Ker} f^n$, $\mathrm{Ker} f^{n+1}$ sont égaux.

3°) Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 ($q \geqslant 1$), pour lequel l'endomorphisme u^q est nul ($u^q = 0$), l'endomorphisme u^n est nul ($u^n = 0$).

L'endomorphisme u est dit *nilpotent*.

PREMIÈRE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

1°) Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :

Soit λ un réel donné.

a) Étant donné un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n ($0 \leqslant p \leqslant n$). Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$$

l'endomorphisme g commute avec D_n :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbb{R}_p[X]$ est égal à Ker $(D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p.$$

b) Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à E_n, il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

c) Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D\,.$$

i) Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii) Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

2˚) Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$:

a) À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$ tel que
$$g^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 \ ?$$

b) Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

· Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que :
$$g^2 = \lambda Id_E + D\,.$$

· Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que :
$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n\,.$$

3˚) Une représentation matricielle simple de D_n :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.

Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients a_{ij}, $i = 0, 1, ...n$, $j = 0, 1, ...n$, sont définis par les relations :
$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :
$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0\,.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = (f^n(y), f^{n-1}(y), ..., y)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b) En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

4˚) Un exemple :

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a) Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = aId_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2 \ .$$

a, b, c sont trois réels.

b) En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2 \, .$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

1°) Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$:

a) Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme g^2 a une dimension au moins égale à 2 ($\dim \operatorname{Ker} g^2 \geqslant 2$).

b) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

2°) Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$:

Soit m un entier supérieur ou égal à 1 ($m \geqslant 1$) et k un entier supérieur ou égal à 2 ($k \geqslant 2$). Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m \, .$$

a) Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b) Démontrer que les sous-espaces vectoriels de E, $\operatorname{Ker} g^p$ ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à l'entier k ($0 \leqslant q \leqslant k$).

c) Soit p un entier supérieur au égal à 2 et inférieur ou égal à k ($2 \leqslant p \leqslant k$). Soit Φ l'application définie dans l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} g^p$ par la relation :

$$\Phi \,:\, P \longrightarrow g\,(P)\,.$$

Démontrer que cette application Φ est une application linéaire de $\operatorname{Ker} g^p$ dans l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} g^{p-1}$. Quel est le noyau de l'application Φ ? Démontrer que l'application Φ est surjective ($\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker} g^{p-1}$).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} g^p$ et $\operatorname{Ker} g^{p-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} g^p$ en fonction de la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} g$?

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel λ supposé strictement positif ($\lambda > 0$), soit L_n l'application de $\mathbb{R}$ dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$, $M_{n+1}(\mathbb{R})$ qui, au réel t, associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k .$$

La matrice $(D_n)^k$ est le produit k-fois avec elle-même de la matrice D_n.

1°) Dérivée de l'application $t \longmapsto (L_n(t))^k$:

a) Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + tD_n$ est inversible et que son inverse, noté $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\ (D_n)^k .$$

Déterminer les fonctions $a_k : t \longmapsto a_k(t)$ (bien sûr :$(D_n)^0 = I_{n+1}$).

b) Démontrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre $n+1$: $t \longmapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$et D_n.

c) Démontrer que, pour tout réel t, la matrice $L_n(t)$, élevée à la puissance $n+1$ est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1} = 0.$$

d) Calculer la fonction dérivée $t \longmapsto \dfrac{d}{dt} L_n(t)$ de la fonction $t \longmapsto L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.

Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \longmapsto \dfrac{d}{dt} (L_n(t))^k$ de la fonction $t \longmapsto (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.

2°) Matrice $\varphi_u(t)$:
étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} (L_n(t))^k .$$

La matrice $(L_n(t))^k$ est la matrice $L_n(t)$ élevée à la puissance k.

a) Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à la matrice $\varphi_{u+v}(t)$:

$$\varphi_u(t) \cdot \varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t)$$

b) Démontrer que la fonction $t \longmapsto \varphi_u(t)$ est dérivable et que sa dérivée φ'_u est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi'_u(t) = u\left(I_{n+1} + tD_n\right)^{-1}.D_n.\varphi_u(t)$$

c) Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle : pour tout réel t , $\varphi''_1(t) = 0$. En déduire la relation :

$$\varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n.$$

3°) Existence de l'endomorphisme g :

a) Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$) ; en utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda\left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda}D_n\right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ telle que

$$M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

b) Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

QUATRIÈME PARTIE

1°) Un développement en série entière :

a) Soit h la fonction définie sur la demi-droite $[-1, +\infty[$ par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1+x}.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b) En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R, R[$ dans lequel la fonction h est la somme d'une série entière de terme général $b_p x^p$, $p = 0, 1, 2, ...$ Déterminer le rayon de convergence R et les coefficients b_p.

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à }]-R, R[\,,\ h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p.$$

c) Déterminer les valeurs des réels $c_n, n = 0, 1, 2, ...$définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p}.$$

2°) Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda Id_E + D$ où λ est strictement positif :

Soit λ un réel strictement positif donné ($\lambda > 0$).

a) Soit T l'application définie dans $E = \mathbb{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, \quad T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b) Calculer pour tout polynôme P de E son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.

c) En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

d) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n, de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n.
Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

FIN DU PROBLÈME