CORRIGÉ DU DS n°2

Première partie:

1°) **a)** C'est facile si on connaît la définition :

• $I(u) \neq \emptyset$ car le polynôme nul appartient à $I(u)$;

• Si P et Q appartiennent à $I(u)$, $P(u) = Q(u) = 0$ d'où $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0$ donc $P + Q \in I(u)$.

• Soit deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l X^l$ (les suites (a_k) et (b_l) sont nulles à partir d'un certain rang). Alors $PQ = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$ où $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$. D'autre part, $P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ et $Q = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l u^l$, donc, $\mathcal{L}(E)$ étant un anneau, on a :

$Q(u)\mathbf{o}P(u) = P(u)\mathbf{o}Q(u) = \sum_{k,l} a_k b_l u^{k+l} = \sum_n \sum_{k+l=n} a_k b_l u^n = \sum_n c_n u^n = (PQ)(u)$.

On en déduit immédiatement que, si $P(u) = 0$, c'est-à-dire si $P \in I(u)$, alors, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, $(QP)(u) = 0$, c'est-à-dire $QP \in I(u)$.

En conclusion, $I(u)$ est bien un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

b) La famille $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ possède $n^2 + 1$ éléments dans $\mathcal{L}(E)$ de dimension n^2, donc est liée : il existe des scalaires $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i u^i = 0$. Le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$ est donc un élément non nul de $I(u)$.

c) C'est directement un théorème du cours : $\mathbb{C}[X]$ est un anneau principal, donc $I(u)$, non réduit à $\{0\}$, est engendré par un polynôme normalisé et un seul.

d) • Si u est un projecteur, $u^2 = u$ donc le polynôme $X^2 - X$ appartient à $I(u)$. Π_u est donc un diviseur de $X^2 - X$, et on a trois cas possibles :

◇ Si $u = 0$, $\Pi_u = X$.
◇ Si $u = \mathrm{Id}_E$, $\Pi_u = X - 1$.
◇ Sinon, $\Pi_u = X^2 - X$.

• Si u est une symétrie, $u^2 = \mathrm{Id}_E$ donc le polynôme $X^2 - 1$ appartient à $I(u)$. Π_u est donc un diviseur de $X^2 - 1$, et on a trois cas possibles :

◇ Si $u = \mathrm{Id}_E$, $\Pi_u = X - 1$.
◇ Si $u = -\mathrm{Id}_E$, $\Pi_u = X + 1$.
◇ Sinon, $\Pi_u = X^2 - 1$.

e) • Déjà, si $\deg(\Pi_u) = 1$, on a $\Pi_u = X - \lambda$, d'où $u - \lambda \mathrm{Id}_E = 0$!

• Sinon, Π_u s'écrit : $\Pi_u = (X - \lambda)Q$, où Q est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de Π_u et supérieur ou égal à 1. On aura donc : $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\mathbf{o}Q(u) = 0$. Si, par l'absurde, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ était injectif, il serait bijectif (on a supposé E de dimension finie), et, en composant l'égalité précédente avec $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{-1}$, on aurait $Q(u) = 0$, soit $Q \in I(u)$; or Q divise strictement Π_u, et n'est pas constant, cela est donc impossible.

f) i. Il suffit de considérer une racine λ de Π_u (il en existe dans $\mathbb{C}$!), et un vecteur x non nul de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (c'est possible d'après la question précédente).

ii. Considérer l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}[X]$, qui, à tout polynôme P, associe le polynôme XP...
$XP = \lambda P$ n'est possible que si $P = 0$...

iii. Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est non nul, on vérifie aisément que le système $AX = \lambda X$ conduit à $\lambda^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

g) Supposons $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ non injectif. Il existe alors x non nul appartenant à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$, c'est-à-dire tel que $u(x) = \lambda x$. Il est facile de vérifier par récurrence que l'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$. Si $\Pi_u = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $\Pi_u(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k$ d'où $\Pi_u(u)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \big(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\big) x = \Pi_u(\lambda) x$. Puisque $\Pi_u(u) = 0$ et $x \neq 0$, on en déduit$\Pi_u(\lambda) = 0$, c'est-à-dire λ racine de Π_u.

2°) FAIT EN CLASSE, à savoir refaire...

3°) **a)** • Démontrons d'abord l'indication de l'énoncé : soit $x \in \mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$, alors $v(x) = \lambda x$ d'où $u_i[v(x)] = \lambda u_i(x)$ soit $v[u_i(x)] = \lambda u_i(x)$ donc $u_i(x) \in \mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par u_i.
• Choisissons alors $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de Π_v. Dans ce cas, d'après la question I.1.e, $\mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et est stable par les u_i, donc est égal à E. Mais $\mathrm{Ker}(v - \lambda \mathrm{Id}_E) = E$ signifie justement $v = \lambda \mathrm{Id}_E$.

b) • D'après le cours, il est toujours possible de définir un endomorphisme par l'image d'une base, donc les définitions de u_1 et u_2 ont bien un sens (en effet (x_1,x_3) et (x_2,x_3) sont bien des bases de $\mathbb{C}^2$ par hypothèse).
• D'après I.2, puisque les matrices de u_1 dans la base (x_1,x_3) et de u_2 dans la base (x_2,x_3) sont diagonales à éléments diagonaux distincts, on en deduit que, si v commute avec u_1 et u_2, alors les matrices de v dans ces deux bases sont toutes deux diagonales. Il existe donc $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $v(x_i) = \lambda_i x_i$ pur $i = 1,2,3$. Or, il existe α,β non nuls tels que $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$, d'où $v(x_1) = \alpha\lambda_2 x_2 + \beta\lambda_3 x_3 = \lambda_1(\alpha x_2 + \beta x_3)$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, donc v est une homothétie.
• Facilement, les sous-espaces vectoriels stables par u_1 sont $\{0\}$,$\mathbb{C}^2$ et les droites vectorielles engendrées par x_1 et x_3, et ceux stables par u_2 sont $\{0\}$,$\mathbb{C}^2$ et les droites vectorielles engendrées par x_2 et x_3. Par conséquent, les sous-espaces vectoriels stables par u_1 et u_2 sont $\{0\}$,$\mathbb{C}^2$ et la droite vectorielle engendrée par x_3.

c) On a bien montré ici que : tout endomorphisme qui commute avec u_1 et u_2 est une homothétie; cependant, il existe des sous-espaces vectoriels stables par u_1 et u_2 autres que $\{0\}$ et $\mathbb{C}^2$, donc la réciproque de l'implication du I.3.a est fausse.

Seconde partie:

1°) On trouve $w_0 \mathbf{o} v_0 - q^{-2} v_0 \mathbf{o} w_0 = 0$, en calculant les images des e_p.

2°) • Posons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $E_k = \text{Vect}(\{e_k,e_{k+1},\ldots,e_n\})$ et $E_{n+1} = \{0\}$. On a facilement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $w_0(E_k) = E_k$ et $v_0(E_k) = E_{k+1} \subset E_k$, donc les E_k sont stables par w_0 et v_0.
• Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par v_0, de dimension p, alors l'endomorphisme induit par v_0 sur F est nilpotent (car v_0 l'est); on aura donc $v_0^p = 0$ sur F, donc $F \subset \text{Ker}(v_0^p) = E_{n-p+1}$. Par égalité des dimensions, on conclut que $F = E_{n-p+1}$. Les sous-espaces vectoriels stables par v_0 sont donc les E_k pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$, et ils sont évidemment stables aussi par w_0.

3°) On trouve $w_0 \mathbf{o} u_0 - q^2 u_0 \mathbf{o} w0 = 0$, en calculant les images des e_p.

4°) Là encore, il suffit de vérifier l'égalité pour les images de e_p...

5°) Les sous-espaces vectoriels de E stables par u_0,v_0 et w_0 sont, parmi les sous-espaces vectoriels E_k trouvés en II.2, ceux qui sont également stables par u_0. Il est facile de voir que seuls $E_1 = E$ et $E_{n+1} = \{0\}$ conviennent.

Troisième partie:

1°) Si $x \in W_\lambda$, alors $w(x) = \lambda x$ d'où $w[u(x)] = q^2 u[w(x)] = q^2 \lambda u(x)$ donc $u(x) \in W_{q^2\lambda}$. Ainsi $u(W_\lambda) \subset W_{q^2\lambda}$, et de même pour la seconde inclusion.

2°) **a)** Démontrons le résultat demandé par récurrence sur p.

◇ le résultat est immédiat pour $p = 1$.

◇ supposons-le démontré à l'ordre $p-1$, et soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ des complexes deux à deux distincts. Si $x_1 + \cdots + x_p = 0$ (*)avec $x_i \in U_{\lambda_i}$, alors, en appliquant u :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. En retranchant à cette égalité p fois (*), on obtient
$\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$, d'où $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$ d'après l'hypothèse de récurrence, puis $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_p$, et enfin $x_p = 0$ d'après (*). Cela démontre le résultat à l'ordre p, et achève la récurrence.

b) Si U_λ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$; w étant bijective, la dimension du sous-espace vectoriel $w(U_\lambda)$ est égale à celle de U_λ, donc, d'après les inclusions précédentes, $U_{q^{-2}\lambda}$ n'est pas non plus réduit à $\{0\}$. Si λ était non nul, on aurait donc une infinité (*car on ne peut avoir $q^m = 1$ pour aucun $m \neq 0$ d'après l'énpncé !*) de sous-espaces vectoriels U_{λ_i}, de dimension $\geqslant 1$ et en somme directe, alors que E est de dimension finie : c'est impossible! Donc $U_\lambda \neq \{0\}$ implique $\lambda = 0$, d'où le résultat par contraposition.

3°) Ainsi, si $\lambda \neq 0$, $u - \lambda\text{Id}_E$ est injectif; d'après I.1, la seule racine de Π_u dans $\mathbb{C}$ est donc 0, donc $\Pi_u = X^r$ pour un certain entier r. $r > 1$ puisque u n'est pas nul. Puisque $\Pi_u(u) = 0$ par définition, il en résulte que <u>u est nilpotent</u>.

4°) D'après III.1, w laisse stable $U_0 = \text{Ker}u$. Il suffit donc d'appliquer le résultat de la question I.1.f à l'endomorphisme induit par w sur $\text{Ker}u$.

5°) **a)** On prend λ comme dans la question précédente et $e'_1 \in W_\lambda \cap \text{Ker}u$.

b) $u^2 = 0$ donc $\text{Im}u \subset \text{Ker}u$, et, u n'étant pas nul, $\dim \text{Ker}u = 1$ puis $\text{Ker}u = \text{Im}u = \text{Vect}(e'_1)$. Donc $u(e'_2)$, qui appartient à $\text{Im}u$, est colinéaire à e'_1, et est non nul car sinon e'_2 serait dans $\text{Ker}u$ donc colinéaire à e'_1 !

c) (e_1,e'_2) est une base de E, donc il existe des complexes β,γ tels que : $w(e'_2) = \beta e_1 + \gamma e'_2$. On a alors $u[w(e'_2)] = \gamma u(e'_2) = \gamma e_1$ d'où $w[u(e'2)] = q^2\gamma e_1 = w(e_1) = \lambda e_1$ ce qui donne $\gamma = q^{-2}\lambda$, ce qui est le résultat demandé.

d) $\alpha = \dfrac{\beta q^2}{\lambda(1-q^2)}$ convient (en effet, $q^2 \neq 1$ d'après l'énoncé, et λ ne peut être nul puisque w est bijective).

Quatrième partie:

1°) Vérification facile par récurrence sur m, en écrivant que $u\mathbf{o}v^{m+1} - v^{m+1}\mathbf{o}u = (u\mathbf{o}v^m - v^m\mathbf{o}u)\mathbf{o}v + v^m\mathbf{o}(u\mathbf{o}v - v\mathbf{o}u)$, et en utilisant aussi la relation $w^{-1}\mathbf{o}v = q^2 v\mathbf{o}w^{-1}$, obtenue à partir de iii) en composant à droite et à gauche par w^{-1}.

2°) u est non nul, sinon $w - w^{-1}$ serait nul d'après iv), ce qui contredirait i). On peut donc appliquer les résultats de la partie III, et il suffit de choisir ν_1 non nul dans $W_\lambda \cap \mathrm{Ker} u$, où λ est comme dans III.4.

3°) Par une récurrence facile, à l'aide de iii), on a : $w(\nu_m) = \lambda q^{2-2m}\nu_m$.

4°) Découle de la relation précédente et de celle trouvée en IV.1.

5°) **a)** On a $w(\nu_m) = \lambda_m \nu_m$ avec $\lambda_m = q^{2-2m}$. Les ν_m appartiennent donc aux sous-espaces vectoriels W_{λ_m} qui sont en somme directe d'après II.2.a (puisque les λ_m sont distincts). Le résultat demandé en découle.

b) E étant de dimension finie, il existe m_0 maximal tel que la famille $(\nu_1,\ldots,\nu_{m_0})$ soit libre, et l'on a $m_0 \geqslant 1$ puisque $\nu_1 \neq 0$. D'après ce choix, ν_{m_0+1} est combinaison linéaire de $(\nu_1,\ldots,\nu_{m_0})$, il est donc forcément nul d'après la question précédente. Les vecteurs ν_m pour $m \geqslant m_0+1$ le sont aussi, puisque ce sont des images itérées de ν_{m_0+1} par v.

c) $\mathrm{Vect}(\{\nu_1,\ldots,\nu_{m_0}\})$ est non nul, et stable par w d'après IV.3 et par u d'après IV.4. Il est aussi stable par v par construction des $\nu_k$et parce que $v(\nu_{m_0}) = 0$. D'après l'hypothèse v), ce sous-espace vectoriel est égal à E, d'où en particulier $m_0 = n$.

d) On a $u(\nu_{n+1}) = u(\nu_{m_0+1}) = 0 = (q-q^{-1})^{-2}(q^n - q^{-n})(q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1})\nu_n$, d'où $(q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1}) = 0$ (les autres facteurs ne peuvent pas être nuls). Cela donne l'égalité voulue.

6°) • Pour $\lambda = q^{n-1}$, on retrouve le triplet (w_0,u_0,v_0) de la deuxième partie, avec la base $(e_1,\ldots,e_n)$ égale à $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$.
• Pour $\lambda = -q^{n-1}$, on obtient le triplet $(-w_0,-u_0,-v_0)$ où w_0,v_0,u_0 sont définis comme dans la deuxième partie, avec la base $(e_1,\ldots,e_n)$ égale à $(\nu_1,-\nu_2,\nu_3,\ldots,(-1)^{n-1}\nu_n)$.

---

* * *
* *
*