CORRIGÉ : PSEUDO-INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE (extrait de ICARE 1997)

1. Il s'agit ici de *questions de cours*, mais j'en refais quand même la démonstration.

a) — Si $y \in \mathrm{Im(AB)}$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = \Phi_A \circ \Phi_B(x)$ donc $y = \Phi_A[\Phi_B(x)] \in \mathrm{Im\,A}$, d'où l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im(AB)} \subset \mathrm{Im\,A}.}$

— Si $x \in \mathrm{Ker\,B}$ alors $\Phi_B(x) = 0$ d'où $\Phi_A \circ \Phi_B(x) = \Phi_A(0) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker(AB)}$. On a donc bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{Ker\,B} \subset \mathrm{Ker(AB)}.}$

b) La démonstration qui suit diffère un peu de celle vue en cours :

— Puisque $\mathrm{Im(AB)} \subset \mathrm{Im\,A}$, on a $\dim \mathrm{Im(AB)} \leqslant \dim \mathrm{Im\,A}$ soit $\mathrm{rg(AB)} \leqslant \mathrm{rg\,A}$.

— Puisque $\mathrm{Ker\,B} \subset \mathrm{Ker(AB)}$, on a $\dim \mathrm{Ker(B)} \leqslant \dim \mathrm{Ker(AB)}$ donc, en utilisant le théorème du rang, $n - \mathrm{rg\,B} \leqslant n - \mathrm{rg(AB)}$ d'où $\mathrm{rg(AB)} \leqslant \mathrm{rg\,B}$.

On a donc bien $\boxed{\mathrm{rg(AB)} \leqslant \min(\mathrm{rg\,A}, \mathrm{rg\,B}).}$

2. On vérifie aisément que $\mathrm{A} = \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^3$; de l'équation $\mathrm{AAA} = \mathrm{A}$ on déduit que $\boxed{\mathrm{A} \text{ est un inverse faible de } \mathrm{A}.}$

De plus, A commutant avec lui-même, $\boxed{\mathrm{A} \text{ est un pseudo-inverse de } \mathrm{A}.}$

Posons $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le calcul montre que $\mathrm{AMA} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{MAM} = \mathrm{M}$. En revanche, $\mathrm{A} = \mathrm{MA} \neq \mathrm{AM} = \mathrm{M}$ donc $\boxed{\mathrm{M} \text{ est un inverse faible mais pas un pseudo-inverse de } \mathrm{A}.}$

3. On calcule : Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{AMA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{AMA} = \mathrm{A} \iff b = 1 \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$ puis $\mathrm{MAM} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ad & d \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{MAM} = \mathrm{M} \iff c = ad$.

Les inverses faibles de A sont donc les matrices de la forme $\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ ad & d \end{pmatrix}.}$

Il est facile de vérifier qu'aucune de ces matrices ne commute avec A, donc $\boxed{\mathrm{A} \text{ n'a pas de pseudo-inverse.}}$

4. a) On a $(\mathrm{AM})^2 = \mathrm{AMAM} = (\mathrm{AMA})\mathrm{M} = \mathrm{AM}$ et $(\mathrm{MA})^2 = \mathrm{MAMA} = \mathrm{M}(\mathrm{AMA}) = \mathrm{MA}$, donc $\boxed{\mathrm{AM} \text{ et } \mathrm{MA} \text{ sont des matrices de projection.}}$

b) On applique le résultat de la question préliminaire :
$\mathrm{rg(AM)} \leqslant \mathrm{rg(A)}$ et $\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg((AM)A)} \leqslant \mathrm{rg(AM)}$ donc $\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg(AM)}$.

Puisque AM et MA sont des matrices de projection, on en déduit que

$$\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg(AM)} \underset{\text{trace d'un projecteur}}{=} \mathrm{tr(AM)} \underset{\text{propriété de la trace}}{=} \mathrm{tr(MA)} \underset{\text{trace d'un projecteur}}{=} \mathrm{rg(MA)}.$$

Finalement, $\boxed{\mathrm{rg\,A} = \mathrm{rg(AM)} = \mathrm{rg(MA)} = \mathrm{tr(AM)}.}$

5. On part de la relation $\mathrm{AMA} = \mathrm{A}$; on multiplie à droite par A^{-1} ce qui donne $\mathrm{AM} = \mathrm{I}_n$. On en déduit que M est l'inverse de A : $\mathrm{M} = \mathrm{A}^{-1}$. Cela prouve l'unicité de M. De plus, les relations (1), (2) et (3) sont trivialement vérifiées :

$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \text{ la seule matrice M vérifiant (1) est } \mathrm{A}^{-1} \text{ et c'est un pseudo-inverse de A.}}$

Si on suppose seulement que M vérifie (2) et (3), on ne peut rien conclure a priori : par exemple, si $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, (3) est toujours vérifiée et (2) exprime simplement le fait que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$, c'est-à-dire que M est une matrice de projection. Autre remarque possible : $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{M} = 0$ vérifient toutes deux (2) et (3).

6. On a $\mathrm{AMAM'} = (\mathrm{AMA})\mathrm{M'} = \mathrm{AM'}$. De même, $\mathrm{MAM'A} = \mathrm{M}(\mathrm{AM'A}) = \mathrm{MA}$. Or, A commute avec M et avec M′ d'après (3), donc ces deux matrices sont égales : $\boxed{\mathrm{AM'} = \mathrm{MA}\ (*).}$

On a ensuite : $\mathrm{M} \underset{(2)}{=} \mathrm{MAM} \underset{(3)}{=} \mathrm{MMA} \underset{(*)}{=} \mathrm{MAM'} \underset{(*)}{=} \mathrm{AM'M'} \underset{(3)}{=} \mathrm{M'AM'} \underset{(2)}{=} \mathrm{M'}$

$\boxed{\text{d'où l'on déduit } \mathrm{M} = \mathrm{M'} :}$

Le pseudo inverse, *s'il existe*, est unique. On pourra donc dire *le* pseudo-inverse, et non plus *un* pseudo-inverse.

7. Les résultats suivants sont de simples vérifications :

matrice	A	M	$\lambda\mathrm{A}$	${}^t\mathrm{A}$	A^k	PAP^{-1}
pseudo-inverse	M	A	$\lambda^{-1}\mathrm{M}$	${}^t\mathrm{M}$	M^k	PMP^{-1}

(pour le pseudo-inverse de A^k, on utilise le fait que A et M commutent pour pouvoir écrire, par exemple, $(AM)^k = A^k M^k$).

8. **a)** Conséquence directe du théorème du rang (et des diverses caractérisations de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).

b) Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $p[\Phi_A(v)] = \Phi_A(v)$ puisque les éléments de $\operatorname{Im} A$ sont invariants par p. Donc $\boxed{p \circ \Phi_A = \Phi_A}$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On décompose v dans la somme $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A)$: il existe $k \in \operatorname{Ker}(A)$ et $i \in \operatorname{Im}(A)$ tels que $v = k + i$. Alors $\Phi_A[p(v)] = \Phi_A(i)$ et $\Phi_A(v) = \underbrace{\Phi_A(k)}_{=0} + \Phi_A(i)$ donc $\Phi_A \circ p(v) = \Phi_A(v)$ et $\boxed{\Phi_A \circ p = \Phi_A}$.

c) Remarque préliminaire : d'après le théorème d'isomorphisme, la restriction Ψ_A de Φ_A à $\operatorname{Im} A$, qui est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} A$, induit un automorphisme de $\operatorname{Im} A$.

Soit maintenant $v \in \mathbb{R}^n$. Montrons l'existence et l'unicité de $w \in \operatorname{Im}(A)$ tel que $\Phi_A(w) \in \operatorname{Ker}(A)$.

Existence : on décompose v dans la somme $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A)$: il existe $k \in \operatorname{Ker}(A)$ et $i \in \operatorname{Im}(A)$ tels que $v = k + i$. Puisque Ψ_A est un automorphisme de $\operatorname{Im}(A)$, il existe donc un (unique) vecteur $w \in \operatorname{Im}(A)$ tel que $i = \Psi_A(w) = \Phi_A(w)$. Ainsi, $v - \Phi_A(w) \in \operatorname{Ker}(A)$.

Unicité : on suppose qu'il existe un vecteur $w' \in \operatorname{Im}(A)$ tel que $\Phi_A(w') - v \in \operatorname{Ker}(A)$. Alors $\Phi_A(w - w') = \Phi_A(w) - \Phi_A(w') \in \operatorname{Ker}(A)$
Or $\Phi_A(w - w')$ est également élément de $\operatorname{Im}(A)$, ce qui montre que $\Phi_A(w - w') = 0$. Puisque $w - w'$ est élément de $\operatorname{Im}(A)$, on a donc $w - w' \in \operatorname{Ker}(A) \cap \operatorname{Im}(A)$ et donc $w = w'$.

$\boxed{\text{Pour tout } v \in \mathbb{R}^n\text{, il existe un unique élément } w \text{ de } \operatorname{Im} A \text{ tel que } \Phi_A(w) - v \in \operatorname{Ker} A.}$

d) Si on reprend la construction précédente, on a en fait $i = p(v)$ où p est la projection sur $\operatorname{Im} A$ parallèlement à $\operatorname{Ker} A$, puis $w = \Psi_A^{-1}(i)$. Donc $w = \Psi_A^{-1} \circ p(v) = \varphi(v)$, ce qui montre que φ est linéaire, puisque Ψ_A^{-1} et p le sont.

De plus, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$:

— $\Phi_A \circ \varphi(v) = \Psi_A \circ \Psi_A^{-1} \circ p(v) = p(v)$ et $\varphi \circ \Phi_A(v) = \Psi_A^{-1} \circ p \circ \Phi_A(v) = \Psi_A^{-1} \circ \Phi_A \circ p(v) = p(v)$ donc $\Phi_A \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_A = p \quad (3)$.

— $\Phi_A \circ \varphi \circ \Phi_A = p \circ \Phi_A = \Phi_A \quad (1)$

— $\varphi \circ \Phi_A \circ \varphi(v) = \varphi \circ p(v) = \Psi_A^{-1} \circ p \circ p(v) = \Psi_A^{-1} \circ p(v) = \varphi(v)$ donc $\varphi \circ \Phi_A \circ \varphi = \varphi \quad (2)$.

Les relations ci-dessus prouvent donc que φ est le pseudo-inverse de Φ_A.

9. **a)** De $M = MAM = (AM)M = A(MM)$ on tire, en utilisant le résultat de la question préliminaire : $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Im} A$.

De $A = AMA = (MA)A = M(AA)$ on tire : $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} M$

On a donc bien $\boxed{\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} A.}$

De $M = MAM = MMA$ on tire : $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} M$; de $A = AMA = AAM$ on tire : $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} A$.

On a donc bien $\boxed{\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} A.}$

Soit $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \Phi_A(y)$. De plus, $\Phi_A(x) = 0$. On en déduit que

$$x = \Phi_A(y) \underset{(1)}{=} \Phi_A \circ \Phi_M \circ \Phi_A(y) \underset{(3)}{=} \Phi_M \circ \Phi_A \circ \Phi_A(y) = \Phi_M \circ \Phi_A(x) = 0.$$

On a donc montré que $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$ d'où l'on déduit que $\boxed{\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A.}$

b) Puisque $(AM)^2 = AMAM \underset{(1)}{=} AM$, on sait que AM est la matrice de projection sur $\operatorname{Im}(AM)$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(AM)$.

On sait de plus que $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(MA) \underset{(3)}{=} \operatorname{Ker}(AM)$ et $\operatorname{Ker}(AM) = \operatorname{Ker}(MA) \subset \operatorname{Ker}(AMA) \underset{(1)}{=} \operatorname{Ker}(A)$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker}(AM) = \operatorname{Ker}(A)$.

Enfin, $\operatorname{Im}(AM) \subset \operatorname{Im} A \underset{(1)}{=} \operatorname{Im}(AMA) \subset \operatorname{Im}(AM)$, ce qui prouve que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(AM)$.

Conclusion : $\boxed{\text{AM est la matrice de projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \operatorname{Im} A \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker} A.}$

10. — On remarque que l'on a toujours $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$, d'où facilement : $(ii) \Longleftrightarrow (iv)$.

— On a aussi toujours $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2$ d'où, avec l'aide du théorème du rang, l'équivalence : $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$.

— Les deux questions précédentes prouvent l'équivalence

$$\text{A admet un pseudo-inverse} \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A).$$

Donc $(i) \Longrightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A) \Longrightarrow \operatorname{Im} A = \Phi_A(\mathbb{R}^n) = \Phi_A(\operatorname{Im} A) = \operatorname{Im}(A^2) \quad (ii)$
et , si (iii) est vérifiée, alors, si $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$, $\Phi_A(x) = 0$ et $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tq $x = \Phi_A(y)$ d'où $\Phi_A^2(y) = 0$ d'où $y \in \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$ d'où $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$, et le théorème du rang permet de conclure $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A)$ d'où (i).

— On a ensuite $(v) \Longrightarrow \operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A^2 \Longrightarrow (ii)$.

— Puis $(vi) \Longrightarrow \operatorname{Ker} A^2 \subset \operatorname{Ker} A \Longrightarrow (iii)$.

— Enfin, $(i) \Longrightarrow (v)$ en prenant $V = M$ et $(i) \Longrightarrow (vi)$ en prenant $W = M$.

11. On a : $AV = (WA^2)V = W(A^2V) = WA$ d'où

$W^2A = W(WA) = W(AV) = (WA)V = (AV)V = AV^2$ puis

$A(WAV) = A(AV^2) = (A^2V)V = AV = WA = W(WA^2) = (W^2A)A = (WAV)A \quad (3)$

$A(WAV)A = A((WAV)A) = A(AV) = A^2V = A \quad (1)$

$(WAV)A(WAV) = (WAV)((A(WAV)) = (WAV)(AV) = ((WAV)A)V = (WA)V = WAV \quad (2)$

Ainsi (1), (2) et (3) sont vérifiées avec $M = WAV$ donc $\boxed{WAV \text{ est le pseudo-inverse de } A}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆