DS N^{o}3 (le 25/10/2008)

Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Bases stables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
d'après ESIM 2002 et ENSAE 1983

Notations et définitions :

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont *équivalentes* si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q, carrée, inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant élément de $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, on appelle *noyau* de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}.$$

On appelle *image* de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\}.$$

Un sous-groupe $\mathcal{J}$ de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un *idéal à droite* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{J},\ MA \in \mathcal{J}.$$

Un sous-groupe $\mathcal{J}$ de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé *idéal à gauche* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{J},\ AM \in \mathcal{J}.$$

Si $\mathcal{J}$ est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que $\mathcal{J}$ est un *idéal bilatère* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n.

I) Résultats préliminaires.

Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on suppose A de rang r non nul.

1°) Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $(\mathrm{e}_{r+1}, \mathrm{e}_{r+2}, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base du noyau de u ; montrer l'existence d'une famille de vecteurs $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r)$ tel que : $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r, \mathrm{e}_{r+1}, \mathrm{e}_{r+2}, \ldots, \mathrm{e}_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots\ldots, \mathrm{e}_r)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$. En déduire que $(u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \ldots\ldots, u(\mathrm{e}_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

c) Dire pourquoi on peut compléter la famille $(u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \ldots\ldots, u(\mathrm{e}_r))$ en une base de $\mathbb{R}^n$.

En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

2°) **a)** Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est équivalente à B si et seulement si le rang de B est égal à r.

b) Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que : r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n-r$ autres sont nuls.
Montrer que A est équivalente à D.

II) Application.

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ f(AB) = f(A)f(B) \quad .$$

1°) Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.

2°) A est une matrice de rang r strictement inférieur à n.

a) Montrer l'existence de $r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1A_2\ldots A_{r+1}$ soit nul.

b) En déduire que $f(A) = 0$.

3°) Que peut-on en conclure pour l'application f ?
Donner un exemple d'une telle application.

III) Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que, si $I_n \in \mathcal{J}$, alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Montrer que si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible, alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3°) On suppose que $\mathcal{J}$ n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à $\mathcal{J}$.

a) Montrer que $\mathcal{J}$ contient la matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-r-1}$ soit une matrice inversible.

4°) Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

IV) Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{J}_{\mathrm{E}} = \{\ \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ \mathrm{E} \text{ contient } \mathrm{Im}(A)\}.$$

Montrer que $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Soit A un élément de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Im}(B)$ est contenue dans $\mathrm{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ telle que $B = AC$.

On fixe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$.

a) Justifier que l'application ϕ définie par : $X \mapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(A)$.

b) Soit $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots\ldots, \mathrm{e}_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{(q,1)}(\mathbb{R})$.

Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que $A\varepsilon_i = B\mathrm{e}_i$.

c) Soit C l'élément de $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ soit $C = [\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ \varepsilon_q]$.

Montrer que $B = AC$.

3°) Soient $A,\ B$ et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ contient $\mathrm{Im}(C)$.

a) On désigne par $D = [A\ B]$ la matrice de $\mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.

Montrer que $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

b) En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.

c) En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $C = AU + BV$.

4°) Soif $\mathcal{J}$ un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$$\forall M \in \mathcal{J},\ \mathrm{rang}(M) \leqslant r.$$

Montrer qu'il existe $M_0 \in \mathcal{J}$ tel que rang $(\mathcal{M}_0) = r$.

b) Soit M un élément quelconque de $\mathcal{J}$.

On suppose que $\mathrm{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(M_0)$.

En utilisant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de $\mathcal{J}$ de rang strictement supérieur à r.

c) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{J}$ est contenu dans $\mathcal{J}_{\mathrm{Im}(M_0)}$

5°) Montrer que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathrm{Im}(\mathcal{M}_0)}$.

6°) Conclure : quels sont les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V) Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{K}_{\mathrm{F}} = \{\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \ \mathrm{Ker}(M) \text{ contient F}\}.$$

Montrer que $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) **a)** On désigne par u un morphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v un morphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.
On suppose que $\mathrm{Ker}(v)$ contient $\mathrm{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe un morphisme w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que : $v = wou$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$, telles que $\mathrm{Ker}(B)$ contient $\mathrm{Ker}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ telle que $B = CA$.

3°) Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que :

$$\mathrm{Ker}(C) \text{ contient } \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B).$$

Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que : $C = UA + VB$.

4°) Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5°) Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\dim(\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}) = \dim(E) \times (n - \dim(F))$.
Retrouver ainsi le résultat de III.4.

VI) Application : bases stables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose ici $n \geqslant 2$. Une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stable* si elle vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{B}\ ,\ AB \in \mathcal{B} \text{ ou } AB = 0.$$

1°) Donner un exemple de telle base.

Soit $\mathcal{B}$ une base stable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et r le minimum du rang des éléments de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}'$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ de rang égal à r.

2°) **a)** Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{B}$ et toute $B \in \mathcal{B}'$:

$$(BA \in \mathcal{B}' \text{ ou } BA = 0) \quad \text{et} \quad (AB \in \mathcal{B}' \text{ ou } AB = 0)$$

b) En utilisant III.4, montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

Ainsi, tous les éléments de $\mathcal{B}$ ont même rang r.

3°) On se propose ici de démontrer que $r < n$.

a) Montrer que, si l'élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ MN = NM$$

alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $M = \lambda I_n$.

b) Soit $M = \sum\limits_{A \in \mathcal{B}} A$. Montrer que, si l'on avait $r = n$, on aurait :

$$\forall B \in \mathcal{B}\ ,\ MB = BM = M.$$

c) Conclure.

On note désormais $\mathcal{E}$ l'ensembles des sous-espaces vectoriels E de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ tels que il existe au moins un élément $A \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mathrm{Im}(A) = E$; on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ tels que il existe au moins un élément $A \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mathrm{Ker}(A) = F$.

Pour tout $E \in \mathcal{E}$ et tout $F \in \mathcal{F}$, on note $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ l'ensemble des éléments $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mathrm{Im}(A) = E$, et on note $\mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ l'ensemble des éléments $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mathrm{Ker}(A) = F$.

4°) **a)** Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}}) = \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ et que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}^{\mathrm{F}}) = \mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ pour tout $E \in \mathcal{E}$ et tout $F \in \mathcal{F}$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe des $\mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ lorsque E décrit $\mathcal{E}$.

c) Montrer que $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ est la somme directe des E lorsque E décrit $\mathcal{E}$ (on pourra utiliser la décomposition de I_n dans la somme directe de la question précédente).

5°) **a)** Soit $F \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{K}_{\mathrm{F}}$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par les $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ lorsque E décrit $\mathcal{E}$.

b) En déduire que : $\forall E \in \mathcal{E}$, $\forall F \in \mathcal{F}$, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}) = \mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$.

6°) **a)** Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$. Montrer que : $A^2 = 0$ ou $A^2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$.

b) En déduire que : $\forall E \in \mathcal{E}$, $\forall F \in \mathcal{F}$, ou bien $E \subset F$, ou bien $E \oplus F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

c) Montrer que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe au moins un $E \in \mathcal{E}$ tel que $E \oplus F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.

7°) Soient $E \in \mathcal{E}$ et $F \in \mathcal{F}$ tels que $E \oplus F = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.
Soit $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r, \mathrm{e}_{r+1}, \mathrm{e}_{r+2}, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$ telle que $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r)$ soit une base de E.

a) Pour toute $A \in \mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$, on peut considérer l'application linéaire de E dans E qui transforme la base $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r)$ de E en la famille $(A\mathrm{e}_1, A\mathrm{e}_2, \ldots, A\mathrm{e}_r)$. On notera $\hat{A}$ la matrice de cette application linéaire dans la base $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r)$ de E.
Montrer que l'application $A \mapsto \hat{A}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{K}_{\mathrm{F}} \cap \mathcal{J}_{\mathrm{E}}$ sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$

b) Montrer que l'image de $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ par cet isomorphisme est une base stable de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

c) Déduire alors de VI.3 que : $r = 1$.

d) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{B}^{\mathrm{F}}$ a pour unique élément la projection d'image E et de noyau F.
