CORRIGÉ DM N^{o}3

Matrices réductibles et irréductibles. Permanents. Théorème de Frobenius et König. Matrices magiques et bistochastiques. Théorème de Birkhoff. d'après CCP 2000 et ENS 1996. cf. aussi MINES-PONTS 2008

PARTIE A :

1°) a) Soient $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$.

(i) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma P_{\sigma'}(e_i) = P_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{\sigma\circ\sigma'(i)}$ donc $\underline{P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}}$.

(ii) Pour $\sigma' = \sigma^{-1}$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}_{\Sigma_n}} = I_n$ donc $\underline{P_\sigma \text{ est inversible, et } P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1}}$.

(iii) On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $({}^tP_\sigma)_{ij} = (P_\sigma)_{ji} = \delta_{j,\sigma(i)}$; or, $\delta_{j,\sigma(i)} = 1 \Leftrightarrow j = \sigma(i) \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$ donc $\delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}$ d'où $({}^tP_\sigma)_{ij} = (P_{\sigma^{-1}})_{ij}$ soit : $\underline{(P_\sigma)^{-1} = {}^t P_\sigma}$.
Il y avait d'autres solutions possibles : par exemple, calculer le terme d'indice (i,j) du produit des matrices $P_\sigma\, {}^tP_\sigma$ à l'aide de la formule du produit matriciel, ou, mieux, remarquer que la matrice P_σ est orthogonale puisqu'elle transforme une b.o.n (lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique) en une b.o.n...

b) • On calcule : $b_{ij} = \sum_{k,l} (P_\sigma)_{ik}(a_{kl})(P_{\sigma'})_{lj} = \sum_{k,l} \delta_{i,\sigma(k)} a_{kl} \delta_{l,\sigma'(j)}$. Le seul terme non nul dans cette somme est celui pour lequel $\sigma(k) = i$ et $l = \sigma'(j)$, soit $k = \sigma^{-1}(i)$ et $l = \sigma'(j)$. On a donc bien : $\underline{b_{ij} = a_{\sigma^{-1}(i)\sigma'(j)}}$.

• La matrice B s'obtient donc à partir de A par la suite d'opérations élémentaires :

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1,n]\!] & C_j \leftarrow C_{\sigma(j)} \\ \forall i \in [\![1,n]\!] & L_i \leftarrow L_{\sigma^{-1}(i)} \end{cases}$$

2°) a) Supposons que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ soit extraite de A. Cela signifie qu'il existe $i_1, \ldots, i_p$ distincts $\in [\![1,n]\!]$ et $j_1, \ldots, j_q$ distincts $\in [\![1,n]\!]$ tels que les a_{i_k,j_l} soient nuls.
Notons alors σ' *une* permutation de Σ_n telle que

$$\sigma'(n) = j_q,\ \sigma'(n-1) = j_{q-1}, \ldots, \sigma'(n-q+1) = j_1$$

et σ *une* permutation de Σ_n telle que

$$\sigma(i_1) = 1,\ \sigma(i_2) = 2, \ldots, \sigma(i_p) = p$$

On aura alors, pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $n-q+1 \leqslant l \leqslant n$: $b_{kl} = a_{\sigma^{-1}(k)\sigma'(l)} = 0$, donc la matrice $\underline{B = P_\sigma A P_{\sigma'} \text{ sera bien de la forme voulue}}$.

b) Supposons A réductible : il existe une partition (S,T) de $[\![1,n]\!]$ (avec S et T non vides) telle que : $\forall (i,j) \in S \times T$, $a_{ij} = 0$.
En notant $p = \mathrm{Card}(S)$ (donc $n - p = \mathrm{Card}(T)$), cela implique que l'on peut extraire de A la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$. Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent avec $q = n - p$.

c) • Supposons A réductible, et S, T comme ci-dessus. Notons alors : $S = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et $T = \{j_{p+1}, \ldots, j_n\}$. Puisque $S \cup T = [\![1,n]\!]$ et $S \cap T = \emptyset$, on peut définir $\sigma \in \Sigma_n$ par :

$$\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(p) = i_p,\ \sigma(p+1) = j_{p+1}, \ldots, \sigma(n) = j_n.$$

Les mêmes calculs qu'auparavant montrent alors que la matrice $B = P_{\sigma^{-1}} A P_\sigma$ sera bien de la forme voulue.

• Réciproquement, si $P_{\sigma^{-1}}AP_\sigma$ est de la forme indiquée, on considère les ensembles S et T tels que $S=\{\sigma(1),\dots,\sigma(p)\}$ et $T=\{\sigma(p+1),\dots,\sigma(n)\}$. σ étant une permutation de $[\![1,n]\!]$, ces ensembles forment bien une partition de $[\![1,n]\!]$ et :

$\forall(k,l)\in S\times T$, $\exists(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!]$ tq $k=\sigma(i),l=\sigma(j)$ d'où $a_{kl}=a_{\sigma(i)\sigma(j)}=b_{ij}=0$

donc <u>A est réductible</u>.

3°) **a)** Supposons (P) vérifiée, et, par l'absurde, A réductible. Il existe donc une partition (S,T) de $[\![1,n]\!]$ (avec S et T non vides) telle que : $\forall(i,j)\in S\times T$, $a_{ij}=0$.

Soit $(i,j)\in S\times T$. Puisque $a_{ij}=0$ et que (P) est vraie, il existe $i_1,i_2,\dots,i_s$ tels que le produit $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sj}$ soit non nul.

On a donc : $a_{ii_1}\neq0$ d'où $i_1\notin T$ d'où $i_1\in S$.

Puis : $i_1\in S$ et $a_{i_1i_2}\neq0$ impliquent $i_2\notin T$ d'où $i_2\in S$

etc... On arriverait ainsi à $j\in S$: contradiction. Ainsi : <u>$(P)\Rightarrow A$ irréductible</u>.

b) Supposons ici A irréductible.

• Si, par l'absurde, X_i était vide, on aurait $a_{ij}=0$ pour tout $j\neq i$. En prenant $S=\{i\}$ et $T=[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, on obtiendrait alors A réductible : contradiction.

• X_i ne contient pas i par définition. Supposons alors X_i strictement inclus dans $[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$. Soit alors $S=X_i\cup\{i\}$ et $T=[\![1,n]\!]\setminus S$. S et T sont non vides par hypothèse, et forment bien une partition de $[\![1,n]\!]$.

Soit $(k,l)\in S\times T$. Si a_{kl} était non nul, on aurait :

$\diamond$ soit $k=i$: dans ce cas, $a_{il}\neq0$ donc $l\in X_i$: *impossible !* (car $l\in T$).

$\diamond$ soit $k\neq i$, i.e $k\in X_i$. On a alors deux sous-cas :

$\triangleright$ si $a_{ik}\neq0$: alors $a_{ik}a_{kl}\neq0$ donc $l\in X_i$: *impossible !*

$\triangleright$ si il existe $i_1,\dots,i_s$ tels que $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sk}\neq0$ alors $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{s-1}i_s}a_{i_sk}a_{kl}\neq0$ et $l\in X_i$: *impossible !*

On a donc une contradiction dans tous les cas, soit : $\forall(k,l)\in S\times T$, $a_{kl}=0$ i.e A réductible, ce qui est contraire à l'hypothèse !

• Ainsi, $X_i=[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$ d'où, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $j\neq i\Rightarrow j\in X_i$ d'où (P).

Finalement : <u>A irréductible $\Longleftrightarrow$ (P)</u>

4°) Le graphe ne pose pas de problème.

La traduction sur ce graphe de la propriété (P) pourrait s'exprimer ainsi : pour tout couple de points distincts (P_i,P_j), on peut aller de P_i à P_j en suivant les flèches... (on notera que les boucles éventuelles allant de P_i à lui-même ne servent à rien...).

Il est alors facile de voir que : <u>A_1 est irréductible</u> et <u>A_2 est réductible</u>.

<u>PARTIE B : Permanents</u>

1°) **a)** • Avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}\mathbf{per}(C_1,\dots,C_{j-1},C_j+\lambda C'_j,C_{j+1},\dots,C_n)&=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}a_{\sigma(1)1}\dots[a_{\sigma(j)j}+\lambda a'_{\sigma(j)j}]\dots a_{\sigma(n)n}\\&=\mathbf{per}(C_1,\dots,C_j\dots,C_n)+\lambda\mathbf{per}(C_1,\dots,C'_j,\dots,C_n)\end{aligned}$$

donc **per** est linéaire par rapport à chacune des variables, i.e est n-linéaire.

• Soit $\sigma'\in\Sigma_n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{per}(C_{\sigma'(1)},\dots,C_{\sigma'(n)}) &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} a_{\sigma(1)\sigma'(1)}\dots a_{\sigma(n)\sigma'(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma_n} a_{\sigma\circ\sigma'^{-1}(1)1}\dots a_{\sigma\circ\sigma'^{-1}(n)n}\end{aligned}$$

(en faisant le changement d'indice $i=\sigma'^{-1}(j)$ dans le premier produit).
Or l'application $\sigma\mapsto\tau=\sigma\circ\sigma'^{-1}$ est bijective de Σ_n dans Σ_n donc :

$$\mathbf{per}(C_{\sigma'(1)},\dots,C_{\sigma'(n)}) = \sum_{\tau\in\Sigma_n} a_{\tau(1)1}\dots a_{\tau(n)n} = \mathbf{per}(C_1,\dots,C_n)$$

donc **per** est n-linéaire symétrique.

b) Même démonstration que dans le cours pour le déterminant (en faisant le changement d'indice $\sigma\to\sigma^{-1}$).

2°) Le principe de la démonstration est le même que pour le déterminant (cf. cours !). Brièvement :
◇ On commence par démontrer le résultat dans le cas du développement selon la 1ère colonne et dans le cas $a_{11}=1, a_{i1}=0$ pour $i\geqslant 2$, en revenant à la définition...
◇ puis, dans le cas général, on utilise la linéarité par rapport à la j-ème colonne ; pour chacun des permanents obtenus, une permutation circulaire des lignes et une permutation circulaire des colonnes (ce qui ne change pas le permanent, celui-ci étant symétrique) permet de se ramener au cas précédent...

3°) **a)** Soit $\sigma\in\Sigma_n$. Si $\sigma(\{p+1,\dots,n\})\not\subseteq\{p+1,\dots,n\}$, alors il existe $j\in\{p+1,\dots,n\}$ tel que $\sigma(j)\in\{1,\dots,p\}$ d'où $a_{\sigma(j)j}=0$. Donc : $\mathbf{per}(A)=\sum\limits_{\sigma\in\Sigma'_n} a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}$ où Σ'_n désigne l'ensemble des permutations $\sigma\in\Sigma_n$ telles que $\sigma(\{p+1,\dots,n\})\subset\{p+1,\dots,n\}$.
Toute permutation $\sigma\in\Sigma_n$ étant une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même, on a :
$\Sigma'_n=\{\sigma\in\Sigma_n\ ,\ \sigma([\![1,p]\!])=[\![1,p]\!]$ et $\sigma([\![p+1,n]\!])=[\![p+1,n]\!]\}$.
À toute permutation $\sigma\in\Sigma'_n$ on peut donc associer, de façon bijective, un couple $(\rho,\tau)\in\Sigma_p\times\Sigma_{n-p}$ par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\ ,\quad \sigma(i)=\begin{cases}\rho(i) & \text{si}\quad i\in[\![1,p]\!]\\ p+\tau(i-p) & \text{si}\quad i\in[\![p+1,n]\!]\end{cases}$$

D'où :
$$\begin{aligned}\mathbf{per}(A) &= \sum_{(\rho,\tau)\in\Sigma_p\times\Sigma_{n-p}} a_{\rho(1),1}\dots a_{\rho(p),p}a_{p+\tau(1),p+1}\dots a_{p+\tau(n),n}\\ &= \left(\sum_{\rho\in\Sigma_p} a_{\rho(1),1}\dots a_{\rho(p),p}\right)\left(\sum_{\tau\in\Sigma_{n-p}} a_{p+\tau(1),p+1}\dots a_{p+\tau(n),n}\right)\\ &= \mathbf{per}(F)\mathbf{per}(H)\end{aligned}$$

b) Récurrence facile...

4°) Le résultat découle directement du fait que B se déduit de A par permutations de lignes et de colonnes, et que le permanent, étant une forme n-linéaire symétrique des colonnes et des lignes, est invariant par ces permutations.

PARTIE C : Théorème de Frobenius et König

1°) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $s\in[\![1,n]\!]$ tels que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$ soit extraite de A.
D'après A.2.a, il existe $\sigma,\sigma'\in\Sigma_n$, $F\in\mathcal{M}_{s,s-1}(\mathbb{R})$, $G\in\mathcal{M}_{n-s,s-1}(\mathbb{R})$ et $H\in\mathcal{M}_{n-s,n+1-s}(\mathbb{R})$ telles que $P_\sigma AP_{\sigma'}=\begin{bmatrix}F & 0\\ G & H\end{bmatrix}$, où 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$.

En notant F' la matrice carrée d'ordre s obtenue en adjoignant à F une colonne de '0' et G' celle obtenue en adjoignant à G la première colonne de H et H' la matrice carrée d'ordre $n-s$ obtenue en supprimant la première colonne de H, on a : $P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F' & 0 \\ G' & H' \end{bmatrix}$, où 0 est ici la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n-s}(\mathbb{R})$.
D'après B.3 et B.4, $\mathbf{per}(A) = \mathbf{per}(P_\sigma A P_{\sigma'}) = \mathbf{per}(F')\mathbf{per}(H')$.
Mais la dernière colonne de F' est nulle ; le développement du permanent de F' selon cette colonne donne donc $\mathbf{per}(F') = 0$, d'où : $\underline{\mathbf{per}(A) = 0}$.

2°) **a)** Préliminaires : cas $n = 2$: soit $A \in \mathcal{M}_2^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{per}(A) = 0$.
On a donc : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \geqslant 0$ et $ad + bc = 0$. D'où $ad = bc = 0$.
Si, par exemple, $a = 0$, alors, ou bien $b = 0$ et l'on peut extraire de A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou bien $c = 0$, et l'on peut extraire de A la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On a donc bien le résultat voulu (avec $s = 1$ dans le premier cas et $s = 2$ dans le second).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{per}(A) = 0$, et soit (i, j) tel que $a_{ij} > 0$.
On a : $\mathbf{per}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{per}(A_{kj})$. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_{kj} \geqslant 0$ et $\mathbf{per}(A_{kj}) \geqslant 0$ (car tous les termes dans l'expression de $\mathbf{per}(A_{kj})$ sont $\geqslant 0$). On en déduit donc, puisque $\mathbf{per}(A) = 0$: $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_{kj}\mathbf{per}(A_{kj}) = 0$. Puisque $a_{ij} > 0$, il en découle $\underline{\mathbf{per}(A_{ij}) = 0}$.

c) En appliquant l'hypothèse de récurrence à la matrice A_{ij}, qui appartient à $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $s_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s_1, n+1-s_1}(\mathbb{R})$ soit extraite de A_{ij}. Elle est donc aussi extraite de A. En appliquant directement A.2.a, et puisque A est d'ordre $n+1$, on obtient :
$\exists F \in \mathcal{M}_{s_1}(\mathbb{R})$, $\exists G \in \mathcal{M}_{n+1-s_1, s_1}(\mathbb{R})$, $\exists H \in \mathcal{M}_{n+1-s_1}(\mathbb{R})$, $\exists \sigma, \sigma' \in \Sigma_{n+1}$
tels que : $P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$.
De plus, F, G, H sont bien à termes positifs, puisqu'elles sont extraites de A.
Enfin, on a $\mathbf{per}(P_\sigma A P_{\sigma'}) = \mathbf{per}(A) = 0$ d'où $\underline{\mathbf{per}(F)\mathbf{per}(H) = 0}$.

d) Supposons alors, par exemple, $\mathbf{per}(F) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à F, il existe $s_2 \in [\![1, s_1]\!]$ tel que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s_2, s_1+1-s_2}(\mathbb{R})$ soit extraite de F.
De plus, dans $P_\sigma A P_{\sigma'} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ G & H \end{bmatrix}$, il y a aussi la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s_1, n+1-s_1}(\mathbb{R})$.
On peut donc, au total, extraire de $P_\sigma A P_{\sigma'}$ une matrice nulle d'ordre $(s_2, s_1 + 1 - s_2 + n + 1 - s_1) = (s_2, n+2-s_2)$. Celle-ci sera aussi extraite de A, car $P_\sigma A P_{\sigma'}$ s'obtient simplement à partir de A par permutations sur les lignes et colonnes.
Cela démontre le résultat à l'ordre $n + 1$.

PARTIE D : Matrices magiques et bistochastiques ; théorème de Birkhoff

1°) E_n est non vide car la matrice nulle appartient évidemment à E_n.
Soient $A, B \in E_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda A + B$ est la matrice dont le terme d'indice (i, j) est $\lambda a_{ij} + b_{ij}$, et, pour tous i et j :
$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda A + B)_{ik} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = \lambda d(A) + d(B)$$
$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda A + B)_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj} = \lambda d(A) + d(B)$$

Donc $\underline{\lambda A+B\in E_n}$ et $\underline{d(\lambda A+B)=\lambda d(A)+d(B)}$
ce qui prouve que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que d est une forme linéaire sur E_n.

2°) **a)** On a, avec des notations évidentes :

$$(AJ_n)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(J_n)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik} \text{ et } (J_nA)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(J_n)_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}$$

On a donc : $AJ_n=J_nA=\lambda J_n \iff \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\ ,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}=\lambda$
$\iff A\in E_n$ et $\lambda=d(A)$

b) On sait déjà que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer que c'est une sous-algèbre, il suffit de vérifier :

- $I_n\in E_n$: c'est évident
- Si $A,B\in E_n$, alors $AB\in E_n$. En effet :
  $(AB)J_n=A(BJ_n)=A.d(B)J_n=d(B)AJ_n=d(B)d(A)J_n$ et
  $J_n(AB)=(J_nA)B=d(A)J_nB=d(A)d(B)J_n$
  donc, d'après la question précédente, $AB\in E_n$ et, de plus, $d(AB)=d(A)d(B)$
- Puisque l'on a également $d(I_n)=1$, la relation ci-dessus prouve en outre que d est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

c)
- Soit $A\in E_n$, inversible. On a alors :
  $J_n=A^{-1}(AJ_n)=d(A)A^{-1}J_n$ et aussi $J_n=(J_nA)A^{-1}=d(A)J_nA^{-1}$
  Cela implique $d(A)\neq 0$ et $A^{-1}J_n=J_nA^{-1}=\dfrac{1}{d(A)}J_n$, donc
  $A^{-1}\in E_n$ et $d(A^{-1})=\dfrac{1}{d(A)}$.
- La réciproque est *fausse (si $n\geqslant 2$) :* par exemple, si $A=J_n$, on a $d(A)=n\neq 0$, mais A n'est pas inversible (elle est de rang 1).

3°) Soit $A\in\Omega_n$. On a évidemment $\mathbf{per}(A)\geqslant 0$, puisque tous les coefficients de A sont positifs.
Si, par l'absurde, on avait $\mathbf{per}(A)=0$, alors, d'après le th. de Frobenius et König, il existe $s\in[\![1,n]\!]$ tel que la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$ soit extraite de A. Il existerait alors $\sigma,\sigma'\in\Sigma_n$, $F\in\mathcal{M}_{s,s-1}(\mathbb{R})$, $G\in\mathcal{M}_{n-s,s-1}(\mathbb{R})$ et $H\in\mathcal{M}_{n-s,n+1-s}(\mathbb{R})$ telles que $P_\sigma AP_{\sigma'}=\begin{bmatrix}F&0\\G&H\end{bmatrix}$, où 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{s,n+1-s}(\mathbb{R})$.
Puisque P_σ et $P_{\sigma'}$ appartiennent à Ω_n, il en est de même de $P_\sigma AP_{\sigma'}$ d'après D.2.b. La somme des éléments de chaque ligne de F vaut donc 1 et la somme des éléments de chaque colonne de H vaut 1. Donc en faisant la somme des éléments de F et de H, on obtient $n+1$ $(s+(n+1-s))$. Mais, puisque $P_\sigma AP_{\sigma'}\in\Omega_n$, la somme de tous les éléments de $P_\sigma AP_{\sigma'}$ vaut n ! <u>D'où la contradiction</u>...

4°) $\mathbf{per}(A)=\displaystyle\sum_{\sigma\in\Sigma_n}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}$, et tous les termes sont ici $\geqslant 0$. Puisque $\mathbf{per}(A)>0$, il existe donc $\sigma\in\Sigma_n$ tel que $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}$ soit strictement positif, d'où
$\underline{a_{\sigma(j)j}>0 \text{ pour tout } j\in[\![1,n]\!]}$.

5°) Soit A bistochastique ($A\in\Omega_n$) et réductible. Il existe donc (S,T), partition de $[\![1,n]\!]$, telle que $\forall(i,j)\in S\times T\ ,\ a_{ij}=0$.

On a donc : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = n$. D'autre part :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{\substack{i\in S\\ j\in S}} a_{ij} + \sum_{\substack{i\in S\\ j\in T}} a_{ij} + \sum_{\substack{i\in T\\ j\in T}} a_{ij} + \sum_{\substack{i\in T\\ j\in S}} a_{ij}$$

Par définition, $\displaystyle\sum_{\substack{i\in S\\ j\in T}} a_{ij} = 0$. De plus : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in S\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i\in S} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{=1} = \mathrm{Card}(S)$

donc : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in S\\ j\in S}} a_{ij} = \sum_{\substack{i\in S\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} - \sum_{\substack{i\in S\\ j\in T}} a_{ij} = \mathrm{Card}(S)$

On a de même : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in T\\ j\in T}} a_{ij} = \mathrm{Card}(T)$.

On a donc : $\displaystyle n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \underbrace{\mathrm{Card}(S) + \mathrm{Card}(T)}_{=n} + \sum_{\substack{i\in T\\ j\in S}} a_{ij}$

d'où : $\displaystyle\sum_{\substack{i\in T\\ j\in S}} a_{ij} = 0$ et donc, puisque $a_{ij} \geqslant 0$: $\underline{a_{ij} = 0 \text{ pour } (i,j) \in T \times S}$.

6°) **a)** Si $A \in \Omega_n$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, donc, si $X = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, on aura $AX = X$

(*autrement dit, X est vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1*).

b) Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, avec au moins deux composantes distinctes, tel que $AX = X$ (*autrement dit, X est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1, et non colinéaire au précédent*).

Soit alors $S = \{i \in [\![1,n]\!] \text{ tq } x_i = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j\}$ et $T = [\![1,n]\!] \setminus S$ (S et T sont non vides par hypothèse). On a alors :

$\forall i \in S\ ,\ x_i = \displaystyle\sum_{j} a_{ij}x_j$ (car $AX = X$)

mais aussi : $x_i = \left(\displaystyle\sum_{j} a_{ij}\right) x_i$ (car $\displaystyle\sum_{j} a_{ij} = 1$).

On en déduit : $\displaystyle\sum_{j} a_{ij}(x_j - x_i) = 0$. Tous les termes étant positifs, on aura donc, pour tout $i \in S$ et tout j, $a_{ij}(x_j - x_i) = 0$, d'où, si $j \in T$, $x_j - x_i > 0$ par définition donc $a_{ij} = 0$.

Ainsi : $\forall (i,j) \in S \times T\ ,\ a_{ij} = 0$ donc $\underline{A \text{ est réductible}}$.

Rem : *La réciproque est vraie :* si A est bistochastique réductible, il existe un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 et ayant au moins deux composantes distinctes : si (S,T) est une partition telle que $a_{ij} = 0$ pour $(i,j) \in S \times T$, il suffit de prendre X tel que $x_k = 0$ si $k \in S$ et $x_k = 1$ si $k \in T$...

c) Du résultat précédent il découle immédiatement que, si $A \in \Omega_n$ est irréductible, les vecteurs X tels que $AX = X$ sont exactement ceux colinéaires à $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

7°) **a)** *Préliminaires :* Si $\pi(A)$ était strictement inférieur à n, il y aurait dans A une rangée de zéros, ce qui est exclu.
Si $\pi(A) = n$, il y a exactement un et un seul '1' dans chaque ligne et dans chaque colonne, donc A est alors une matrice de permutation.

b) • Les $a_{\sigma(j)j}$ étant strictement positifs, il en est de même de leur minimum, donc $a > 0$.
• Les $a_{\sigma(j)j}$ étant tous $\leqslant 1$, il en est de même de a. Et, si on avait $a = 1$, on aurait, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_{\sigma(j)j} = 1$ et A serait une matrice de permutation, d'où $\pi(A) = n$, ce qui est exclu.

c) **(i)** • A et P_σ appartenant à E_n, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de B.
• On a : $b_{ij} = \dfrac{1}{1-a}[a_{ij} - a\delta_{i\sigma(j)}]$ donc, si $i \neq \sigma(j)$, $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{1-a}$ et, si $i = \sigma(j)$, $b_{ij} = \dfrac{a_{\sigma(j)j} - a}{1-a}$. Dans les deux cas, $b_{ij} \geqslant 0$ donc $\underline{B \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})}$.
• Enfin : $d(B) = \dfrac{d(A) - ad(P_\sigma)}{1-a} = \dfrac{1-a}{1-a} = 1$ (d est une forme linéaire sur E_n), d'où finalement : $\underline{B \in \Omega_n}$.

(ii) On a : $b_{\sigma(k)k} = \dfrac{a_{\sigma(k)k} - a}{1-a} = 0$, donc il y a (au moins) un terme nul de plus dans B que dans A (si $a_{ij} = 0$, le calcul précédent montre que l'on a aussi $b_{ij} = 0$). Ainsi, $\pi(B) < \pi(A)$, et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k = (1-a)\sum_{k=1}^{p} \lambda_k + a = 1 - a + a = 1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \mu_k P_{\sigma_k} = (1-a)\sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_{\sigma_k} + aP_\sigma = (1-a)B + aP_\sigma = A$

ce qui achève la démonstration.

$\boxed{\text{FIN}}$