SOUS-ALGÈBRES NILPOTENTES DE $\mathscr{L}(\mathrm{E})$)

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif arbitraire.

Si E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on note $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F ; pour tout élément T de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on désigne par $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$ et $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ respectivement le noyau de T dans E et son image dans F.

Lorsque $\mathrm{E}=\mathrm{F}$, l'espace vectoriel (E,E) est noté simplement $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Un élément T de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif r tel que $\mathrm{T}^r=0$.

On appelle ici *sous-algèbre* de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ stable par multiplication (*contrairement à la définition actuellement en vigueur dans le programme, on n'impose pas ici que cette sous-algèbre contienne* Id_{E}).

Une sous-algèbre $\mathscr{A}$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier strictement positif r tel que le produit de r éléments quelconques de $\mathscr{A}$ soit nul, et on appelle *ordre de nilpotence* de $\mathscr{A}$ le plus petit de ces entiers r.

Le but de ce problème est d'établir quelques propriétés des sous-algèbres nilpotentes.

Première partie

Dans cette partie, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$.

I.1 Soit T un endomorphisme nilpotent non nul de E, r le plus petit entier positif tel que $\mathrm{T}^r=0$.

- **a)** Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$ et $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$.
- **b)** Démontrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}=\mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$.
- **c)** Construire une base de E dans laquelle T est représenté par la matrice $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et préciser la valeur de r.

I.2 Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre nilpotente non nulle de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices représentant les éléments de $\mathscr{A}$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$ avec $c\in\mathbb{K}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ et une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\oplus\mathrm{E}_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{E}_n$; pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note P_i le projecteur sur E_i associé à cette décomposition ; on écrit aussi x_i au lieu de $\mathrm{P}_i(x)$ pour $x\in\mathrm{E}$.

II.1 Étant donné un endomorphisme T de E, construire des applications linéaires $\mathrm{T}_{i,j}$ appartenant à $\mathscr{L}(\mathrm{E}_j,\mathrm{E}_i)$ telles que l'on ait $(\mathrm{T}(x))_i=\sum\limits_j \mathrm{T}_{i,j}(x_j)$ pour tout $x\in\mathrm{E}$.

On dira que T est *représenté par le tableau d'applications linéaires* $(\mathrm{T}_{i,j})$.

II.2 Étant donné deux endomorphismes S et T de E, exprimer les composantes $(\mathrm{ST})_{i,j}$ de ST en fonction de celles de S et T.

Troisième partie

Dans cette partie, on pose $\mathrm{E}=\mathrm{K}^n$, où n est un entier strictement positif; on considère un endomorphisme nilpotent non nul T de E et on note r le plus petit entier strictement positif tel que $\mathrm{T}^r=0$. On pose $\mathrm{E}_3=\mathrm{Im}\,\mathrm{T}\cap\mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$.

III.1 Vérifier que E_3 est distinct de $\{0\}$ et de E.

III.2 Pour quelles valeurs de r a-t-on $\mathrm{E}_3=\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$?

III.3 Dans cette question, on suppose $r \geqslant 3$ et on note E_1 (resp. E_2) un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$ dans E (resp.de E_3 dans $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$). Vérifier que, dans la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$, T est représenté par un tableau de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T}_{2,1} & \mathrm{T}_{2,2} & 0 \\ \mathrm{T}_{3,1} & \mathrm{T}_{3,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $\mathrm{T}_{2,2}$ est nilpotent et qu'il existe une base de E dans laquelle T est représenté par une matrice $(t_{i,j})$ telle que $t_{i,j}$ soit nul lorsque $i \leqslant j$.

III.4 Comparer r et n.

III.5 Appliquer ce qui précède au cas où $n = 4$ et où T est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

Quatrième partie

Dans cette quatrième et dernière partie, nous utiliserons les notations suivantes : si X et Y sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{Z}$ un sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, nous désignerons par $\mathscr{K}(\mathscr{Z})$ l'intersection des noyaux des éléments de $\mathscr{Z}$, et par $\mathscr{I}(\mathscr{Z})$ le sous-espace vectoriel de Y engendré par les images des éléments de $\mathscr{Z}$.

On considère une sous-algèbre nilpotente non nulle $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, où $\mathrm{E} = \mathrm{K}^n$; on note r son ordre de nilpotence et on pose $\mathrm{E}_3 = \mathscr{I}(\mathscr{A}) \cap \mathscr{K}(\mathscr{A})$.

IV.1 Vérifier que $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ est distinct de E et que E_3 est distinct de $\{0\}$ et de E.

IV.2 Pour quelles valeurs de r a-t-on $\mathrm{E}_3 = \mathscr{I}(\mathscr{A})$?

Dans la suite du problème on suppose $r \geqslant 3$; on note E_1 (resp. E_2) un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ dans E (resp. de E_3 dans $\mathscr{I}(\mathscr{A})$).

On écrit les éléments T de $\mathscr{A}$ sous la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T}_{2,1} & \mathrm{T}_{2,2} & 0 \\ \mathrm{T}_{3,1} & \mathrm{T}_{3,2} & 0 \end{bmatrix}$; pour $i, j = 1, 2, 3$, on note $\mathscr{A}_{i,j}$ l'espace vectoriel des $\mathrm{T}_{i,j}$ où T parcourt $\mathscr{A}$.

IV.3 Démontrer, pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{A}$, l'implication [1]

$$\mathrm{T}_{22} \neq 0 \Longrightarrow \exists (\mathrm{S},\mathrm{T}) \in \mathscr{A}^2,\ \mathrm{STU} \neq 0$$

IV.4 **a)** Vérifier que $\mathscr{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathscr{L}(\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_2)$ et dire pour quelles valeurs de r cette sous-algèbre est nulle.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle tous les éléments T de $\mathscr{A}$ sont représentés par des matrices $(t_{i,j})$ telles que $t_{i,j}$ soit nul lorsque $i \leqslant j$.

c) Comparer r et n.

IV.5 On suppose ici $r \geqslant 4$. Soit r' l'ordre de nilpotence de $\mathscr{A}_{2,2}$. Montrer que $r' = r - 2$. [2]

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

1. Cette question ne fait pas partie de l'énoncé original. Mais le résultat obtenu est indispensable pour la suite.
2. Dans l'énoncé original, il y a juste : "déterminer r' "...