CORRIGÉ DU DM N°4 (X M′, 1988) Endomorphismes conservant le rang...

Première partie

I.1 $\Gamma(M) = \lambda M \iff (\lambda+1)M = \operatorname{tr} M \cdot I \quad (*)$ d'où 2 cas :

— Pour $\lambda = -1$, M est un vecteur propre associé si et seulement si $\operatorname{tr} M = 0$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est donc l'ensemble des matrices de trace nulle ; c'est un hyperplan de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (noyau d'une forme linéaire non nulle), il est donc de dimension n^2-1.

— Si $\lambda \neq -1$, la relation $(*)$ implique M colinéaire à I. Or, si $M = \alpha I$, $\Gamma(M) = (n-1)\alpha I = (n-1)M$. Il en résulte que $n-1$ est aussi valeur propre de Γ, le sous-espace propre associé étant la droite vectorielle $\mathbb{C} \cdot I$ (ensemble des matrices scalaires).

I.2 — Γ possède deux valeurs propres -1 et $n-1$, et la somme des dimensions des sous-espaces propres associés est égale à $n^2 = \dim \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, donc Γ est diagonalisable.

— Pour tout $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$,
$\Gamma^2(M) = -\Gamma(M) + \operatorname{tr} M\Gamma(I) = M - \operatorname{tr}(M)I + \operatorname{tr}(M)(n-1)I = M + (n-2)\operatorname{tr}(M)I = M + (n-2)(\Gamma(M)+M)$ d'où

$$\Gamma^2 - (n-2)\Gamma - (n-1)\mathscr{I} = 0$$

Plus astucieusement, , on pouvait dire que, Γ étant diagonalisable de valeurs propres -1 et $n-1$, son polynôme minimal est égal à $(X+1)(X-(n-1))$, puisque ses racines sont exactement les valeurs propres de Γ et qu'il est scindé à racines simples (cf. deux th. du cours)...

— On en déduit facilement : $\Gamma^{-1} = \dfrac{1}{n-1}(\Gamma - (n-2)\mathscr{I})$.

I.3 On suppose ici M inversible. On sait aussi que $M - \lambda I$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \operatorname{Sp} M$. Donc $\operatorname{rg}(\Gamma(M)) = \operatorname{rg} M \iff \operatorname{tr} M \notin \operatorname{Sp} M$.

I.4 **a)** Si $n = 2$, $\Gamma^{-1} = \Gamma$.
Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Gamma(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donc M et $\Gamma(M)$ ont même déterminant et même polynôme caractéristique, donc même spectre. Elles ont aussi même rang car $\operatorname{rg} M = 0 \iff M = 0 \iff \Gamma(M) = 0 \iff \operatorname{rg}(\Gamma(M)) = 0$ et $\operatorname{rg} M = 2 \iff \det M \neq 0 \iff \det(\Gamma(M)) \neq 0 \iff \operatorname{rg}(\Gamma(M)) = 2$.

b) Une question fort calculatoire : on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Après calcul, on trouve que l'équation $\Gamma(M) = A^tMA^*$ équivaut au système

$$\begin{cases} a\alpha\overline{\alpha} + b\beta\overline{\alpha} + c\alpha\overline{\beta} + d\beta\overline{\beta} & = d \\ a\alpha\overline{\gamma} + b\beta\overline{\gamma} + c\alpha\overline{\delta} + d\beta\overline{\delta} & = -b \\ a\gamma\overline{\alpha} + b\delta\overline{\alpha} + c\gamma\overline{\beta} + d\delta\overline{\beta} & = -c \\ a\gamma\overline{\gamma} + b\delta\overline{\gamma} + c\gamma\overline{\delta} + d\delta\overline{\delta} & = a \end{cases}$$

Ce système devant être vérifié pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, on obtient : $\alpha = \gamma = 0$, $|\gamma| = |\beta| = 1$ et $\beta\overline{\gamma} = -1$. Le fait que A est unitaire donne ensuite $|\gamma| = 1$, donc finalement, les matrices qui conviennent sont celles de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ avec $|\beta| = 1$.

Deuxième partie

II.1 **a)** Dire que $\operatorname{rg} A = 1$ équivaut à dire qu'il existe une colonne C_j de A qui est non nulle et que toutes les autres colonnes sont proportionnelles à C_j. On a donc : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ C_i = \lambda_i C_j$. On prend alors $X = C_j$ et $Y = {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On aura bien $A = X^tY$, avec X, Y non nulles.
La réciproque est facile : si $A = X^tY$, avec X, Y non nulles, alors toutes les colonnes de A sont proportionnelles à X, donc A est de rang $\leqslant 1$, et, étant non nulle, elle est de rang 1.

Remarque : Cette question et son corrigé figurent dans la feuille d'exos n° 3 (exercice 46) ainsi que dans le DS n°3 (Exercice 4, question 6.a). No comment !

On a alors, si $Z \in E$: $AZ = X^tYZ = \lambda X$ avec $\lambda = {}^tYZ \in \mathbb{C}$, donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(X)$ et $\operatorname{Ker} A = \{Z \in E \text{ tq } {}^tYZ = 0\}$. (*Rem :* C'est l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par Y lorsqu'on munit E du produit scalaire canonique...).

Si $A = X^tY = X'^tY' = A'$ alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A'$ donc $\operatorname{Vect}(X) = \operatorname{Vect}(X')$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X' = \lambda X$. Et on a alors $Y = \lambda Y'$.

La réciproque est immédiate.

b) Dire que $\operatorname{rg} A = 2$ équivaut à dire qu'il existe deux colonnes C_j et C_k ($j \neq k$) linéairement indépendantes et que toutes les autres colonnes sont combinaisons linéaires de C_j et C_k. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ C_i = \lambda_i C_j + \mu_i C_k$.

On prend alors $X = C_j$, $Z = C_k$, $Y = {}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $W = {}^t(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On a bien alors $A = X^tY + Z^tW$, avec (X, Z) libre, et (V, W) est aussi libre puisque $\lambda_j = 1, \mu_j = 0$ et $\lambda_k = 0, \mu_k = 1$.

Réciproquement, si $A = X^tY + Z^tW$ avec (X, Z) libre et (V, W) libre, alors toutes les colonnes de A sont combinaisons linéaires de X et de Y, donc $\operatorname{rg} A \leqslant 2$. Si $Y = {}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $W = {}^t(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, il existe $j \neq k$ tels que $\begin{vmatrix} \lambda_j & \mu_j \\ \lambda_k & \mu_k \end{vmatrix} \neq 0$ puisque la famille (V, W) est de rang 2. Les vecteurs $\lambda_j X + \mu_j Y$ et $\lambda_k X + \mu_k Y$, qui sont les j-ème et k-éme colonne de A sont alors linéairement indépendants (car ce sont les vecteurs du plan $\operatorname{Vect}(X, Y)$ de coordonnées (λ_j, λ_k) et (μ_j, μ_k) dans la base (X, Y) de ce plan). Ainsi, A possède deux colonnes linéairement indépendantes, donc est de rang $\geqslant 2$.

Finalement, A est bien de rang 2.

II.2 **a)** Puisque Φ conserve le rang, et que $\operatorname{rg}(X^tY) = 1$, alors $\operatorname{rg}(\Phi(X^tY)) = 1$ donc d'après II.1.a, il existe U et V non nuls dans E tels que $\Phi(X^tY) = U^tV$.

U et V ne sont pas uniques : s'ils conviennent, alors, pour tout $\lambda \neq 0$, le couple $\left(\lambda U, \dfrac{1}{\lambda} V\right)$ convient également.

b) La matrice $(X_1 + X_2)^tY_0$ est de rang $\leqslant 1$, et $\Phi\big((X_1 + X_2)^tY_0\big) = U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2$ a même rang que $(X_1 + X_2)^tY_0$. Or (U_1, U_2) est libre par hypothèse ; si (V_1, V_2) était libre, alors $U_1{}^tV_1 + U_2{}^tV_2$ serait de rang 2 d'après II.1.b, ce qui est impossible. Donc (V_1, V_2) est lié.

Soit $X \in E$, non nul. Il existe $U, V \in E$, non nuls, tels que $\Phi(X^tY_0) = U^tV$. Deux cas sont possibles :

— Si (U, U_1) est libre, alors (V, V_1) est lié (même démonstration que ci-dessus, en considérant $\Phi\big((X + X_1)^tY_0\big)$).

— Si (U, U_1) est liée, alors (U, U_2) est libre, et, en reprenant le raisonnement précédent, on obtient (V, V_2) lié ; or (V_1, V_2) est lié, donc on a aussi ici (V, V_1) lié.

Dans les deux cas, on a (V, V_1) lié et, V_1 étant non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $V = \lambda V_1$. On a alors $\Phi(X^tY) = \left(\dfrac{1}{\lambda} U\right) {}^tV_1$, i.e qu'on peut choisir $V_0 = V_1$. (on a supposé $X \neq 0$ dans la démonstration précédente, pour pouvoir appliquer les résultats précédents ; dans le cas $X = 0$, il suffit de prendre $U = 0$.)

c) On a donc : $\forall X \in E,\ \exists U \in E$ tq $\Phi(X^tY_0) = U^tV_0$. Pour X donné, le vecteur U ainsi obtenu est unique (en appliquant II.1.a). On peut donc définir une application $X \mapsto U$, et il est facile de vérifier que cette application est linéaire. Donc il existe une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U = AX$.

De plus, pour $X \neq 0$, on a vu que $U \neq 0$. Le noyau de A est donc réduit à $\{0\}$, donc A est inversible.

II.3 — Fixons X_0 non nul. Alors il existe $U_0, V_0 \in E$, non nuls, tels que $\Phi(X_0{}^tY_0) = U_0{}^tV_0$. Si maintenant X est un autre vecteur non nul de E, en appliquant l'hypothèse (H_2) avec $X_1 = X_0$ et $X_2 = X$, on obtient qu'il existe $(U_1, U_2) \in E^2$ liée telle que $\Phi(X_0{}^tY_0) = U_1{}^tV_1$ et $\Phi(X^tY_0) = U_2{}^tV_2$. Or

$U_1{}^tV_1 = U_0{}^tV_0$ implique (U_0, U_1) liée d'après II.1.a, donc (U_0, U_2) est aussi liée. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $U_2 = \lambda U_0$, d'où $\Phi(X^tY_0) = U_0{}^tV$ avec $V = \dfrac{1}{\lambda}V_2$.

— Comme dans la question précédente, il existe $B' \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $V = B'X$; on a encore $X \neq 0 \Rightarrow V \neq 0$ donc B' est inversible, d'où $\Phi(X^tY_0) = U_0{}^tXB$ avec $B = {}^tB'$.

II.4 **a)** Par l'absurde, on suppose (Y_0, Y_0') lié ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Y_0' = \lambda Y_0$. On aurait alors $U_0{}^tXB = \lambda AX^tV_0$ donc d'après II.1.a il existe μ tel que $\lambda AX = \mu U_0$ et ${}^tXB = \mu{}^tV_0$. En particulier on aurait $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Vect}(U_0)$, soit $\operatorname{rg} A \leqslant 1$ ce qui est impossible car A est inversible (et $n \geqslant 2$).

b) On sait d'après II.1.b que $\operatorname{rg}(X^tY_0 + X'{}^tY_0') = 2$ donc $\operatorname{rg} \Phi(X^tY_0 + X'{}^tY_0') = 2$.
D'autre part : $\Phi(X^tY_0 + X'{}^tY_0') = AX^tV_0 + U_0{}^tX'B = U_0{}^tV_0 + U_0{}^tX'B = U_0({}^tV_0 + {}^tX'B)$
qui est une matrice de rang 1 d'après II.1.a, d'où la contradiction.

c) L'hypothèse (H) est une conséquence des hypothèses (H_1) et (H_2) faites simultanément. (H) étant fausse, il en résulte que les hypothèses (H_1) et (H_2) s'excluent mutuellement.

II.5 **a)** En reprenant la démonstration de II.2 avec Y à la place de Y_0, on obtient qu'il existe une matrice inversible A_1 et un vecteur $V \neq 0$ tels que $\Phi(X^tY) = A_1X^tV$ pour tout $X \in E$.

Montrons (V, V_0) libre ; en choisissant alors (X, X') libre, on aura $\Phi(X^tY_0 + X'{}^tY) = AX^tV_0 + A_1X'{}^tV$. Or $X^tY_0 + X'{}^tV$ est de rang 2 d'après II.1.b, donc $AX^tV_0 + A_1X'{}^tV$ est de rang 2 puisque Φ conserve le rang. Si (V, V_0) était liée, cette matrice serait de rang $\leqslant 1$, d'où le résultat.

b) On a $\Phi(X({}^tY_0 + {}^tY)) = AX^tV_0 + A_1X^tV$. Or, pour $X \neq 0$, $X^t(Y_0 + Y)$ est de rang 1, donc $AX^tV_0 + A_1X^tV$ est de rang 1, ce qui implique, puisque (V, V_0) est libre, que AX et A_1X sont liés, donc que X et $A^{-1}A_1X$ sont liés.

D'après un résultat classique (voir exercice.... feuille...), cela implique que $A^{-1}A_1$ est une homothétie, i.e $A^{-1}A_1 = \lambda I_n$ puis $A_1 = \lambda A$. Quitte à remplacer V par λV, on peut donc supposer $A_1 = A$.

On a alors : $\forall Y \in E$, $\exists V \in E$ tq $\Phi(X^tY) = AX^tV$. Comme dans la question II.2.c, on peut définir une application linéaire $Y \mapsto V$, donc on peut poser $V = BX$, et on montre comme dans II.2.c que B est inversible.

c) Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M et $E_1, \dots, E_n$ la base canonique de E. Alors $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i{}^tE_i$ donc

$$\Phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(C_i{}^tE_i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} C_i{}^tE_i\right)B = AMB$$

II.6 **a)** facile

b) On a $\Phi'(X^tY_0) = {}^tBX^tU_0$ pour tout $X \in E$. On est donc, pour Φ', dans les conditions de la question précédente ; on en déduit qu'il existe une matrice inversible A telle que $\Phi'(M) = {}^tBMA$ pour toute $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, d'où $\Phi(M) = {}^tA{}^tMB$

II.7 En conclusion, puisque l'on est soit dans le cas de la question II.5, soit dans celui de la question II.6, on en déduit que les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le rang sont les applications de la forme

$$M \longmapsto AMB \qquad \text{ou} \qquad M \longmapsto A^tMB$$

avec A, B inversibles. (on n'a en fait montré qu'une implication, mais il est clair que, réciproquement, les applications ci-dessus conservent le rang...)

Troisième partie

III.1 $\lambda M + N = P(\lambda J_r + K_r)Q$ donc $\det(\lambda M + N = \det P \det Q \det(\lambda J_r + K_r) = \det P \det Q\lambda^r$.

III.2 Puisque $\operatorname{rg}\Phi(M) = s$, il existe P', Q' inversibles telles que $\Phi(M) = P'J_sQ'$. Si on pose $\Phi(N) = P'N'Q'$, on aura $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N)) = \det P' \det Q' \det(\lambda J_s + N')$, ce qui permet de montrer que ce déterminant est un polynôme en λ de degré $\leqslant s$.

Or Φ conserve le déterminant donc $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N)) = \det(\Phi(\lambda M + N)) = \det(\lambda M + N) = \det P \det Q \lambda^r$, donc $r \leqslant s$.

Si $M \in \operatorname{Ker}\Phi$, alors $\Phi(M) = 0$ d'où $s = 0$ d'où $r = 0$ d'où $M = 0$. Ainsi Φ est injective ; puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective.

III.3 La question précédente donne : $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg}\Phi(M)$. Puisque Φ^{-1} est aussi un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, on a aussi $\operatorname{rg} M \leqslant \operatorname{rg}\Phi^{-1}(M)$ d'où $\operatorname{rg}\Phi(M) \leqslant \operatorname{rg}\Phi^{-1}(\Phi(M))$ ce qui donne $\operatorname{rg}\Phi(M) \leqslant \operatorname{rg} M$.

Finalement $\operatorname{rg}\Phi(M) = \operatorname{rg} M$: Φ conserve le rang.

III.4 Il découle alors de la partie II que les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant sont les applications de la forme

$$M \longmapsto AMB \qquad \text{ou} \qquad M \longmapsto A\,{}^tMB$$

avec A, B telles que $\det A \cdot \det B = 1$.

Quatrième partie

IV.1 Le déterminant d'une matrice est égal au produit des valeurs propres (distinctes ou non) ; donc si Φ conserve le spectre, il conserve le déterminant. D'après la partie précédente, il conserve donc aussi le rang.

IV.2 $\det(\lambda I - G\Phi(M)) = \det G \det(\lambda\Phi(I) - \Phi(M)) = \det(\Phi(\lambda I - M)) = \det(\lambda I - M)$ (en effet, $\det G = \dfrac{1}{\det\Phi(I)} = \dfrac{1}{\det I} = 1$).

Donc $\operatorname{Sp}(G\Phi(M)) = \operatorname{Sp} M$ et en posant $M' = \Phi(M)$, $\operatorname{Sp}(GM') = \operatorname{Sp} M'$ (M' décrit $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ lorsque M décrit $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ puisque Φ est bijective).

IV.3 En prenant $M = I$ dans le résultat précédent, on obtient $\operatorname{Sp} G = \{1\}$.

D'autre part, si l'on applique le résultat précédent avec $M = E_{ij}$ et $i \neq j$, GE_{ij} est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième qui vaut ${}^t(g_{1i}, \dots, g_{ni})$. Le spectre de GE_{ij} est donc $\{0, g_{ji}\}$ et est égal au spectre de E_{ij} qui est réduit à $\{0\}$, donc $g_{ji} = 0$ pour $i \neq j$.

Finalement, G est diagonale et sont spectre est $\{1\}$, donc $G = I$.

IV.4 Puisque $\Phi(I) = I$, il découle alors de III.4 que les endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le spectre sont les applications de la forme

$$M \longmapsto AMA^{-1} \qquad \text{ou} \qquad M \longmapsto A\,{}^tMA^{-1}$$

avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆