CORRIGE DM n° 7

CCP 2001, Maths1, PC)

Partie I

I.1. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\left({}^tAA\right)_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} (A_{k,i})^2$

donc si ${}^tAA = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $(A)_{k,i} = 0$

de plus si $A = 0$ alors ${}^tAA = 0$, donc

$$\boxed{{}^tAA = 0 \text{ si et seulement } A = 0}$$

désormais A est supposée non nulle donc ${}^tAA \neq 0$

I.2. ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est une matrice symétrique réelle , elle est donc diagonalisable au moyen de matrices orthogonales

$A^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est une matrice symétrique réelle , elle est donc aussi diagonalisable au moyen de matrices orthogonales

I.3.

a) $\boxed{\langle X|Y\rangle_n = {}^tXY = {}^tYX}$

b) W est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, donc $W \neq 0$ et ${}^tAAW = \lambda W$ donc $\|AW\|_n^2 = {}^t(AW)\,AW = {}^tW\left({}^tAAW\right) = {}^tW(\lambda W) = \lambda {}^tWW = \lambda\|W\|_p^2$:

$$\boxed{\|AW\|_n^2 = \lambda\|W\|_p^2}$$

c) $\|W\|_p^2 > 0$ et $\|AW\|_n^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } {}^tAA \text{ sont donc réelles, positives ou nulles}}$$

I.4

a) $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA - xI_n & A \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_n & 0_{n,p} \\ -{}^tA & {}^tAA - xI_p \end{pmatrix}$

b) On sait que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \times \det B$ si A et B sont des matrices carrées

Si on désigne par χ_M le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_M(x) = \det(M - xI_n)$

$$\det\left(\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} A^tA - xI_n & A \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = \chi_{A^tA}(x) \text{ donc } \chi_{A^tA}(x) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \det\left(\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}\right) = (-1)^n (-x)^p \det\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} -xI_n & 0_{n,p} \\ -{}^tA & {}^tAA - xI_p \end{pmatrix} = (-x)^n\,\chi_{{}^tAA}(x)$, donc $\underline{(-x)^n\,\chi_{{}^tAA}(x) = (-x)^p\,\chi_{A{}^tA}(x)}$

Les polynômes $\chi_{{}^tAA}$ et χ_{A^tA} sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$, puisque les matrices ${}^tAA$ et A^tA sont diagonalisables, donc $\chi_{{}^tAA}$ et χ_{A^tA} ont les mêmes racines non nulles avec le même ordre de multiplicité

$$\boxed{{}^tAA \text{ et } A^tA \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité}}$$

c) Deux matrices semblables ayant le même rang, toute matrice diagonalisable a un rang égal à la somme des ordres de multiplicité des valeurs propres non nulles :

$$\boxed{{}^tAA \text{ et } A^tA \text{ ont même rang}}$$

I.5. Si $n > p$, $\chi_{A^tA}(x) = (-x)^{n-p}\,\chi_{{}^tAA}(x)$ donc 0 est racine de χ_{A^tA} :

$$\boxed{\text{si } n > p \text{ , 0 est valeur propre de } A^tA \text{ et si } n < p, \text{ 0 est valeur propre de } {}^tAA}$$

I.6.

a) A étant non nulle, ${}^tAA$ est non nulle, elle est diagonalisable, elle a donc au moins une valeur propre non nulle, toutes ses valeurs propres sont positives, donc la plus grande des valeurs propres est strictement positive :

$$\boxed{\lambda_1 > 0}$$

b) La somme des ordres de multiplicité des valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ est égale à r donc $r = rang({}^tAA) = rang(A^tA)$ d'aprés **I.4.c.**
$A\,{}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{r \leq n}$ et d'après le théorème du rang ,

$$\boxed{\dim(KerA^tA) = n - r}$$

c) $\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1,2,..,r\},\ AV_i = \mu_i U_i}$ par définition des U_i
si $r > p$, pour tout $i \in \{r+1,..,p\}$, $\lambda_i = 0$, ${}^tAAV_i = 0_{R^p}$, $\|AV_i\|_n^2 = {}^tV_i{}^tAAV_i = 0$,

$$\boxed{\text{si } r > p \text{ , pour tout } i \in \{r+1,..,p\} \text{ , } AV_i = 0}$$

d) Pour tout $i \in \{1,2,..,r\}$, ${}^tAU_i = \dfrac{1}{\mu_i}\left({}^tAAV_i\right) = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}V_i = \mu_i V_i$
e) Si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1,..,n\}$, $U_i \in KerA^tA$, $\left\|{}^tAU_i\right\|_p^2 = {}^tU_i\left(A^tAU_i\right) = 0$,

$$\boxed{\text{pour tout } i \in \{1,2,..,r\},\ {}^tAU_i = \mu_i V_i \text{ et si } n > r, \text{ pour tout } i \in \{r+1,..,n\} \text{ , } {}^tAU_i = 0}$$

f) Pour tout $i \in \{1,2,..,r\}$, pour tout $j \in \{1,2,..,r\}$,
$\langle U_i|U_j\rangle = \dfrac{1}{\mu_i\mu_j}\,{}^tV_i\left({}^tAAV_j\right) = \dfrac{\lambda_j}{\mu_i\mu_j}\langle V_i|V_j\rangle = \delta_{ij}$ puique $\lambda_j = \mu_j^2$
si $n > r$, par définition $(U_{r+1},..U_n)$ est une famille orthonormale,
pour tout $i \in \{1,2,..,r\}$, pour tout $j \in \{r+1,..,n\}$, $\langle U_i|U_j\rangle = \dfrac{1}{\mu_i}({}^tV_i{}^tA)U_j = 0$
puisque ${}^tAU_j = 0$
$(U_1,U_2,..,U_n)$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$
de plus si $1 \leq i \leq r$, $A^tAU_i = A(\mu_iV_i) = \mu_i^2U_i = \lambda_iU_i$
si $r < n$, $r+1 \leq i \leq n$, $A^tAU_i = 0$, donc

$$\boxed{(U_1,U_2,..,U_n) \text{ est une base orthonormale de vecteurs propres de } A^tA}$$

pour tout $i \in \{1,2,..,r\}$, U_i est associé à la valeur propre λ_i
et si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1,..,n\}$, U_i est associé à la valeur propre 0

I.7.

a) $\forall (i,j) \in \{1,2,..,n\} \times \{1,2,..,p\}$, $\left({}^tUAV\right)_{ij} = \langle U_i | AV_j \rangle$
pour tout $j \in \{1,2,..,r\}$, $AV_j = \mu_j U_j$ donc $\langle U_i | AV_j \rangle = \mu_j \langle U_i | U_j \rangle = \mu_j \delta_{ij}$
si $r < p$, pour tout $j \in \{r+1,..,p\}$, $\mu_j = 0$ et $AV_j = 0$ donc $\langle U_i | AV_j \rangle = \mu_j \delta_{ij}$

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1,2,..,n\} \times \{1,2,..,p\} \ , \ \left({}^tUAV\right)_{ij} = \mu_j \delta_{ij}}$$

b) On a donc ${}^tUAV = \Delta$
Les vecteurs colonnes de U constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, donc U est une matrice orthogonale, $U \in O(n)$, U est inversible et $U^{-1} = {}^tU$
De même $V \in O(p)$ et V est inversible avec $V^{-1} = {}^tV$
Donc, en multipliant l'égalité ${}^tUAV = \Delta$ à droite par ${}^tV$ et à gauche par U on obtient :

$$\boxed{A = U\Delta {}^tV}$$

c) ${}^tA_0A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
(U_3) est une base orthonormale de $KerA_0{}^tA_0$ avec $A_0{}^tA_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, on peut aussi l'obtenir en complétant en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ la famille orthonormale (U_1, U_2)

$$\boxed{A_0 = U\Delta {}^tV \text{ avec } U = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} , \ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \ {}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

${}^tB_0B_0 = (2)$, $V_1 = (1)$, $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B_0 = U\Delta {}^tV \text{ avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} , \ {}^tV = (1)}$$

I.8. U et ${}^tV$ sont des matrices inversibles, donc le rang de A est égal au rang de Δ donc

$$\boxed{rang(A) = r}$$

I.9.

a) $V_i{}^tE_i$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i-ième égale à V_i,

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{p} V_i{}^tE_i}$$

b) On a de même $U = \sum_{j=1}^{n} U_j{}^t F_j$

donc $A = U\Delta\ {}^tV = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} U_j{}^t F_j \Delta V_i{}^t E_i \right)$

or ${}^tF_j\Delta V_i = \delta_{ij}\mu_j$ si $1 \leq j \leq r$, ${}^tF_j\Delta V_i = 0$ sinon, donc

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^t V_i}$$

${}^tAA = \ {}^tA \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^t V_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \left({}^tAU_i \right) {}^tV_i$, or ${}^tAU_i = \mu_i V_i$ et $\lambda_i = \mu_i^2$, donc

$$\boxed{{}^tAA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^t V_i}$$

${}^tA = \sum_{i=1}^{r} \mu_i V_i{}^t U_i$, donc $A^tA = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \left(AV_i \right) {}^tU_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \left(\mu_i U_i \right)^t U_i$, donc

$$\boxed{A^tA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^t U_i}$$

c) Soit $X \in \mathbb{R}^p$, ${}^tV_iX = \langle V_i|X \rangle$, donc $AX = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^t V_i \right) X = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \langle V_i|X \rangle U_i$

$(U_1, U_2, .., U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, pour tout $i \in \{1, 2, .., r\}$, $\mu_i \neq 0$
donc $AX = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, .., r\}$, $\langle V_i|X \rangle = 0$
$(V_1, V_2, ..., V_p)$ étant une base orthormale de $\mathbb{R}^p$,

$$\boxed{\text{si } r < p \text{ , } KerA = Vect\left(V_{r+1}, .., V_p\right) \text{ et si } r = p \text{ , } KerA = \{0\}}$$

Par un raisonnement analogue, si $Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tAY = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \langle U_i|Y \rangle V_i$

$$\boxed{\text{si } r < n \text{ , } \operatorname{Ker}\left({}^tA\right) = \operatorname{Vect}\left(U_{r+1}, .., U_n\right) \text{ et si } r = n \text{ , } \operatorname{Ker}\left({}^tA\right) = \{0\}}$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, $AX \in \operatorname{Vect}\left(U_1, .., U_r\right)$ donc $\operatorname{Im}A \subset \operatorname{Vect}\left(U_1, .., U_r\right)$

comme $\dim(\operatorname{Ker} A) = p - r$, $\dim(\operatorname{Im}A) = p - (p - r) = r = \dim\left(Vect\left(U_1, .., U_r\right)\right)$, donc

$$\boxed{\operatorname{Im}A = Vect\left(U_1, U_2, .., U_r\right)}$$

et on obtient de même

$$\boxed{\operatorname{Im}\left({}^tA\right) = Vect(V_1, V_2, .., V_r)}$$

d) $KerA \subset Ker\left({}^tAA\right)$, de plus A et ${}^tAA$ ont le même rang r
donc $\dim\left(KerA\right) = p - r$ et $\dim\left(Ker({}^tAA)\right) = p - r$, donc

$$\boxed{KerA = Ker\left({}^tAA\right)}.$$

Un raisonnement analogue permet de démontrer que :

$$\boxed{Ker\left({}^tA\right) = Ker\left(A^tA\right)}.$$

Partie II

II.1. On déduit de **I.7.b** que

$$A_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$A_0A_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad A_0^+A_0 = I_2$$

puis

$$A_0A_0^+A_0 = A_0 \qquad A_0^+A_0A_0^+ = A_0^+.$$

II.2. *Le texte présente une imprécision : pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,non nulle, on appelle décomposition en valeurs singulières de A toute décomposition $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$ où $U \in O(n)$, $V \in O(p)$ et où Δ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ où $1 \le r \le \min(n,p)$ égaux respectivement à $\mu_1, \ldots, \mu_r$ réels strictement positifs.*

On peut alors montrer facilement que les valeurs propres non nulles de ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A^{\mathrm{t}}A$ sont $\mu_1^2, \ldots, \mu_r^2$ et que si $(V_1, \ldots, V_p)$ (respectivement $(U_1, \ldots, U_n)$) sont les vecteurs colonnes de V (respectivement de U), ils vérifient les conditions établies en I.

Notons $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $\Delta_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$, Comme U_0 et V_0 sont orthogonales et que Δ_0^+ est du type voulu, $A_0^+ = U_0\Delta_0^{+\mathrm{t}}V_0$ est une décomposition de A_0^+ en valeurs singulières, d'où l'on déduit que $(A_0^+)^+ = V_0(\Delta_0^+)^{+\mathrm{t}}U_0 = V_0\Delta_0{}^{\mathrm{t}}U_0 = A_0$.

$$\boxed{(A_0^+)^+ = A_0.}$$

II.3. Soit $C = \Delta^+\Delta$. $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]$,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{i,k}^+ \Delta_{k,j}$$

Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\Delta_{i,k}^+ = 0$ si $k \ne i$ ou si $k = i$ et $i \ge r+1$ et que $\Delta_{k,j} = 0$ si $k \ne j$ ou si $k = j$ et $j \ge r+1$, on en déduit que $c_{i,j}$ est nul sauf si $i = j \le r$ auquel cas $c_{i,i} = \frac{1}{\mu_i}\mu_i = 1$.

$$\boxed{\Delta^+\Delta = J_r(p) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \text{ réduite canonique de rang } r \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).}$$

De même

$$\boxed{\Delta\,\Delta^+ = J_r(n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \text{ réduite canonique de rang } r \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

II.4. Si $n = p = r$, ce qui précède prouve que $\Delta^+ = \Delta^{-1}$, comme de plus $V = ({}^{\mathrm{t}}V)^{-1}$ et ${}^{\mathrm{t}}U = U^{-1}$, car U et V sont orthogonales,

$$\boxed{A^+ = A^{-1}}$$

II.5.

D'après **I.9.a)**, $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i\,{}^{\mathrm{t}}F_i$.

Les calculs suivants sont analogues à ceux de **I.9.b**

${}^{\mathrm{t}}U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i$

$\Delta^+\,{}^{\mathrm{t}}U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\Delta^+\,F_i)\,{}^{\mathrm{t}}U_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i}\,F_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i$.

$A^+ = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i}\,(VF_i)\,{}^{\mathrm{t}}U_i$, soit,

$$\boxed{A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i}\,V_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i.}$$

D'autre part, en utilisant l'égalité $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j U_j\,{}^{\mathrm{t}}V_j$ trouvée en **I.9.b**

$AA^+ = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le r} \frac{\mu_j}{\mu_i}\,U_j\,{}^{\mathrm{t}}V_j\,V_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i$. Or pour tous i et j dans $[\![1,p]\!]$, ${}^{\mathrm{t}}V_j\,V_i = \langle V_j \,|\, V_i\rangle = \delta_{i,j}$ car $(V_1,\dots,V_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$. D'où

$$\boxed{AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i.}$$

De la même façon,en échangeant les rôles de U et V, comme $(U_1,\dots,U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$,

$$\boxed{A^+\,A = \sum_{i=1}^{r} V_i\,{}^{\mathrm{t}}V_i.}$$

II.6.a. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$AA^+U_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} U_i\,({}^{\mathrm{t}}U_i\,U_j) = \sum_{i=1}^{r} \langle U_i \,|\, U_j\rangle\;U_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_{i,j}\,U_i.$

Finalement, $AA^+U_j = \begin{cases} U_j & \text{si } 1 \le j \le r \\ 0 & \text{si } j \ge r+1 \end{cases}$

Comme $(U_1,\dots,U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme associé à AA^+ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Vect}(U_1,\dots,U_r) = \mathrm{Im}\,A$.

II.6.b. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$A^+AV_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} V_i\,({}^{\mathrm{t}}V_i\,V_j) = \sum_{i=1}^{r} \langle V_i \,|\, V_j\rangle\;V_i = \sum_{i=1}^{r} \delta_{i,j}\,V_i.$

Soit $A^+AV_j = \begin{cases} V_j & \text{si } 1 \le j \le r \\ 0 & \text{si } j \ge r+1 \end{cases}$.

Comme $(V_1,\dots,V_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$, l'endomorphisme associé à A^+A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_r) = (\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$.

II.7.

- AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, orthonormée pour le produit scalaire canonique, d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$: elle est donc symétrique .
$$\boxed{AA^+ = {}^{\mathrm{t}}(AA^+).}$$

- A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, orthonormée pour le produit scalaire canonique, d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$: elle est donc symétrique .
$$\boxed{A^+A = {}^{\mathrm{t}}(A^+A).}$$

- On a $\mathbb{R}^p = \operatorname{Ker} A \oplus (\operatorname{Ker} A)^\perp$.
$\forall X \in \operatorname{Ker} A$, $AA^+AX = 0 = AX$.
$\forall X \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$, $(A^+A)X = X$ car A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ et donc $A(A^+A)X = AX$. On en déduit que
$$\boxed{AA^+A = A}$$

- Utilisons la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $(U_1, \dots, U_n)$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
Si $1 \leq j \leq r$, on a vu que $AA^+\,U_j = U_j$ d'où $A^+AA^+U_j = A^+U_j$.
Si $j \geq r+1$, $AA^+U_j = 0$ et $A^+AA^+U_j = 0$.
D'autre part, $A^+U_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i\,{}^{\mathrm{t}}U_i\,U_j$.
Or pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, ${}^{\mathrm{t}}U_i\,U_j = \langle U_i \,|\, U_j\rangle = \delta_{i,j} = 0$ car $j \geq r+1 > i$.
D'où $A^+U_j = 0 = A^+AA^+U_j$.
Les endomorphismes associés dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ aux matrices A^+ et A^+AA^+ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$:
$$\boxed{A^+AA^+ = A^+}$$

II.8. Si $M \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$ et si $N \in \mathcal{M}_{m,s}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Im}(MN) \subset \operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker}(N) \subset \operatorname{Ker}(MN)$. On en déduit alors immédiatement à l'aide de **II.7** les égalités (i). Plus précisément:

- $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}(AA^+) \subset \operatorname{Im}(A) \\ \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AA^+A) \subset \operatorname{Im}(AA^+) \end{array}\right\}$ donne $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AA^+)$.

- $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker}(A^+) \subset \operatorname{Ker}(AA^+) \\ \operatorname{Ker}(AA^+) \subset \operatorname{Ker}(A^+(AA^+)) = \operatorname{Ker}(A^+) \end{array}\right\}$ donne $\operatorname{Ker}(A^+) = \operatorname{Ker}(AA^+)$.

- $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}(A^+A) \subset \operatorname{Im}(A^+) \\ \operatorname{Im}(A^+) = \operatorname{Im}(A^+AA^+) \subset \operatorname{Im}(A^+A) \end{array}\right\}$ donne $\operatorname{Im}(A^+) = \operatorname{Im}(A^+A)$.

- $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^+A) \\ \operatorname{Ker}(A^+A) \subset \operatorname{Ker}(A(A^+A)) = \operatorname{Ker}(A) \end{array}\right\}$ donne $\operatorname{Ker}(A^+A) = \operatorname{Ker}(A)$.

AA^+ est la matrice d'une projection (orthogonale) de $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(AA^+) \oplus \operatorname{Ker}(AA^+)$.
De même comme (A^+A) est la matrice d'une projection de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p = \operatorname{Im}(A^+A) \oplus \operatorname{Ker}(A^+A)$.
En utilisant (i)
$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A^+) \qquad \mathbb{R}^p = \operatorname{Im}(A^+) \oplus \operatorname{Ker}(A)$$

II.9.
II.9.a. (i) $B = B(AB) = B^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ et $B = (BA)B = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B\,B$.
(ii) $A = (AB)A = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A\,A$ et $A = A(BA) = A^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B$.
(iii) ${}^{\mathrm{t}}A = B\,A\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AAB$ en transposant les égalités (ii).

II.9.b. Comme A^+ vérifie (1), elle vérifie, comme B les identités (i), (ii) et (iii).

$$\begin{aligned} B &= B{}^{\mathrm{t}}B{}^{\mathrm{t}}A \qquad {}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AAA^+ \\ &= B({}^{\mathrm{t}}B{}^{\mathrm{t}}AA)A^+ \\ &= BAA^+ \qquad \text{par (ii)} \\ &= BA{}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}(A^+)A^+ \qquad \text{car } A^+ \text{ vérifie (i)} \\ &= {}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}(A^+)A^+ \qquad \text{car } B \text{ vérifie (iii)} \\ &= A^+ \qquad \text{car } A^+ \text{ vérifie (i)} \end{aligned}$$

II.10. $(A^+)^+$ est l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^+B = {}^{\mathrm{t}}(A^+B) \quad BA^+ = {}^{\mathrm{t}}(BA^+) \quad A^+BA^+ = A^+ \quad BA^+B = B \qquad \textbf{(2)}$$

Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et que A vérifie (2),

$$\boxed{A = (A^+)^+}$$

En transposant les identités (1), on obtient :

${}^{\mathrm{t}}(A^+){}^{\mathrm{t}}A = AA^+ = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}(A^+){}^{\mathrm{t}}(A)) \quad {}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}(A^+) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}(A^+)) \quad {}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}(A^+){}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}A \quad {}^{\mathrm{t}}(A^+){}^{\mathrm{t}}(A){}^{\mathrm{t}}(A^+) = {}^{\mathrm{t}}(A^+)$.

De plus ${}^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et ${}^{\mathrm{t}}(A^+) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En utilisant la caractérisation de $({}^{\mathrm{t}}A)^+$ obtenue précédemment on obtient:

$$\boxed{({}^{\mathrm{t}}A)^+ = {}^{\mathrm{t}}(A^+).}$$

II.11. Notons $C = A_0B_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Cherchons C^+ sous la forme $C^+ = M = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ pour que les identités (1) soient vérifiées.

- $CM = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$. CM est symétrique si et seulement si $c = -a$ et $b = 0$, ce que l'on suppose acquis pour la suite des calculs.
- $MC \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$ est toujours symétrique.
- On cherche $M = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \end{pmatrix}$.

  $CMC = \begin{pmatrix} 8a \\ 0 \\ -8a \end{pmatrix}$ d'où $CMC = C$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{4}\cdot$
- On vérifie ensuite que si $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $MCM = M$.

On a donc $(A_0B_0)^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

A partir de la décomposition de B_0 en valeurs singulières :

$B_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} (1)$, on en déduit

$B_0^+ = (1) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

On effectue le produit $B_0^+A_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$. $\boxed{B_0^+A_0^+ \neq (A_0B_0)^+}$

II.12.

II.12.a. Pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, AA^+H est le projeté orthogonal de H sur $\operatorname{Im} A$, donc $H - AA^+H$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$ d'où

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \langle AX - AA^+H \,|\, H - AA^+H \rangle = 0.}$$

En utilisant Pythagore,

$\| AX - H \|_n^2 = \| AX - AA^+H \|_n^2 + \| H - AA^+H \|_n^2$, d'où $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \| A\overline{H} - H \|_n \leq \| AX - H \|_n.}$

On en déduit que $\min\limits_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \| AX - H \|_n = \| A\overline{H} - H \|_n$ et donc

$$\boxed{\mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A) = \| A\overline{H} - H \|_n}$$

II.12.b. S'il existe $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\| A\tilde{H} - H \|_n = \| A\overline{H} - H \|_n = \mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A)$, alors par unicité du projeté orthogonal de H sur $\operatorname{Im} A$, $A\tilde{H} = A\overline{H}$, soit $\tilde{H} - \overline{H} \in \operatorname{Ker} A$.

On a alors $\tilde{H} = \overline{H} + (\tilde{H} - \overline{H})$ avec $\overline{H} \in \operatorname{Im}(A^+) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et $\tilde{H} - \overline{H} \in \operatorname{Ker} A$.

Par Pythagore, $\| \tilde{H} \|_p^2 = \| \overline{H} \|_p^2 + \| \tilde{H} - \overline{H} \|_p^2$. Si de plus $\tilde{H} \neq \overline{H}$, $\| \tilde{H} - \overline{H} \|_p^2 > 0$ et donc

$$\| \overline{H} \|_p < \| \tilde{H} \|_p$$

II.12.c. $\min\limits_{X \in \mathbb{R}^2} \| A_0X - H \|_3 = \| A_0A_0^+H - H \|_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.